

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ РОМБОВИДНОЙ СТРУКТУРЫ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ РЕЧНЫХ ВОД

Угольницкий Г.А., Усов А.Б.

(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)
ougoln@math.rsu.ru, usov@math.rsu.ru

Предложены динамически устойчивые принципы оптимальности для ромбовидных структур управления. Изучены стационарный и динамический, коалиционный и бескоалиционный случаи. Разработаны алгоритмы построения равновесий, рассмотрены примеры, проведен анализ полученных в ходе имитации результатов, сделаны выводы о преимуществах и недостатках коалиционного случая.

Ключевые слова: методы иерархического управления, эколого-экономическая система, равновесие, устойчивое развитие.

Введение

Наряду с двух- и трехуровневыми иерархическими системами веерного типа [1-12] на практике часто встречаются системы управления ромбовидной структуры [2,5], простейшая из которых включает в себя:

- источник воздействия верхнего уровня (федеральный центр ФЦ);
- несколько источников воздействия среднего уровня, например, органы регионального (ОРУ) и отраслевого (ООУ) управления;
- источник воздействия нижнего уровня (промышленные предприятия ПП);
- управляемую динамическую систему (УДС).

Общая схема трехуровневой ромбовидной системы изображена на рис.1.

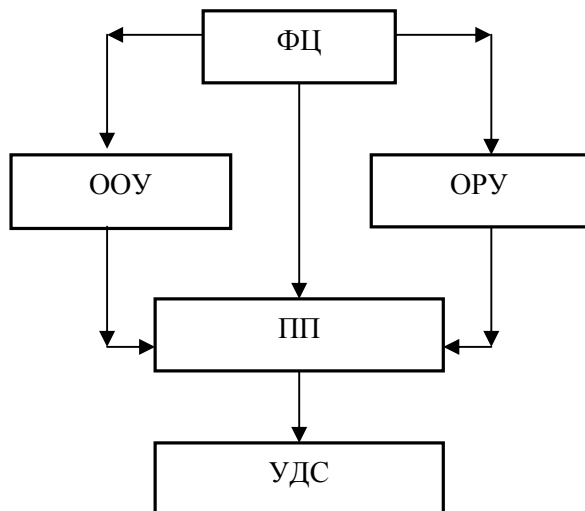


Рис 1. Трехуровневая ромбовидная система управления

Взаимоотношения внутри такой иерархической системы устроены следующим образом: ФЦ воздействует на ОРУ и ООУ; ОРУ и ООУ независимы друг от друга и оба воздействуют на ПП; ПП воздействует на УДС. ФЦ, ООУ, ОРУ, ПП вместе можно рассматривать как совокупный источник воздействия на УДС, имеющий иерархическую структуру. ООУ определяют, например, величины платы за сброс ПП загрязнений в УДС, ОРУ – минимально допустимые степени очистки сточных вод на ПП. ФЦ решает, какая доля получаемых от ПП средств остается в распоряжении ООУ и ОРУ. Главной целью ФЦ является поддержание УДС в устойчивом состоянии, помимо этого он стремится к максимизации остающихся в его распоряжении средств.

Предполагается, что принята следующая совокупность правил относительно поведения и информированности различных субъектов управления:

1) ФЦ выбирает свою стратегию поведения первым (делает ход первым) и сообщает ее всем остальным субъектам управле-

ния; при этом он максимизирует свою целевую функцию на множестве тех стратегий, которые позволяют поддерживать УДС в устойчивом состоянии.

2) ООУ и ОРУ выбирают свои стратегии поведения, когда выбор ФЦ уже известен; они могут как образовывать коалицию, так и действовать независимо друг от друга; в последнем случае их оптимизационные задачи решаются при наличии неопределенных факторов и они действуют на основе принципа гарантированного результата, считая, что ПП стремится к максимизации своей прибыли.

3) ПП делают ход последними при известных стратегиях всех остальных субъектов управления и стремятся к максимизации своих целевых функций.

Цель ФЦ, реализуя различные механизмы управления иерархическими системами, добиться выполнения стоящих перед ним целей, главной из которых является выполнение условий, поддерживающих систему в устойчивом состоянии.

В работе исследование трехуровневых ромбовидных структур проводится на примере системы контроля качества речных вод, предлагаются различные методы управления такими системами, позволяющие поддерживать речную систему в заданном состоянии, приведены алгоритмы построения равновесий в различных случаях, примеры аналитических и численных расчетов.

1. Стационарный случай

В этом случае предполагается, что на всем рассматриваемом промежутке времени субъекты управления не меняют свои стратегии поведения, и концентрации загрязняющих веществ в речной системе также не претерпевают изменений.

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вдоль реки расположено N предприятий, которые сбрасывают загрязняющие вещества (ЗВ) в реку вместе со сточными водами. Сбрасываемые ЗВ условно делятся на углерод- и

азотсодержащие. Для простоты в предлагаемой ниже модели платежи за водозабор и водосброс не принимаются во внимание, а платежи за сброс загрязнений учитываются в упрощенном виде.

Цель i -го ПП – максимизация своей прибыли, то есть

$$(1) \quad J_i = (1 - v_i) \left(R_i(\Phi_i) - VK_i - H_i(\Phi_i) - VS_i^c(W_i^c, P_i^c) - VS_i^n(W_i^n, P_i^n) \right) - F_i^c(T_i^c)(1 - P_i^c)W_i^c - F_i^n(T_i^n)(1 - P_i^n)W_i^n \rightarrow \max(P_i^{c,n}),$$

$i = 1, \dots, N$.

Здесь, следуя [12], $T_i^m(F_i^m(T_i^m))$ – размер (функция) платы за единицу сброшенных углерод- и азотсодержащих ($m = c$ и $m = n$ соответственно) ЗВ на i -м предприятии; W_i^m и $(1 - P_i^m)W_i^m$ – количество ЗВ, сбрасываемых в реку i -м предприятием до и после очистки сточной воды ($m = n, c$); P_i^m доля углерод- и азотсодержащих ($m = c$ и $m = n$ соответственно) ЗВ, удаляемых на i -м предприятии в процессе очистки сточных вод; v_i – ставка налога на прибыль на i -м предприятии; $R_i(\Phi_i)$ – доход i -го предприятия от реализации произведенной продукции при величине производственных фондов Φ_i (они предполагаются постоянными и заданными); $VK_i(\Phi_i)$ – включаемые в себестоимость издержки основного производства; $H_i(\Phi_i)$ – суммарная заработная плата основного и природоохранного производств; $VS_i^m(W_i^m, P_i^m)$ – издержки природоохранной деятельности, зависящие от объема сбрасываемых загрязнений и степени очистки сточных вод.

Функции $F_i^m(T_i^m)$ ($m = n, c$) отражают плату за единицу углерод- и азотсодержащих ЗВ при сбросе как в установленных пределах, так и сверхнормативном и сверхлимитном сбросах загрязнений.

Функции VK_i и H_i зависят от объема производства, т.е. от величины производственных фондов. Функция $VS_i^m(W_i^m, P_i^m)$ ($m = n, c$) отражает затраты i -го предприятия на очистку сточных вод. Предполагается, что выполнены следующие соотношения:

$$VK_i(\Phi_i) + H(\Phi_i) = \mu_i R_i(\Phi_i); \quad \mu_i = \text{const};$$

$$VS_i^m(W_i^m, P_i^m) = W_i^m C_p^m(P_i^m); m = n, c,$$

где $C_p^m(P_i^m)$ – функции затрат i -го предприятия на очистку единицы сбрасываемых в водоток загрязнений от азот- и углерод-содержащих ЗВ.

Деятельность ПП контролируется ОРУ и ООУ, которые стремятся к максимизации поступающих к ним средств.

ОРУ назначают размер платы за единицы сброшенных загрязнений, их целевая функция имеет вид

$$(2) \quad J_y = -C_y(y_c, y_n) + \sum_{i=1}^N (H_i^c F_i^c(T_i^c)(1-P_i^c)W_i^c + H_i^n F_i^n(T_i^n)(1-P_i^n)W_i^n) \rightarrow \max \left(\{T_i^c, T_i^n\}_{i=1}^N \right),$$

$$y_m = \sum_{i=1}^N [1-P_i^m]W_i^m; m = n, c.$$

где C_y – функция затрат ОРУ на улучшение качества речной воды; $H_i^{c,n}$ – доля платы ПП за сброс загрязнений в водоток, поступающая к ОРУ.

ООУ назначают минимально допустимые степени очистки сточных вод на предприятиях, их целевая функция имеет вид

$$(3) \quad J_o = -C_o(y_c, y_n) + \sum_{i=1}^N (G_i^c F_i^c(T_i^c)(1-P_i^c)W_i^c + G_i^n F_i^n(T_i^n)(1-P_i^n)W_i^n) \rightarrow \max \left(\{q_i^c, q_i^n\}_{i=1}^N \right),$$

где $q_i^{c,n}$ – минимально допустимые степени очистки сточных вод на i -м предприятии; C_o – функция затрат ООУ на улучшение качества речной воды; $G_i^{c,n}$ – доля платы ПП за сброс загрязнений в водоток, поступающая к ООУ.

Целевая функция ФЦ имеет вид

$$(4) \quad J_\phi = -C_\phi(y_c, y_n) + \sum_{i=1}^N \left\{ (R_i - VK_i - H_i - VS_i^c - VS_i^n) \cdot (1-v_i) + (1-H_i^c - G_i^c) F_i^c(T_i^c)(1-P_i^c)W_i^c + (1-H_i^n - G_i^n) F_i^n(T_i^n)(1-P_i^n)W_i^n \right\} \rightarrow \max \left(\{H_i^c, H_i^n, G_i^c, G_i^n\}_{i=1}^N \right),$$

где C_ϕ – функция затрат ФЦ на очистку речной воды.

Заметим, что функции C_ϕ , C_O , C_y можно трактовать следующим образом: в этих функциях, например, отражаются материальные потери общества (ФЦ, ООУ, ОРУ) из-за загрязненной воды (затраты на устройство новых мест отдыха в других регионах, дополнительные расходы по очистке речной воды для потребительских нужд населения и т.п.).

Пусть общее количество сбрасываемых ЗВ (до очистки) линейно зависит от количества произведенной на предприятиях продукции:

(5) $W_i^c = \beta_i^c R_i(\Phi_i)$; $W_i^n = \beta_i^n R_i(\Phi_i)$; $i=1,2,\dots,N$; $\beta_i^c, \beta_i^n = const$,
а производственные функции предприятий имеют вид [5]

$$R_i(\Phi_i) = \gamma_i \Phi_i^{0.5}; \quad i=1,2,\dots,N; \quad \gamma_i = const.$$

В качестве основных характеристик качества речной воды берутся концентрации углеродного и азотного биохимического потребления кислорода B^c , B^n и концентрация растворенного в воде кислорода B^{O_2} , которые считаются постоянными величинами и находятся, например, по формулам

$$(6) \quad B^m = B_0^m \exp(-K_m) + C^m W(1-P); \quad B_0^m, C^m, K_m = const;$$

$$B^{O_2} = B_0^{O_2} \exp(-K_{O_2}) - K_c B^c - K_n B^n; \quad B_0^{O_2}, K_{O_2} = const$$

где K_c , K_n – коэффициенты убыли кислорода, вызванной его потреблением из-за углеродного и азотного биохимического распада.

Оптимизационные задачи (1)-(6) решаются при следующих ограничениях на управления

$$(7) \quad q_i^c \leq P_i^c \leq 1 - \varepsilon; \quad q_i^n \leq P_i^n \leq 1 - \varepsilon;$$

$$(8) \quad 0 \leq T_i^c \leq T_{\max}; \quad 0 \leq T_i^n \leq T_{\max}; \quad 0 \leq q_i^c \leq 1 - \varepsilon; \quad 0 \leq q_i^n \leq 1 - \varepsilon;$$

$$(9) \quad 0 \leq H_i^c \leq 1; \quad 0 \leq H_i^n \leq 1; \quad 0 \leq G_i^c \leq 1; \quad 0 \leq G_i^n \leq 1$$

с известными стандартами на концентрации загрязняющих веществ в водотоке, на концентрацию растворенного в воде кислорода

$$(10) \quad 0 \leq B^c \leq B_{\max}^c; \quad 0 \leq B^n \leq B_{\max}^n; \quad B_{\min}^{O_2} \leq B^{O_2}$$

и качество сточной воды, сбрасываемой в водоток

$$(11) \quad \sum_{i=1}^N \frac{W_i^n [1-P_i^n] + W_i^c [1-P_i^c]}{Q_i^0} \leq Q_{\max},$$

где Q_i^0 – расход воды на i -м промышленном предприятии; величины $B_{\max}^{c,n}$, $B_{\min}^{O_2}$, Q_{\max} , T_{\max} заданы; $0 < \varepsilon < 1$ – постоянная, определяемая технологическими возможностями очистки сточных вод на предприятиях.

Считается, что задача поставлена корректно, то есть ФЦ имеет в своих руках достаточные экономические рычаги воздействия на ООУ и ОРУ, т.е. величины $H_i^c = G_i^c = H_i^n = G_i^n = 1$ делают для остальных субъектов управления экономически выгодными стратегии, позволяющие поддерживать систему в устойчивом состоянии.

Исследуется модель, описываемая системой уравнений и неравенств (1)-(11). Рассматривается два случая. В первом – субъекты управления среднего уровня кооперируются и действуют в составе коалиции, во втором – независимо друг от друга.

1.2. СЛУЧАЙ КОАЛИЦИИ ОРУ И ООУ

Вместо критериев (2), (3) субъекты управления среднего уровня в этом случае имеют один критерий вида

$$(12) \quad J_y = -C_y - C_o + \sum_{i=1}^N \left((G_i^c + H_i^c) F_i^c(T_i^c)(1-P_i^c) W_i^c + (H_i^n + G_i^n) F_i^n(T_i^n)(1-P_i^n) W_i^n \right) \rightarrow \max \left(\left\{ T_i^c, T_i^n, q_i^c, q_i^n \right\}_{i=1}^N \right).$$

Итак, решается задача (1), (4)-(12). В этом случае алгоритм построения равновесия состоит в следующем:

1) В результате минимизации критериев (1) с ограничениями (7) определяются оптимальные стратегии ПП в зависимости от управлений ООУ и ОРУ: $(P_i^c)^*(q_i^c, T_i^c)$; $(P_i^n)^*(q_i^n, T_i^n)$; $i = 1, \dots, N$.

2) Найденные в пункте 1 алгоритма оптимальные стратегии ПП подставляются в (12). После этого осуществляется максимизация критерия (12) по величинам $\{q_i^m, T_i^m\}_{i=1}^N$ ($m=n, c$) с ограни-

чениями (8). В результате определяются оптимальные управления ООУ и ОРУ в зависимости от стратегии ФЦ:

$$(q_i^c, T_i^m)^*(H_i^c); (q_i^n, T_i^m)^*(H_i^n).$$

3) Рассматривается критерий (4), в который подставляются найденные на предыдущих шагах алгоритма функции. Оптимальными для ФЦ являются величины, приносящие ему максимальный доход при выполненных условиях (10), (11). Обозначим их через $(H_i^{c,n})^*$, $(G_i^{c,n})^*$.

4) Равновесие принуждения определим, как набор величин

$$\left\{ (H_i^c)^*, (H_i^n)^*; (G_i^c)^*, (G_i^n)^*; (q_i^c)_*, (q_i^n)_*; \right. \\ \left. (T_i^c)_*, (T_i^n)_*; (P_i^c)_*, (P_i^n)_* \right\}_{i=1}^N,$$

где

$$(q_i^c)_* = (q_i^c)^* ((H_i^c)^*); (q_i^n)_* = (q_i^n)^* ((H_i^n)^*); (T_i^c)_* = (T_i^c)^* ((H_i^c)^*); \\ (T_i^n)_* = (T_i^n)^* ((H_i^n)^*); (P_i^c)_* = (P_i^c)^* ((q_i^c)_*, (T_i^c)_*, (G_i^c)^*, (H_i^c)^*); \\ (P_i^n)_* = (P_i^n)^* ((q_i^n)_*, (T_i^n)_*, (G_i^n)^*, (H_i^n)^*).$$

1.3. СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ КОАЛИЦИИ

В этом случае решается задача (1)-(11). Причем при рассмотрении субъектов управления среднего уровня получается двухкритериальная задача, которая исследуется на основе принципа гарантированного результата.

Алгоритм построения равновесия состоит в следующем:

1) В результате минимизации критериев (1) с ограничениями (7) определяются оптимальные стратегии ПП в зависимости от управлений ООУ и ОРУ

$$(P_i^c)^*(q_i^c, T_i^c); (P_i^n)^*(q_i^n, T_i^n); i = 1, \dots, N.$$

2) Найденные в пункте 1 алгоритма оптимальные стратегии ПП подставляются в (2), (3). После этого проводится максимизация критерия (2) с ограничениями (8) по величинам $\{q_i^m\}_{i=1}^N$, а критерия (3) с (8) по $\{T_i^m\}_{i=1}^N$ ($m=n, c$). Решается двухкритериальная задача. Ее решение проводится на основе принципа гарантированного результата. В итоге определяются оптимальные управления ОУ и РУ в зависимости от стратегии ФЦ $(q_i^c)_* (H_i^c, G_i^c); (T_i^m)_* (H_i^n, G_i^n)$.

3) Рассматривается критерий (4), в который подставляются найденные на предыдущих шагах алгоритма функции. Оптимальными для ФЦ являются величины, приносящие ему максимальный доход при выполненных условиях (10), (11).

4) Равновесие принуждения определим, как набор величин

$$\left\{ (H_i^c)^*, (H_i^n)^*; (G_i^c)^*, (G_i^n)^*; (q_i^c)^*, (q_i^n)^*; \right. \\ \left. (T_i^c)^*, (T_i^n)^*; (P_i^c)^*, (P_i^n)^* \right\}_{i=1}^N,$$

где

$$\begin{aligned} (q_i^c)^* &= (q_i^c)^*((H_i^c)^*, (G_i^c)^*); & (q_i^n)^* &= (q_i^n)^*((H_i^n)^*, (G_i^n)^*); \\ (T_i^c)^* &= (T_i^c)^*((H_i^c)^*, (G_i^c)^*); & (T_i^n)^* &= (T_i^n)^*((H_i^n)^*, (G_i^n)^*); \\ (P_i^c)^* &= (P_i^c)^*((q_i^c)^*, (T_i^c)^*, (H_i^c)^*, (G_i^c)^*); \\ (P_i^n)^* &= (P_i^n)^*((q_i^n)^*, (T_i^n)^*, (H_i^n)^*, (G_i^n)^*). \end{aligned}$$

1.4. МОДЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ

Рассмотрим случай одного ПП и только азотсодержащих загрязняющих веществ. Кроме того, пусть

$$(13) \quad C_0(y) = A_0 y; \quad C_y(y) = A_1 y; \quad C_\phi(y) = A_2 y;$$

$$C_p^c(Y) = D \frac{Y}{1-Y}; \quad F^c(T) = A_3 T; \quad D, A_k = \text{const}; \quad k=0,1,2,3.$$

$$\varepsilon < \frac{1}{10} \sqrt{\frac{D}{(F^c(T_{\max}))^3}}; \quad D < F^c(T_{\max}).$$

$$\text{Обозначим } P_0 = 1 - \sqrt{\frac{D}{F^c(T_{\max})}}.$$

Если $F^c(T_{\max}) > A_0 + A_1 + A_2 + 0.1$ и стандарты качества выполнены при $P \leq P_0$, то оптимальные стратегии всех субъектов управления в коалиционном случае определяются формулами

$$(14) \quad q^* = 0; \quad T^* = T_{\max}; \quad H^* + G^* = \frac{A_0 + A_1}{A_3 T^*} + \varepsilon_1; \quad P^* = P_0.$$

В противных случаях

$$(15) \quad q^* = 1 - \varepsilon; \quad T^* = T_{\max}; \quad H^* + G^* = \varepsilon_1; \quad P^* = q^*.$$

Здесь ε_1 – произвольное сколь угодно малое положительное число.

В бескоалиционном случае получим, что

$$(16) \quad q^* = 1 - \varepsilon; G^* = 0; H^* = \varepsilon_1; T^* = T_{\max}.$$

В случае входных функций общего вида равновесия находятся путем имитационного моделирования.

Пример 1 (коалиция). Для следующего набора входных данных (у.е. – стоимость в условных единицах; сут – сутки; м – метр; мг – миллиграмм; л – литр):

$$\begin{aligned} N = 1; v_1 = 0.24; \mu_1 = 0.5; D = 16; T_{\max} = 100 \text{ у.е.}; B^c_o = 7 \text{ мг/л}; \\ \Phi_1 = 10^{10}; A_3 = 0.5; A_0 = 10 \text{ (сут. у.е.)}/\text{мг}; A_1 = 5 \text{ (сут. у.е.)}/\text{мг}; \\ A_2 = 0.5 \text{ (сут. у.е.)}/\text{мг}; \beta_1 = 0.003 \text{ мг}/(\text{сут. у.е.}); Q_{\max} = 0.4; \\ Q_1^0 = 10^6 \text{ м}^3/\text{сут.}; C^c = 0.1 \text{ сут.}/\text{л}; \gamma_1 = 0.2 \text{ у.е.}; K_{O_2} = 0.02 \text{ сут.}^{-1}; \\ B_{\max} = 14 \text{ мг/л}; \varepsilon_1 = 0.001; B_{\min}^{O_2} = 4 \text{ мг/л}; B^{O_2} = 7 \text{ мг/л}; \\ K_c = 0.02 \text{ сут.}^{-1}; \varepsilon = 0.001. \end{aligned}$$

Оптимальные стратегии субъектов управления определяются формулами (14).

Пример 2 (коалиция). В случае входных данных примера 1 и $C^c = 0.3$ сут./л оптимальные стратегии субъектов управления определяются формулами (15).

Пример 3 (коалиция). Формулы (15) верны и в случае входных данных примера 1 и $A_0 = 100$ (сут. у.е.)/мг.

В бескоалиционном случае для примеров 1-3 равновесия определяются формулами (16).

В таблице 1 приведены значения доходов (в условных единицах) ФЦ (J_Φ), ОРУ (J_y), ООУ (J_o) и ПП (J_1) в коалиционном (kl) и бескоалиционном (nkl) случаях для стационарной задачи и входных данных примеров 1-3.

Таблица 1. Сравнение коалиционного и бескоалиционного случаев в стационарной задаче

№	kl			nkl			
	J_Φ	$J_o + J_y$	J_1	J_Φ	J_o	J_y	J_1
1	1169	1.7	397562	3.0	-0.297	-0.6	-59143

2	2.97	-0.9	-559143	3.0	-0.297	-0.6	-59143
3	2.97	-6.28	-559143	3.0	-5.677	-0.6	-59143

2. Динамический случай

Предполагается, что на рассматриваемом промежутке времени субъекты управления меняют свои стратегии поведения как минимум один раз.

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целевые функции субъектов управления принимают вид:
 - промышленных предприятий (ПП) ($i=1, 2, \dots, N$):

$$(17) \quad J_i = \int_0^{\Delta} \left[(1-v_i) (R_i - VK - H_i - VS_i^c(W_i^c, P_i^c) - VS_i^n(W_i^n, P_i^n)) - F_i^c(T_i^c)(1-P_i^c)W_i^c - F_i^n(T_i^n)(1-P_i^n)W_i^n \right] dt \rightarrow \max(P_i^c, P_i^n).$$

- органов отраслевого управления (ООУ)

$$(18) \quad J_o = \int_0^{\Delta} \left[-C_o(y_c(t), y_n(t)) + \sum_{i=1}^N (G_i^c(t) F_i^c(T_i^c)(1-P_i^c)W_i^c + G_i^n(t) F_i^n(T_i^n(t))(1-P_i^n(t))W_i^n(t)) \right] dt \rightarrow \max \left(\{q_i^c, q_i^n\}_{i=1}^N \right).$$

- органов регионального управления (ОРУ)

$$(19) \quad J_y = \int_0^{\Delta} \left[-C_y(y_c(t), y_n(t)) + \sum_{i=1}^N (H_i^c(t) F_i^c(T_i^c)(1-P_i^c)W_i^c + H_i^n(t) F_i^n(T_i^n(t))(1-P_i^n(t))W_i^n(t)) \right] dt \rightarrow \max \left(\{T_i^c, T_i^n\}_{i=1}^N \right).$$

- федерального центра (ФЦ)

$$(20) \quad J_{\phi} = \int_0^{\Delta} \left[-C_{\phi} + \sum_{i=1}^N \left\{ (1-v_i) (R_i - VK_i - H_i - VS_i^c - VS_i^n) + (1-H_i^c - G_i^c) F_i^c(T_i^c)(1-P_i^c)W_i^c + (1-H_i^n - G_i^n) F_i^n(T_i^n)(1-P_i^n)W_i^n \right\} \right] dt \rightarrow \max \left(\{H_i^c, H_i^n, G_i^c, G_i^n\}_{i=1}^N \right).$$

Здесь сохранены обозначения предыдущего пункта. Все входящие в (17)-(20) функции зависят от временной координаты t ; Δ – момент времени, до которого ведется рассмотрение.

Динамика изменения производственных фондов i -го промышленного предприятия описывается обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$(21) \quad \frac{d\Phi_i}{dt} = -k_i\Phi_i + Y_i; \quad i=1,2,\dots,N,$$

где k_i – коэффициент амортизации производственных фондов; Y_i – инвестиции, задаваемые формулой

$$(22) \quad Y_i = z_i R_i(\Phi_i) - C_p^n (P_i^n) W_i^n - F_i^c (T_i^c) (1 - P_i^c) W_i^c -$$

$$C_p^c (P_i^c) W_i^c - F_i^n (T_i^n) (1 - P_i^n) W_i^n - \alpha_i; \quad i=1,2,\dots,N; \quad \alpha_i = const.$$

Изменение концентраций углеродного и азотного биохимического потребления кислорода $B^c(x, y, t)$, $B^n(x, y, t)$ и концентрация растворенного в воде кислорода $B^{O_2}(x, y, t)$ описываются нелинейными уравнениями переноса, которые в случае пространственной неоднородности по двум направлениям имеют следующий вид.

- уравнения изменения концентраций углеродного ($m = c$) и азотного ($m = n$) биохимического потребления кислорода:

$$(23) \quad \frac{\partial B^m}{\partial t} + v_x \frac{\partial B^m}{\partial x} + v_y \frac{\partial B^m}{\partial y} = \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial B^m}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[EA \frac{\partial B^m}{\partial y} \right] \right] - K_m B^m + \frac{W^m (1 - P^m)}{A};$$

- уравнение изменения концентрации растворенного в воде кислорода:

$$(24) \quad \frac{\partial B^{O_2}}{\partial t} + v_x \frac{\partial B^{O_2}}{\partial x} + v_y \frac{\partial B^{O_2}}{\partial y} =$$

$$\frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial B^{O_2}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[EA \frac{\partial B^{O_2}}{\partial y} \right] \right] + K_{O_2} [B_{нас}^{O_2} - B^{O_2}] -$$

$$-F_1(x, y, t) - F_2(x, y, t) - K_n(B^n) - K_c(B^c) + F_0(x, y, t),$$

где x, y – пространственные координаты; координата x отсчитывается вдоль русла реки, y – в глубину; $0 \leq x \leq L$; $0 \leq y \leq H$; L, H – длина и глубина реки соответственно; точки $(x, y) = (x_i, y_i)$ соответствуют местоположению предприятий ($i = 1, 2, \dots, N$); E – коэффициент дисперсии; A – площадь поперечного сечения реки; Q – расход воды в реке; $V = (v_x, v_y)$ – скорость воды в реке; K_c, K_n – коэффициенты убыли кислорода, вызванной его потреблением из-за углеродного и азотного биохимического распада; $K_{O_2}(B_{нас}^{O_2} - B^{O_2})$ – добавка растворенного кислорода вследствие реэрации; $B_{нас}^{O_2}$ – концентрация насыщения кислорода; F_0 – добавка вследствие фотосинтеза, F_1 – потребление растворенного кислорода на дыхание; F_2 – придонное потребление растворенного кислорода.

Функции W^c, W^n, P^c, P^n зависят от интенсивности источников загрязняющих веществ. Если в точке пространства расположено предприятие, то есть $(x, y) = (x_i, y_i)$ для некоторого значения $i = 1, 2, \dots, N$, то

$$P^m(x, y, t) = P_i^m(t); \quad W^m(x, y, t) = W_i^m(t).$$

В противном случае эти функции равны нулю.

Уравнения (23), (24) рассматриваются с соответствующими начальными и граничными условиями. Вектор скорости частиц жидкости V предполагается известным. Стандарты качества речной и сточных вод имеют вид (10), (11) и должны выполняться для всех значений $0 \leq t \leq \Delta$.

В динамическом случае исследуется модель, описываемая системой уравнений и неравенств (17) – (24), (5) – (11). Алгоритмы построения равновесий подобны сформулированным в статическом случае. Критерий субъектов управления среднего звена в случае кооперации выписывается аналогично стацио-

нарному случаю. Предложенные принципы оптимальности ромбовидных систем управления являются динамически устойчивым [8] в том смысле, что они являются содержательными в любом текущем состоянии (в любой момент времени) вплоть до конца динамического процесса. Равновесия строятся путем имитационного моделирования.

2.2. МОДЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ

Рассмотрим, как и ранее, случай только углеродсодержащих загрязняющих веществ. Пусть субъекты управления меняют свои стратегии два раза за исследуемый интервал времени.

Пример 4. В случае (13) для следующего набора входных данных:

$N = 1$; $A_0 = 40$ (сут. у.е.)/мг; $A_1 = 60$ (сут. у.е.)/мг; $\alpha_i = 0$ у.е.; $A_2 = 30$ (сут. у.е.)/мг; $A_3 = 2$; $\nu_1 = 0.24$; $\mu_1 = 0.5$; $T_{\max} = 1000$ у.е.; $K_c = 0.01$ сут.⁻¹; $\beta^c_1 = 0.003$ мг/(сут. у.е.); $A = 100$ м²; $D^c = 5$; $Q_1^0 = 10^6$ м³/сут.; $E = 24000$ м²/сут.; $F_i = 0$ мг/(л сут.); $i = 0, 1, 2$; $L = 100$ м; $H = 10$ м; $B^{O_2}(0, x, y) = 10$ мг/л; $\nu_x = 0.1$ м/сек; $B^c(0, x, y) = 5$ мг/л; $x_1 = 20$ м; $y_1 = 0$ м; $\nu_y = 0$ м/сек; $\gamma_1 = 0.2$ у.е.; $k_1 = 0.001$ сут.⁻¹; $\Phi_0 = 10^{15}$; $\Delta = 365$ сут.; $K_{O_2} = 0.2$ сут.⁻¹; $\varepsilon = 0.01$; $Q_{\max} = 0.4$; $B_{\text{нас}}^{O_2} = 18$ мг/л; $B_{\max}^c = 14$ мг/л; $B_{\min}^{O_2} = 4$ мг/л;

при образовании коалиции ООУ и ОРУ равновесие имеет вид

$$(25) \quad q^* = 0.33; G^* + H^* = 0.34; T^* = T_{\max} = 1000 \text{ у.е.}; P^* = 0.77,$$

в бескоалиционном случае:

$$(26) \quad q^* = 0.99; G^* = 0; H^* = 0.01; T^* = 1000 \text{ у.е.}; P^* = 0.99.$$

Пример 5. В коалиционном случае для входных данных примера 4 и $\Phi_0 = 10^{20}$ получим, что

$$q^* = 0.99; G^* + H^* = 0.01; T^* = T_{\max} = 1000 \text{ у.е.}; P^* = 0.99.$$

В бескоалиционном случае верны формулы (26).

Пример 6. Для входных данных примера 4 и

$$\beta^c_1 = 0.06 \text{ мг/(сут. у.е.)}$$

оптимальные стратегии для коалиционного и бескоалиционного случаев определяются формулами (25), (26) соответственно.

Пример 7. В случае входных данных примера 4 и

$$A_1 = A_0 = 1 \text{ (сут. у.е.)}/\text{мг}$$

при образовании ООУ и ОРУ коалиции получим

$$q^* = 0.33; G^* + H^* = 0.01; T^* = T_{\max} = 1000 \text{ у.е.}; P^* = 0.77.$$

В бескоалиционном случае остаются верными формулы (26).

Пример 8. Для входных данных примера 4 и $D^c = 0.01$ равновесия в коалиционном и бескоалиционном случаях совпадают и определяются формулами (26).

Пример 9. Для входных данных примера 5 и

$$A_1 = A_0 = 10^{-5} \text{ (сут. у.е.)}/\text{мг}$$

добиться выполнения стандартов качества речных вод ФЦ не удастся в случае образования коалиции ООУ и ОРУ, в бескоалиционном случае верны формулы (26).

В таблице 2 указаны значения доходов (в условных единицах) ФЦ (J_ϕ), ОРУ (J_y), ООУ (J_o) и ПП (J_1) в коалиционном (kl) и бескоалиционном (nkl) случаях для динамической задачи и входных данных примеров 4-9.

Таблица 2. Сравнение коалиционного и бескоалиционного случаев в нестационарной задаче.

№	kl			nkl			
	J_ϕ	$J_o + J_y$	J_1	J_ϕ	J_y	J_o	J_1
4	1.13 10^7	$4.92 \cdot 10^6$	5.4 10^{10}	7.36 10^5	- 1.45 10^4	- 1.5 10^4	5.2 10^{10}
5	2.33 10^8	- 9.55 10^6	1.7 10^{13}	2.33 10^8	- 4.75 10^6	- 4.8 10^4	1.7 10^{13}
6	2.24 10^8	$1.00 \cdot 10^8$	1.5 10^{11}	1.47 10^7	- 2.98 10^5	- 3 10^5	1.3 10^{11}
7	1.69 10^7	$1.56 \cdot 10^5$	5.4 10^{10}	7.36 10^5	7177. 7	- 378	5.2 10^{10}
8	7.36 10^5	- $3.0 \cdot 10^4$	5.7 10^{10}	7.36 10^5	- 1.5 10^4	- 1.5 10^4	5.7 10^{10}
9	-	-	-	2.3 10^8	2.34 10^6	- 1.2	1.7 10^{13}

Заключение

Образование коалиции позволяет субъектам управления среднего уровня получить не меньший доход, чем в бескоалиционном случае, а в ряде примеров значительно его увеличить (примеры 1, 4, 6, 7). В коалиционном случае, как правило, наблюдается увеличение дохода и остальных субъектов управления. Ухудшение экологической ситуации приводит к уменьшению дохода всех субъектов управления.

Если ООУ не образуют коалиции с ОРУ, то для них в любом случае оптимальной является максимально допустимая степень очистки сточных вод на предприятиях. В большинстве случаев равновесие в бескоалиционном случае определяется по формулам (26).

Имеются стратегии, приносящие ООУ и ОРУ больший доход, чем те, которые строятся на основе принципа гарантированного результата.

Возможна ситуация, когда, образование ООУ и ОРУ коалиции не позволяет ФЦ добиться выполнения стандартов качества речных и сточных вод, в то время как в бескоалиционном случае они могут быть выполнены.

Таким образом, образование коалиции в силу неантагонистичного характера исследуемой игры часто выгодно не только для сторон, в нее входящих, но и для остальных субъектов управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. ВЕСЕЛОВ Г.Е. *Иерархическое управление многосвязными динамическими системами: синергетический подход*. Таганрог.: Изд-во ТРТУ. 2003. 72 с.
2. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. М.: Радио и связь, 1982. 144 с.

3. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с противоположными интересами*. М.: Наука, 1976.
4. ЗЕНКЕВИЧ Н.А., МАРЧЕНКО И.В. *Теоретико-игровые модели согласованного поведения* // Известия МАН ВШ. 2006. №3 (37). С. 162-171.
5. МОИСЕЕВ Н.Н. *Математические задачи системного анализа*. М.: Наука, 1981. 488 с.
6. НОВИКОВ Д.А. *Механизмы стимулирования в организационных структурах*. М.: ИПУ РАН. 2003.
7. НОВИКОВ Д.А. *Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем*. М.: ИПУ РАН. 2001. 118 с.
8. ПЕТРОСЯН Л.А., ДАНИЛОВ Н.Н. *Кооперативные дифференциальные игры и их приложения*. Томск.: Изд-во ТГУ. 1985.
9. ПЕТРОСЯН Л.А., ШИРЯЕВ В.Д. *Иерархические игры*. Изд-во Мордовск. ун-та. 1986. 92 с.
10. УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Управление эколого-экономическими системами*. М.: Вузовская книга, 1999. 132с.
11. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Структурная организация систем управления и методы управления* // Проблемы теории и практики управления. №2 2007. с. 33-39.
12. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Математическая формализация методов иерархического управления эколого-экономическими системами* // Проблемы управления. 2007. №4. с.64-69.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.В. Губко*