Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. №4 (черновик)

УДК 338.24 – 519.8

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ ИЕРАРХИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ УСТОЙЧИВЫМ РАЗВИТИЕМ*

 Г.А.Угольницкий

Ростов-на-Дону, Ростовский государственный ун-т

Поступила в редакцию

Предложена теоретико-игровая модель иерархического управления устойчивым развитием. Осуществлена формализация трех методов иерархического управления как решений игры, обобщающих равновесия по Штакельбергу и Гермейеру. Получены достаточные условия существования решений, проведено исследование модельных примеров.

Введение. Наиболее распространенным принципом оптимальности решения иерархической игры двух лиц являются равновесие по Штакельбергу [1] и принцип гарантированного результата Ю.Б.Гермейера [2]. Выигрыши ведущего игрока в этих случаях отвечают верхней и нижней границам диапазона значений выигрыша, который может получить ведущий игрок при благожелательном и неблагожелательном ведомом игроке соответственно. Поэтому оптимальной стратегией ведущего игрока

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04-01-96812).

следует считать такую, которая обеспечивает ему выигрыш, не меньший максимального гарантированного результата по Гермейеру.

В работе развивается подход, предложенный в [3]. Проблема управления устойчивым развитием формализуется в виде иерархической игры двух лиц. Методы принуждения и побуждения [4] трактуются как «частичные» стратегии, воздействующие на область допустимых стратегий и функцию выигрыша ведущего игрока соответственно и приводящие к параметрическим семействам равновесий игры. Комбинированное применение этих методов представляет собой оптимальную иерархическую стратегию в указанном выше смысле. Метод убеждения [4] отвечает переходу игроков к кооперации. По сравнению с [3] существенно уточняются определения, анализируются достаточные условия существования равновесий иерархического управления устойчивым развитием. Формулируются ограничивающие модельные предположения, обобщающие опыт управления эколого-экономическими системами.

Рассматривается статическая версия модели в простейшей форме и с учетом дополнительных затрат ведущего игрока на преодоление контригры ведомого. Анализируются модельные примеры, указываются возможные пути развития предложенного подхода.

1.Принципы оптимальности в иерархических играх. Рассмотрим иерархическую игру двух лиц в нормальной форме

$$G = \langle X_L , X_F , J_L , J_F \rangle , \tag{1.1}$$

где индексом L обозначен ведущий игрок (Ведущий), а индексом F – подчиненный (Ведомый). Иерархия (право первого хода $x_L \in X_L$) дает Ведущему гарантию выбора Ведомым стратегии из множества

$R_F(x_L) = \{x_F \in X_F : J_F(x_L , x_F) = \sup J_F(x_L , y_F)\}$.

$$y_F \in X_F$$

Принято обозначать $BR_F = \{(x_L , x_F) \in X_L \times R_F (x_L)\}$ – множество оптимальных реакций, или график наилучших ответов Ведомого на стратегию Ведущего x_L .

Наиболее распространенной концепцией оптимальности решения иерархической игры (1.1) является L-равновесие по Штакельбергу [1]

$$(x_L , x_F) \in BR_F : \quad J_L(x_L , x_F) = \sup_{(y_L , y_F) \in BR_F} J_L(y_L , y_F) = S_L$$

(аналогично определяется F-равновесие по Штакельбергу). Заметим, что величину S_L выигрыша Ведущего в равновесии по Штакельбергу можно определить как

$$S_L = \sup_{y_L \in X_L} \sup_{y_F \in R_F(y_L)} J_L(y_L , y_F) ,$$

что соответствует предположению о благожелательности Ведомого по отношению к Ведущему. Иначе говоря, если множество $R_F (x_L)$ содержит более одного элемента, то предполагается выбор Ведомым наиболее благоприятной для Ведущего стратегии из этого множества (для самого Ведомого все стратегии из $R_F (x_L)$ эквивалентны). Таким образом, концепция равновесия по Штакельбергу основана на «оптимистической» оценке Ведущим мотивов поведения Ведомого.

Противоположный «пессимистический» подход лежит в основе широко распространенного в отечественной литературе принципа гарантированного результата Ю.Б.Гермейера [2]. Максимальный гарантированный результат Ведущего в игре (1.1) есть

$$\gamma_L = \sup \quad \inf \quad J_L (y_L , y_F).$$

$y_L \in X_L \quad y_F \in R_F(y_L)$

Ситуацию $(x_L\ ,\ x_F) \in BR_F$, на которой достигается выигрыш Ведущего γ_L , естественно назвать L-равновесием по Гермейеру. Обозначим множества L-равновесий по Штакельбергу и Гермейеру в игре (1.1) через $SO_L(G)$, $GO_L(G)$, а множества стратегий Ведущего, реализующих выигрыши S_L и γ_L - через X_L^S , X_L^G соответственно, то есть

$$X_L^S = \{x_L \in X_L : \sup_{y_F \in R_F(y_L)} J_L(x_L\ ,\ y_F) = S_L\}\ ,$$

$$X_L^G = \{x_L \in X_L : \inf_{y_F \in R_F(y_L)} J_L(x_L\ ,\ y_F) = \gamma_L\}\ .$$

Очевидно, при анализе игры с точки зрения интересов Ведущего следует рекомендовать ему выбор стратегии из множества

$$X_L^* = \{x_L \in X_L : \ \forall x_F \in R_F(x_L)\ \ J_L(x_L\ ,\ x_F) \geq \gamma_L\}\ ,$$

что приводит к совокупности оптимальных для Ведущего равновесий

$$LO(G) = \{(x_L\ ,\ x_F) \in BR_F : J_L\,(x_L\ ,\ x_F) \geq \gamma_L\}\ .$$

Таким образом, гарантирующие стратегии Ведущего по Штакельбергу и Гермейеру являются крайними случаями его множества оптимальных стратегий, то есть

$$\gamma_L \leq J_L\,(x_L\ ,\ x_F) \leq S_L\ ,\ x_L \in X_L^*,\ x_F \in R_F(x_L)\ ,$$

а также справедливы включения

$$GO_L(G) \subseteq LO(G),\ \ SO_L(G) \subseteq LO(G),\ \ LO(G) \subseteq BR_F\,.$$

Попытка учета интересов обоих участников игры (1.1) приводит к концепции γ-ядра [1], то есть множества дележей C_γ таких, что существует сценарий предостережений $<(x_L\ ,\ x_F)\ ,\ z_L\ ,\ z_F>$, в котором угрозы z_L , z_F являются предупреждениями. Как показано в

[1], дележи из C_γ удобно находить с помощью следующих эквивалентных критериев: при взаимно однозначных функциях J_L, J_F

$C_\gamma = \{(x_L , x_F) \in PO(G) : J_L(x_L , x_F) \geq S_L , J_F(x_L , x_F) \geq S_F \}$

или без предположения о взаимной однозначности J_L, J_F

$C_\gamma = \{(x_L , x_F) \in PO(G) : J_L(x_L , x_F) \geq \gamma_L , J_F(x_L , x_F) \geq \gamma_F \}$,

где PO(G) – множество Парето-оптимальных ситуаций в игре G.

Пример 1: модифицированная координационная игра [1].

Пусть в (1.1) $X_L = X_F = \{1,2,\ldots10\}$,

$$J_L(x_L , x_F) = \begin{cases} x_L , & x_L + x_F = 10, \\ 4 , & x_L + x_F \neq 10 \text{ и четно}, \\ 0, & x_L + x_F \neq 10 \text{ и нечетно}, \end{cases} \quad J_F(x_L , x_F) = \begin{cases} x_F , & x_L + x_F = 10, \\ 0 , & x_L + x_F \neq 10 \text{ и четно}, \\ 4, & x_L + x_F \neq 10 \text{ и нечетно}. \end{cases}$$

Как видно из табл., определенные выше множества и величины суть

$S_L = S_F = 6$, $\gamma_L = \gamma_F = 5$, $X_L^S = \{6\}$, $X_L^G = X_L^* = \{5\}$,

$SO_L(G) = \{(6,4)\}$, $GO_L(G) = \{(5,5)\}$, $LO(G) = \{(6,4),(5,5)\}$, $C_\gamma = \{(5,5)\}$.

2.Методы иерархического управления. Анализ процессов управления в иерархических системах позволяет выделить три качественно различных метода управления [4]:

1) принуждение, при котором Ведущий обеспечивает насильственное подчинение Ведомого своим намерениям посредством обязательных установлений, игнорирующих интересы Ведомого;

2) побуждение, в котором основную роль играет вознаграждение, обещаемое Ведущим Ведомому в обмен на подчинение (и штраф в противном случае);

3) убеждение, означающее добровольную солидаризацию Ведомого с намерениями Ведущего.

С точки зрения математической формализации управления как иерархической игры двух лиц (1.1), выполненный анализ приводит к следующим выводам:

- вектор управляющих воздействий (стратегия) Ведущего подразделяется на два подвектора, первый из которых соответствует принуждению, а второй – побуждению;

- компоненты подвектора принуждения ограничивают множество допустимых стратегий Ведомого. Это ограничение носит безусловный характер (постоянная стратегия Ведущего);

- компоненты подвектора побуждения влияют на функцию выигрыша Ведомого и принципиально зависят от выбираемой Ведомым стратегии (стратегия Ведущего с обратной связью);

- метод убеждения означает переход игроков к кооперативному поведению.

Принуждение и побуждение могут дополняться манипуляцией Ведущего, означающей намеренное корыстное искажение передаваемой Ведомому информации. Объявляя Ведомому об использовании некоторого механизма управления, Ведущий после реакции на него применяет более выгодный для себя механизм (например, изменение налоговой ставки задним числом).

В свою очередь, Ведомый может прибегнуть к контригре, под которой понимается нарушение устанавливаемых Ведущим ограничений. Контроль нарушений и борьба с ними требуют от Ведущего дополнительных затрат, растущих пропорционально строгости его требований.

3.Проблема устойчивого развития. В документах Конференции ООН по окружающей среде и развитию (Рио-де-Жанейро, 1992) устойчивое развитие определяется как стабильный экономический рост, не приводящий к деградации природной среды, что гарантирует удовлетворение потребностей не только настоящего, но и будущих поколений. Понятие устойчивого развития включает следующие обязательные требования: 1) выполнение условий как экономического развития, так и экологического равновесия; 2) соблюдение этих условий на бесконечном или по крайней мере весьма длительном интервале времени; 3) необходимость управления устойчивым развитием, обеспечивающего согласование несовпадающих интересов Ведущего и Ведомого при непременном выполнении ключевых условий.

При анализе управления устойчивым развитием целесообразно трактовать эколого-экономическую систему как иерархически управляемую динамическую систему [5]. Воздействуя на эколого-экономическую систему, Ведомый (природопользователь) преследует собственные интересы (обычно максимизацию текущего дохода), что в общем случае не отвечает требованиям устойчивого развития. Сама эколого-экономическая система не может целенаправленно отстаивать свои интересы, а ее ответные реакции на антропогенное воздействие могут привести к нежелательным или даже катастрофическим последствиям. Поэтому нужен Ведущий (государственный контролирующий и регулирующий орган), способный воздействовать на Ведомого для достижения цели устойчивого развития. При обеспечении требований устойчивого развития Ведущий руководствуется критерием оптимальности, отражающим его дополнительные предпочтения на множестве стратегий устойчивого развития. При этом Ведущий может использовать манипуляцию, а Ведомый прибегать к контригре.

4.Модель и принципы оптимальности. Формализация устойчивого развития как цели иерархического управления и методов ее достижения с учетом интересов Ведущего и Ведомого осуществляется посредством теоретико-игровой модели

$J_L = g_L(\pi(q,p,u)) - M\rho(u,U_L) \to \max$, $0 \le q \le 1$; $0 \le p \le 1$; (4.1)

$J_F = g_F(\pi(p,u)) \to \max$, $0 \le u \le 1\text{-}q$; $U_L = [0,a]$, $0 \le a \le 1$.

Здесь $u = (u_1, \ldots, u_n)$ – стратегия Ведомого, имеющая смысл воздействия на природную среду и измеряемая в долях изъятия природных ресурсов или выброса загрязняющих веществ; U_L - область стратегий Ведомого, отвечающих экологическим требованиям (параметр а определяет степень жесткости этих требований); если $u \in U_L$, то $\rho(u,U_L) = 0$, иначе $\rho(u,U_L) = 1$; M – штрафная константа, многократно превышающая максимальное значение дохода Ведущего g_L ; $q = (q_1, \ldots, q_n)$ – управление типа принуждения, компоненты которого имеют смысл законодательных ограничений (предельно допустимые концентрации, квоты вылова, правила рубки и т.п.); $p = (p_1, \ldots, p_m)$ – управление типа побуждения, имеющее смысл экономического стимулирования (налоги, штрафы и т.п.); по смыслу p есть управление с обратной связью вида

$$p(u) = \begin{cases} p^+ , & u \in U_L , \\ p^- , & \text{иначе}, \end{cases} \qquad (4.2)$$

поэтому необходимо определить проекцию [6]

$\pi : Q \times P^{U(q)} \times U(q) \to Q \times P \times U(q)$, $Q = P = [0,1]$, $U(q) = [0,1\text{-}q]$;

g_L , g_F – функции дохода Ведущего и Ведомого соответственно.

Опыт управления эколого-экономическими системами позволяет сформулировать следующие ограничивающие предположения для модели (4.1).

А1. $U_L \ne \varnothing$: экологические требования выполнимы.

A2. $R(0,0) \cap U_L = \varnothing$: при отсутствии управления Ведущего рациональный выбор Ведомого ведет к нарушению экологических требований.

A3. $\partial g_F / \partial u_j \geq 0$; $\partial g_F / \partial p_i \leq 0$; $\forall p \in P$ $g_F(p,0)=0$; $i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$: Ведомому выгодно увеличение его воздействия на природную среду и невыгодно увеличение налогов (штрафов) Ведущим.

A4. $g_L(q,p,u) = g_1(p,u) - g_2(q,p)$, где функция g_1 непрерывна, дифференцируема по обоим аргументам и неотрицательна на [0,1]; g_2 непрерывна, дифференцируема по обоим аргументам и неотрицательна на [0,1);

$\partial g_1 / \partial p_i \geq 0$; $\partial g_1 / \partial u_j \geq 0$; $\partial g_2 / \partial p_i \geq 0$; $\partial g_1 / \partial q_j \geq 0$;

$$g_2(0,0) = 0; \quad \lim_{q_j \to 1} g_2(q,p) = \lim_{p_i \to 1} g_2(q,p) = \infty, \ i=1,\dots,m; \ j=1,\dots,n.$$

Таким образом, функция g_L выигрыша Ведущего представляет собой разность двух функций. Функция g_1 описывает доход Ведущего и возрастает как при увеличении p (налоговой ставки), так и при увеличении u (налоговой базы). Функция g_2 описывает затраты Ведущего на контроль за выполнением его управляющих воздействий (преодоление контригры Ведомого); эти затраты возрастают как с ростом p, так и с ростом q , причем при максимально жестком управлении ведущего (q=p=1) его предельные затраты равны бесконечности (иначе говоря, реализация стратегий наказания Ведомого Ведущим экономически невозможна).

Принципы оптимальности в модели (4.1) формализуют методы принуждения, побуждения и убеждения. Для фиксированного механизма управления $p \in P^{U(q)}$ вида (4.2) определим множество L-равновесий принуждения

$$Comp_L(p) = \{(q,p,u): q \in Q, u \in R(q,p): J_L(\pi(q,p,u)) \geq \gamma_L^{comp}(p)\}, \quad (4.3)$$

где максимальный гарантированный результат Ведущего при принуждении при данном p

$$\gamma_L^{comp}(p) = \sup_{s \in Q} \inf_{z \in R(s,p)} J_L(\pi(s,p,z)) . \quad (4.4)$$

В частности, $Comp_L(p)$ включает множество L-равновесий принуждения по Штакельбергу

$Comp_L^S(p) = \{(q,p,u):\ J_L(\pi(q,p,u)) = S_L^{comp}(p)\}$,

$$S_L^{comp}(p) = \sup_{s \in Q} \sup_{z \in R(s,p)} J_L(\pi(s,p,z)),$$

и множество L-равновесий принуждения по Гермейеру

$Comp_L^G(p) = \{(q,p,u):\ J_L(\pi(q,p,u)) = \gamma_L^{comp}(p)\}$.

Стратегия принуждения $q \in Q$ такая, что при фиксированном механизме управления $p \in P^{U(q)}$ оптимальная реакция Ведомого $u \in R(q,p)$ приводит к L-равновесию принуждения, обеспечивает Ведущему выигрыш в диапазоне

$\gamma_L^{comp}(p) \le J_L^{comp}(p) \le S_L^{comp}(p)$.

Частным случаем реализации метода принуждения является использование отображения $p(u)\equiv 0$, то есть полный отказ от экономического воздействия.

Утверждение 1. При $a > 0$ и любом фиксированном механизме управления $p(u) < 1$ множество $Comp_L(p)$ непусто.

Доказательство. Выбор значения $q = 1 - a$ вызывает однозначную оптимальную реакцию Ведомого $u = a$. В этом случае значение (4.4) достигается, и ситуация (q,p,u) принадлежит множеству (4.3).

Для фиксированного $q\in Q$ определим множество L-равновесий побуждения

$Imp_L(p) = \{(q,p,u): p \in P^{U(q)}, u \in R(q,p): J_L(\pi(q,p,u)) \ge \gamma_L^{imp}(p)\}$, (4.5) где максимальный гарантированный выигрыш Ведущего при побуждении

$$\gamma_L^{imp}(q) = \sup_{r \in P^{U(q)}} \inf_{z \in R(q,p)} J_L(\pi(q,r,z)) . \qquad (4.6)$$

Аналогично случаю принуждения, множество (4.5) включает в себя множества L-равновесий побуждения по Штакельбергу и Гермейеру. Таким образом, стратегия побуждения $p \in P^{U(q)}$ такая, что при фиксированном $q \in Q$ оптимальная реакция Ведомого

$u \in R(q,p)$ приводит к L-равновесию побуждения, обеспечивает Ведущему выигрыш в диапазоне

$\gamma_L^{imp}(q) \le J_L^{imp}(q) \le S_L^{imp}(q)$.

Частным случаем реализации метода побуждения является случай $q=0$, то есть полный отказ от законодательного регулирования.

Утверждение 2. При любом фиксированном $q < 1$ множество (4.5) непусто, если существует стратегия $p \in P^{U(q)}$ ($p< 1$) такая, что

$\forall y \in U(q) \setminus U_L \quad \exists u \in U_L : J_F(\pi(q, p, u)) > J_F(\pi(q, p, y))$.

Доказательство. Применение механизма управления p вызывает оптимальную реакцию Ведомого $u \in U_L$, после чего значение (4.6) достигается и ситуация (q,p,u) принадлежит множеству (4.5).

Комбинированное применение стратегий принуждения и побуждения (которые по отдельности являются лишь «частичными») может быть параллельным или последовательным. Параллельное (одновременное) применение принуждения и побуждения приводит к спецификации множества L-равновесий в виде

$LO(G) = \{(q, p, u) \in Q \times P^{U(q)} \times R(q,p): J_L(\pi(q, p, u)) \ge \gamma_L \}$,

где максимальный гарантированный выигрыш Ведущего

$\gamma_L = \sup \quad \inf \quad J_L(\pi(s,r,z))$.

$$(s,r) \in Q \times P^{U(s)} \quad z \in R(s,r)$$

В частности, LO(G) содержит множества $SO_L(G)$, $GO_L(G)$.

При последовательном применении методов управления полученные гарантированные результаты Ведущего (4.4) и (4.6) (или их аналоги – выигрыши в равновесии по Штакельбергу) дополнительно максимизируются по p и q соответственно, что приводит к значениям

$$\gamma_L^{\,imp\,/\,comp} = \sup_{0 \le p^+ \le 1} \gamma_L^{\,comp}(p)\,, \tag{4.7}$$

$$\gamma_L^{\,comp\,/\,imp} = \sup_{0 \le q \le 1} \gamma_L^{\,imp}(q)\,. \tag{4.8}$$

Заметим, что при вычислении выигрыша (4.7) достаточно брать супремум по p^+ , поскольку значение (4.4) достигается только при $u \in U_L$.

Учет интересов обоих игроков возможен, во-первых, посредством использования γ -ядра

$$C_\gamma = \{(q, p, u) \in PO(G) : J_L(\pi(q, p, u)) \ge \gamma_L\,,\ J_F(\pi(q, p, u)) \ge \gamma_F\,\}\,.$$

Во-вторых, можно использовать множество равновесий убеждения

$$\mathrm{Conv} = \{(q, p, u) \in Q \times P^{U(q)} \times U(q) : (J_L + J_F)(\pi(q, p, u)) =$$

$$= \sup_{(s,r,z) \in Q \times P^{U(s)} \times U(s)} (J_L + J_F)(\pi(s,r,z))\}\,. \tag{4.9}$$

Стратегия убеждения подразумевает добровольную кооперацию игроков, совместно максимизирующих суммарную функцию выигрыша их коалиции. Полученный максимальный результат распределяется затем между игроками в соответствии с некоторым принципом оптимальности для кооперативных игр. Очевидно, множество (4.9) при кооперативном выборе стратегий игроков всегда непусто.

Заключение. Иерархическая теоретико-игровая модель, равновесия которой соответствуют различным методам управления, представляется адекватной формализацией проблемы устойчивого развития, решение которой означает согласование экономических интересов действующих субъектов с экологическими требованиями. Предложенный подход допускает развитие для более широкого класса объектов управления [7]. Большой интерес представляет изучение динамической версии модели, в том числе нахождение ее решений с помощью совместного использования методов оптимизации и имитации, а также исследование игр с несколькими участниками.

Приложение.

Пример 2. Рассмотрим упрощенную версию модели (4.1), удовлетворяющую предположениям А1-А4:

$J_L = c_L\, p(u) \sqrt{u} - M\rho(u,U_L) \to \max,\ 0 \le q \le 1;\ 0 \le p(u) \le 1;$

$J_F = c_F\,(1 - p(u)) \sqrt{u} \to \max,\ 0 \le u \le 1 - q;\ U_L = [0,a],\ 0 \le a \le 1.$

Здесь $c_L\sqrt{u}$, $c_F\sqrt{u}$ – функции доходов Ведущего и Ведомого соответственно ($c_L > 0$, $c_F > 0$); $p(u)$ – изъятие части дохода Ведомого в пользу Ведущего. Имеем

$$R(q,p) = \operatorname{Arg} \sup_{0 \le u \le 1-q} (1 - p(u)) \sqrt{u},$$

$$\gamma_L^{comp}(p) = \sup_{0 \le s \le 1} \inf_{z \in R(s,p)} [c_L\, p(z) \sqrt{z} - M\rho(z,U_L)]$$

Замечание 1. При $p(z) \equiv 1$ имеем $J_F \equiv 0$, поэтому Ведомый может выбрать любое значение $u \in [0,1\text{-}q]$ и $\gamma_L^{comp}(1) = 0$. В противном случае

$$\gamma_L^{comp}(p) = \sup_{0 \le s \le 1} [c_L\, p(1-s)\sqrt{(1-s)} - M\rho(1-s, U_L)] = c_L\, p(a) \sqrt{a}$$

при $s^* = 1\text{-}a$, $u^* = a$. Между тем $S_L^{comp} = c_L\sqrt{a}$, поскольку даже при $p\equiv 1$ Ведомый благожелательно выбирает $u=a$. Поэтому концепция равновесия по Гермейеру представляется более реалистичной, чем концепция равновесия по Штакельбергу.

В случае $p\equiv 0$ получаем $\gamma_L^{comp}(0) = 0$, что соответствует бескорыстному Ведущему, единственной целью которого является обеспечение устойчивого развития. В случае побуждения

$$\gamma_L^{imp}(q) = \sup_{p\in P^{U(q)}} \inf_{z\in R(q,p)} [c_L\, p(z) \sqrt{z} - M\rho(z,U_L)] = (1\text{-}\varepsilon)\, c_L\sqrt{a},$$

$$p^*(z) = \begin{cases} 1-\varepsilon, & z \le a \\ 1, & z > a. \end{cases} \quad \text{откуда } z^* = a.$$

Замечание 2. При $1\text{-}q \le a$ угроза $p=1$ является излишней, поскольку Ведомому всегда выгодно выбирать $z = 1\text{-}q$. При $1\text{-}q > a$ угроза $p=1$ является существенной частью механизма управления, но имеет виртуальный характер (см.Замечание 1).

При параллельном комбинированном управлении Ведущего

$$\gamma_L = \sup_{(s,p)\in Q \times P^{U(q)}} \inf_{z\in R(s,p)} [c_L\, p(z) \sqrt{z} - M\rho(z,U_L)] = (1\text{-}\varepsilon)\, c_L\sqrt{a}$$

при $s^*=1\text{-}a$, $p^*(z) \equiv 1 - \varepsilon$, $z^*=a$.

Улучшить этот результат можно за счет манипуляции, когда Ведущий объявляет механизм управления как в случае побуждения, а после ответа Ведомого $z^*=a$ выбирает на самом деле $p=1$, что дает $\gamma_L = c_L\sqrt{a}$.

Последовательное комбинированное управление дает

$$\gamma_L^{imp/comp} = \sup_{0\le p^+ \le 1} \gamma_L^{comp}(p) = c_L\sqrt{a}$$

при $p^+ = 1$. Таким образом, при отсутствии затрат на преодоление контригры Ведомого Ведущий может произвести полное изъятие дохода Ведомого в свою пользу. Поскольку γ_L^{imp} не зависит от p, то $\gamma_L^{comp/imp} = \gamma_L^{imp}$.

Переход к убеждению дает максимальный суммарный выигрыш коалиции Ведущего и Ведомого

$$(J_L+J_F)^{conv} = \sup_{s\in Q}\ \sup_{r\in P^{U(q)}}\ \sup_{z\in U(s)} \{[(c_L - c_F)p(z) + c_F]\sqrt{z} - M\rho(z,U_L)\} =$$

$$= \begin{cases} c_L\sqrt{a},\ c_L > c_F\ (q^* \le 1-a,\ p^*\equiv 1,\ u^*=a), \\ c_F\sqrt{a},\ c_L \le c_F\ (q^* \le 1-a,\ p^*\equiv 0,\ u^*=a), \end{cases}$$

который подлежит кооперативному распределению между игроками. Поскольку естественно считать, что для характеристической функции кооперативной игры $v(L,F)=(J_L+J_F)^{conv}$, $v(L) = \gamma_L$, $v(F)$ есть выигрыш Ведомого при стратегии Ведущего, обеспечивающей выигрыш γ_L, то получаем однозначное распределение

$$x_L = \begin{cases} (1-\varepsilon)c_L\sqrt{a},\ c_L > c_F, \\ (1-\varepsilon)c_F\sqrt{a},\ c_L \le c_F, \end{cases} \qquad x_F = \begin{cases} \varepsilon c_L\sqrt{a},\ c_L > c_F, \\ \varepsilon c_F\sqrt{a},\ c_L \le c_F. \end{cases}$$

Поскольку $\gamma_F = 0$, $PO(G) = \{(q,p,u): (J_L+J_F)(q,p,u) = c_L\sqrt{a}\}$, то $C_\gamma = \{(c_L\sqrt{a},0)\}$.

Пример 3. Учет затрат Ведущего на преодоление контригры Ведомого с учетом предположений А1-А4 приводит к модели

$$J_L = c_L\, p(u)\sqrt{u} - [q + p(u)]/[(1-q)(1-p(u))] - M\rho(u,U_L) \to \max,$$

$$0 \le q \le 1;\ 0 \le p(u) \le 1;$$

$$J_F = c_F\,(1-p(u))\sqrt{u} \to \max,\ 0 \le u \le 1 - q;\ U_L = [0,a],\ 0 \le a \le 1.$$

Имеем при принуждении

$$\gamma_L^{comp}(p) = \sup_{0\le s\le 1}\ \inf_{z\in R(s,p)} [c_L\, p(z)\sqrt{z} - [s+p(z)/[(1-s)(1-p(z))]-M\rho(z,U_L)] =$$

$$= \sup\ [c_L\, p(1-s)\sqrt{(1-s)} - [s+p(1-s)]/[(1-s)(1-p(1-s))] - M\rho(1-s,U_L)] =$$

$$= \sup_{1-a\le s\le 1} [c_L\, p(1-s)\sqrt{(1-s)} - [s+p(1-s)]/[(1-s)(1-p(1-s))] =$$

$$= c_L\, p(a)\sqrt{a} - [1 - a + p(a)]/[a(1 - p(a))]$$

при $s^*=1-a$, $u^*=a$.

При p=0 получаем $\gamma_L^{comp}(0) = -(1-a)a < 0$, то есть бескорыстный Ведущий обеспечивает устойчивое развитие с постоянными затратами на преодоление контригры Ведомого.

В случае побуждения имеем

$$\gamma_L^{imp}(q) = \sup_{p\in P^{U(q)}} \inf_{z\in R(q,p)} [c_L\, p(z)\sqrt{z} - [q+p(z)]/[(1-q)(1-p(z))] - M\rho(z,U_L)] =$$

$$= c_L\sqrt{a}\,\{1 - \sqrt{(1+q)} / \sqrt{[(1-q)\, c_L\sqrt{a}]}\} - \sqrt{[(1-q^2)\, c_L\sqrt{a}]}/(1-q)$$

при $p^* = 1 - \sqrt{(1+q)} / \sqrt{[(1-q)\, c_L\sqrt{a}]}$, $u^*=a$.

При q=0 получим $\gamma_L^{imp}(0) = \sqrt{(c_L\sqrt{a})}\ \sqrt{(c_L\sqrt{a})} - 2)$. Это выражение неотрицательно при $c_L \ge 4a^{-1/2}$, то есть возможность получения дохода Ведущим зависит от жесткости экологических требований.

При параллельном комбинированном управлении

$$\gamma_L = \sup_{(s,p)\in QxP^{U(q)}} \inf_{z\in R(s,p)} [c_L\, p(z)\sqrt{z} - [s+p(z)]/[(1-s)(1-p(z))] - M\rho(z,U_L)].$$

Поскольку $\partial J_L/\partial s = -(1+p)/[(1-p)(1-s)^2] < 0$, то $s^*=0$, и регулирование осуществляется выбором механизма управления

$$p(z) = \begin{cases} p^*, & z \le a \\ 0, & z > a, \end{cases}$$

где $p^* = 1 - (c_L\sqrt{a})^{-1/2} > 0$ при $c_L\sqrt{a} > 1$ (это условие выполнить тем труднее, чем жестче экологические требования). Таким образом,

$\gamma_L = (c_L\sqrt{a} - 1)^2$.

Последовательная оптимизация дает $\gamma_L^{\,imp\,/\,comp} = c_L\sqrt{a} + 1/a - 2(a^{-1}(2-a)\, c_L\sqrt{a})^{1/2}$ при $p^+ = 1 - (2-a)^{1/2}(c_L a\sqrt{a})^{-1/2}$. Нахождение $\gamma_L^{\,comp\,/\,imp}$ требует численных расчетов.

Поскольку $\gamma_F = 0$, $PO(G) = \{(q,p,u)\colon (J_L+J_F)\,(q,p,u) = \gamma_L\}$, то $C_\gamma = \{((c_L\sqrt{a} - 1)^2\,,\, 0)\}$.

Выигрыш при убеждении равен

$$(J_L+J_F)^{conv} = \sup_{s\in Q}\ \sup_{r\in P^{U(q)}}\ \sup_{z\in U(s)}\{[(c_L-c_F)p(z)+c_F]\sqrt{z}-[s+p(z)]/[(1-s)(1-p(z))]-M\rho(z,U_L)\} =$$

$$= \begin{cases} c_F\sqrt{a}\,\{(c_L-c_F)(\sqrt{a})(\sqrt{a}(c_L-c_F)^{1/2}\}\{\sqrt{a}(c_L-c_F))\}^{-1/2} - (\sqrt{a}(c_L-c_F))^{1/2}\,, & c_L>c_F\,, \\ c_F\sqrt{a}\,, & c_L\le c_F\,. \end{cases}$$

Список литературы.

1.Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.

2.Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

3.Угольницкий Г.А. Теоретико-игровое моделирование некоторых способов иерархического управления // Изв.РАН. ТиСУ. 2002. №1.

4.Фатхутдинов Р., Сивкова Л. Принуждение, побуждение, убеждение: новый подход к методам управления // Управление персоналом. 1999. №2.

5.Угольницкий Г.А. Управление эколого-экономическими системами. М.: Вузовская книга, 1999.

6.Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982.

7.Угольницкий Г.А. Иерархическое управление устойчивым развитием социальных организаций // Общественные науки и современность. 2002. №3.

Таблица

x_L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_F(x_L)$	9	8	7	6	5	4или{1,3,…}	{2,4,…}	{1,3,…}	{2,4,…}	{1,3,…}
J_L	1	2	3	4	5	6 или 0	0	0	0	0