

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА И ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ ¹

Бойченко В.А., Курдюков А.П., Тимин В.Н.,
Чайковский М.М., Ядыкин И.Б.

(Институт проблем управления РАН, Москва)
akurd@ipu.ru, jad@ipu.ru

Представлен обзор ряда подходов к синтезу регуляторов заданной структуры и пониженного (заданного) порядка для линейных стационарных систем. Рассматриваются прямые (на основе редукции модели) и косвенные (на основе линейных матричных неравенств) методы построения регуляторов пониженного и заданного порядка, синтез регуляторов заданного порядка в задачах ковариационного управления, а также синтез регуляторов заданного порядка и заданной структуры на основе методов H_∞ оптимизации. Приводится численный пример.

Ключевые слова: линейная стационарная система, понижение порядка, синтез регулятора.

Введение

Несмотря на значительные достижения последних десятилетий в развитии различных направлений теории оптимального автоматического управления (H_2 , H_1 , H_∞ оптимизации), в настоящее время в промышленности наиболее популярными являются простые регуляторы (регуляторы низкого порядка с фиксированной структурой). При описании систем управления в пространстве состояний под порядком регулятора (объекта) понимается размерность вектора состояния регулятора (объекта). В системах с одним входом и одним выходом, описываемых передаточными функциями, порядком является степень знаменателя передаточной функции.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований №15 ЭММПУ РАН и Российского фонда фундаментальных исследований, грант 06-08-01468.

Объяснение популярности простых регуляторов можно найти, приняв в рассмотрение следующие соображения:

- простые регуляторы предпочтительнее сложных, так как они проще для понимания разработчиками и заказчиками с традиционным образованием по автоматическому регулированию,
- в них меньше деталей, которые могут выйти из строя,
- они менее требовательны к вычислительным ресурсам, и поэтому меньше вероятность появления программных ошибок.

По этим причинам желательно иметь методы синтеза регуляторов размерности меньшей, чем размерность объекта.

Самой распространенной структурой, которая стала почти универсальной в промышленных системах управления, является ПИД структура (пропорциональное, интегральное и дифференциальное управление — см. [4], [3]). Несмотря на то, что простота ПИД регуляторов является одновременно и их слабостью — простота ограничивает диапазон объектов, которыми они могут управлять — удивительная многосторонность и робастность ПИД управления обеспечивает в течение длительного времени значительную популярность этого регулятора.

Появление любого нового подхода к синтезу оптимальных систем автоматического регулирования сразу привлекает к себе внимание исследователей и разработчиков систем автоматического регулирования. Один из основных вопросов, который пытаются решать в связи с появлением нового направления — можно ли использовать новый подход к синтезу регуляторов фиксированного порядка и фиксированной структуры?

Использование новых подходов к синтезу регуляторов фиксированного порядка и фиксированной структуры можно проследить, анализируя подходы к получению параметров ПИД регуляторов.

Для получения параметров ПИД регуляторов существуют три основных подхода:

- 1) Подход к настройке параметров ПИД структуры использует один из нескольких доступных технологий настройки. Примеры этих технологий включают:
 - SISO (Single Input Single Output) системы (системы с одним входом и одним выходом): метод Зиглера-Николса (Z-N) [54], базовый метод внутренней модели [39], оптимизационный метод [52], метод фазовой плоскости [24].
 - МИМО (Multi Inputs Multi Outputs) системы (системы с многими входами и многими выходами): здесь надо четко разделить подходы к построению так называемых многоконтурных (диагональных) ПИД регуляторов [32], [33], [34], и подходы к построению многомерных ПИД регуляторов для многомерных объектов [53], [44], [13], [50].

Хотя ПИД регуляторы относительно просты в настройке для SISO систем, очень мало сделано в теории для МИМО систем. Например, критерий запаса по фазе (gain phase margin criterion) или оптимизационный критерий не очень удобны для МИМО систем.

- 2) Если регулятор имеет ПИД структуру, то его параметры можно находить, используя некоторые известные методы оптимизации, например H_∞ оптимизацию [23], смешанную H_2/H_∞ оптимизацию [10] или технику полуопределенного программирования [6]. Эти методы могут быть использованы для получения параметров ПИД регулятора так, чтобы регуляторы имели хорошее качество переходных процессов и робастностную устойчивость. Главная трудность, связанная с этим подходом, состоит в том, что процедура синтеза регуляторов заданной структуры не является выпуклой задачей в пространстве параметров регулятора. И, как следствие, нелегко найти глобально оптимальное множество параметров. Даже когда решение может быть найдено, это занимает огромное время на вычислительные процедуры.
- 3) Синтез регулятора произвольной структуры, используя

любые современные методы, и дальнейшее редуцирование или аппроксимация его к регулятору ПИД структуры. Работа [14] является примером для такого подхода: на первом шаге синтезируется ИМС регулятор, и далее он редуцируется до ПИД структуры. Та же идея применена в [48] для одноконтурных систем, где используется H_∞ техника формирования контура. Проблема состоит в том, что, хотя качество замкнутой системы может быть гарантировано для регулятора полного порядка, это не так для регуляторов пониженного порядка.

Первый подход называется «настройкой регулятора», в то время как второй называется «синтезом регулятора». Различие между «синтезом» и «настройкой» грубо состоит в следующем:

- Для синтеза регулятора мы обычно нуждаемся в некоторой детализированной модели и детализированной спецификации целей управления, хотя для настройки регулятора достаточно грубой модели. Порой это удается сделать и без модели.
- Для настройки регулятора существуют несколько параметров, которые отражают цели управления, и параметры регулятора варьируются в соответствии с выбранными параметрами и должны быть получены малыми усилиями.

Если метод синтеза не требует детальной модели процесса, цели управления могут быть отнесены к нескольким легко понимаемым параметрам, и нужны небольшие усилия для вычисления регулятора, тогда это может быть рассмотрено, как метод настройки. Третья категория, описанная выше, как раз состоит из таких методов. Она комбинирует преимущества первых двух категорий.

В настоящее время существует огромное количество работ, посвященных методам синтеза регуляторов пониженного порядка.

Такие методы, следуя [5], можно разделить на два класса: *прямые*, в которых параметры вычисляются при помощи оптимизации или какой-либо другой процедуры, и *косвенные*,

в которых либо сначала находится регулятор высокого порядка и затем он упрощается, либо сначала проводится редукция модели, для нее синтезируется регулятор, и затем он применяется для исходного объекта. Возможные подходы к синтезу регуляторов, порядок которых меньше, чем порядок объекта, показаны на рис. 1.



Рис. 1. Подходы к построению регуляторов пониженного порядка

Как видно из приведенного рисунка, одним из этапов косвенного метода синтеза регуляторов пониженного порядка является редукция модели. Задачи редукции модели также являются классическими в теории управления системами большого порядка.

Предлагаемая обзорная работа ставит своей целью познакомить читателя с некоторыми подходами к синтезу регуляторов фиксированной структуры и пониженного (фиксированного) порядка для линейных систем. Некоторые из рассмотренных здесь подходов (синтез регуляторов заданного порядка в задачах ковариационного управления и применение H_∞

теории для формирования контура замкнутой системы с регуляторами низкого порядка) практически не нашли своего отражения как в научной, так и в учебной отечественной литературе по автоматическому управлению.

Данная работа состоит из трех идеологически связанных между собой разделов. В нее вошел материал, посвященный как прямым, так и косвенным методам построения регуляторов пониженного (фиксированного) порядка. В первом разделе приводятся математические основы редукции модели объекта (регулятора). Для математически строгого и замкнутого изложения материала авторам потребовалось определить основные понятия линейной теории управляемых систем, такие как управляемость, наблюдаемость, минимальная реализация, сбалансированная реализация. Подробно рассмотрен метод редукции модели, называемый сбалансированным отсечением [38]. В связи с этим методом редукции модели в первой части рассмотрены задачи редукции модели (регулятора) в LQG и H_∞ задачах управления, методы LQG и H_∞ сбалансированного отсечения.

Вторая часть первого раздела относится к прямым методам, она посвящена построению регуляторов заданного порядка на основе решения линейных матричных неравенств и основана на работах [1] и [2]. Рассматривается задача синтеза регулятора пониженного порядка по вектору состояния и наблюдаемому вектору.

Второй раздел работы связан с построением регуляторов заданного порядка в так называемых задачах ковариационного управления [12]. Эти задачи характеризуются тем, что система действует в условиях воздействия гауссовского белого шума, и целью управления является назначение системе заданной ковариационной матрицы состояния. Рассмотрены управление по состоянию и по выходу. Приведены процедуры построения регуляторов заданного порядка для непрерывного и дискретного времени. Изложен единый подход к синтезу ковариационных регуляторов заданного порядка с помощью линейных матричных неравенств. Этот подход относится к прямым методам построения регуляторов фиксированного порядка.

Третий раздел обзора посвящен изложению подхода к синтезу регуляторов фиксированного порядка и фиксирован-

ной структуры на основе методов H_∞ оптимизации. Здесь можно выделить как косвенный, так и прямой методы синтеза регуляторов. В этой части описаны методы формирования контура с помощью H_∞ оптимизации [36], изложена процедура синтеза регулятора с помощью этого метода. Далее приведены различные алгоритмы синтеза регуляторов фиксированного порядка (ПИД регуляторов), основанные на методе формирования контура [47] и сведении задачи к решению билинейных матричных неравенств [19], настройка ПИД регуляторов путем прямой минимизации H_∞ нормы замкнутой системы [40], построение регуляторов пониженного порядка с помощью аппроксимации на основе разложения в ряд Маклорена. Приведен численный пример.

1. Концепция и подходы

Простые регуляторы предпочтительнее сложных регуляторов: они проще для понимания, в них меньше деталей, которые могут выйти из строя, они менее требовательны к вычислительным ресурсам и поэтому меньше вероятность появления программных ошибок. По этим причинам желательно иметь методы синтеза регуляторов пониженной размерности. Такие методы можно разделить на два класса: *прямые*, в которых параметры вычисляются при помощи оптимизации или какой-либо другой процедуры, и *косвенные*, в которых либо сначала находится регулятор высокого порядка и затем он упрощается, либо сначала проводится редукция модели, для нее синтезируется регулятор и затем он применяется для исходного объекта (см. рис. 1).

1.1. КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ. РЕДУКЦИЯ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ

1.1.1. Передаточная матрица и ее реализация в пространстве состояний

Предположим, что G — линейная непрерывная стационарная модель порядка n , которая описывается системой уравнений

в пространстве состояний

$$(1.1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0,$$

$$(1.2) \quad y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ является входом и $y(t) \in \mathbb{R}^q$ выходом системы. Для простоты зависимость этих векторов от переменной t будем опускать везде, где это возможно. Реализацию в пространстве состояний (1.1)–(1.2) будем обозначать четверкой матриц (A, B, C, D) . Передаточная матрица системы (1.1)–(1.2) определяется выражением

$$(1.3) \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Редуцированная система G_r также является линейной непрерывной стационарной системой и в пространстве состояний размерности n_r описывается следующей системой уравнений

$$(1.4) \quad \dot{x}_r = A_r x_r + B_r u, \quad x_r(0) = 0,$$

$$(1.5) \quad y_r = C_r x_r + D_r u,$$

где $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$ — вектор состояния редуцированной системы, $y_r \in \mathbb{R}^q$ — выход редуцированной модели. Передаточная матрица $G_r(s)$ системы (1.4)–(1.5) определяется выражением

$$(1.6) \quad G_r(s) = C_r(sI - A_r)^{-1}B_r + D_r.$$

Вполне естественно определить ошибку редукции e как разность выходов исходной (1.1)–(1.2) и редуцированной (1.4)–(1.5) систем, когда на вход обеих систем подается одинаковый сигнал u

$$(1.7) \quad e(s) \triangleq y(s) - y_r(s) = G(s)u(s) - G_r(s)u(s),$$

что формально можно представить в виде схемы, показанной на рис. 2. Введем расширенный вектор состояния \tilde{x}

$$(1.8) \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix},$$

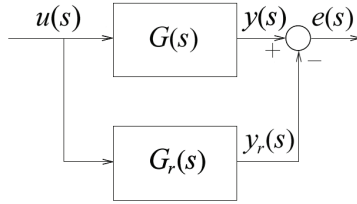


Рис. 2. Ошибка редукции

тогда формальная связь между входным сигналом u и ошибкой e описывается линейной системой уравнений

$$(1.9) \quad \dot{\tilde{x}} = \mathcal{A}\tilde{x} + \mathcal{B}u, \quad \tilde{x}(0) = 0,$$

$$(1.10) \quad e = \mathcal{C}\tilde{x} + \mathcal{D}u,$$

где матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ определяются следующим образом:

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} B \\ B_r \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C} &= [C \quad -C_r], \\ \mathcal{D} &= [D \quad -D_r]. \end{aligned}$$

Хорошо известно [51], что существует множество реализаций (A, B, C, D) линейной системы, которые приводят к одной и той же передаточной функции $G(s)$. Иначе говоря, разные реализации могут приводить к одинаковому вход-выходному поведению. В частности, все линейные системы, координаты которых связаны соотношением

$$(1.12) \quad x = Tz, \quad z = T^{-1}x,$$

где T — квадратная несингулярная матрица, имеют одинаковые передаточные функции. Отметим, что система, получающаяся в результате преобразования (1.12), имеет следующую реализацию в пространстве состояний

$$(1.13) \quad \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu, \quad z(0) = 0,$$

$$(1.14) \quad y = CTz + Du,$$

а передаточная функция

$$\begin{aligned}
 G_T(s) &= C_T(sI - A_T)^{-1}B_T + D_T = \\
 &= (CT)(sI - T^{-1}AT)^{-1}(T^{-1}B) + D = \\
 &= (CT) [T^{-1}(sI - A)T]^{-1} (T^{-1}B) + D = \\
 &= (CT) [T^{-1}(sI - A)^{-1}T] (T^{-1}B) + D = \\
 &= C(sI - A)^{-1}B + D = G(s)
 \end{aligned}$$

действительно не зависит от выбора матрицы преобразования T .

1.1.2. Управляемость и наблюдаемость

При анализе линейных систем важную роль играют понятия управляемости и наблюдаемости системы.

Определение 1.1. Динамическая система, описываемая уравнением (1.1), или пара матриц (A, B) называется управляемой, если для любого начального состояния $x(0) = x_0$, $t_1 > 0$ и конечного состояния x_1 существует такой вход $u(t)$, что решение уравнения (1.1) удовлетворяет условию $x(t_1) = x_1$. В противном случае говорят, что система (1.1) или пара (A, B) является неуправляемой.

Лемма 1.1. [51] Для заданной пары матриц (A, B) , таких что $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, следующие утверждения эквивалентны:

a) Пара (A, B) управляема.

b) Не существует такого скаляра $\lambda \in \mathbb{C}$ и такого вектора $\nu \in \mathbb{C}^n \neq 0$, что

$$(1.15) \quad \nu^*(\lambda I - A) = 0, \quad \nu^*B = 0.$$

c) Матрица управляемости

$$(1.16) \quad W_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

имеет ранг n .

Определение 1.2. Динамическая система, описываемая уравнениями (1.1)–(1.2), или пара матриц (C, A) называется наблюдаемой, если для любого $t_1 > 0$ можно определить начальное состояние системы $x(0) = x_0$ по заданным на интервале $[0, t_1]$ входу $u(t)$ и выходу $y(t)$ системы.

Лемма 1.2. [51] Для заданной пары матриц (C, A) , таких что $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$, следующие утверждения эквивалентны:

- a) Пара (C, A) наблюдаема.
- b) Не существует такого скаляра $\lambda \in \mathbb{C}$ и такого вектора $\nu \in \mathbb{C}^n \neq 0$, что

$$(1.17) \quad (\lambda I - A)\nu = 0, \quad C\nu = 0.$$

- c) Матрица наблюдаемости

$$(1.18) \quad W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

имеет ранг n .

Система с реализацией (A, B, C, D) является управляемой и наблюдаемой, если пара (A, B) является управляемой, а пара (C, A) — наблюдаемой. Для асимптотически устойчивых систем управляемость и наблюдаемость можно установить, решив уравнения Ляпунова

$$(1.19) \quad AP + PA^T + BB^T = 0,$$

$$(1.20) \quad A^TQ + QA + C^TC = 0$$

и проверив положительную определенность матриц P и Q , которые называются, соответственно, грамианом управляемости и грамианом наблюдаемости. Этот алгоритм проверки основан на двух следующих леммах [51].

Лемма 1.3. Грамиан управляемости P положительно определен тогда и только тогда, когда матрица A асимптотически устойчива и пара (A, B) управляема.

Лемма 1.4. *Грамиан наблюдаемости Q положительно определен тогда и только тогда, когда матрица A асимптотически устойчива и пара (C, A) наблюдаема.*

Отметим, что в отличие от передаточной матрицы $G(s)$ грамианы управляемости и наблюдаемости зависят от реализации. Действительно, если координаты системы преобразуются согласно (1.12), то грамианы управляемости и наблюдаемости преобразуются следующим образом:

$$(1.21) \quad P_T = T^{-1}PT^{-T}, \quad Q_T = T^TQT.$$

Однако, произведение грамианов в разных системах координат остается подобным

$$(1.22) \quad P_TQ_T = T^{-1}PQT$$

и, следовательно, спектр произведения грамианов является инвариантом относительно преобразований координат (1.12).

1.1.3. Редукция модели методом отсечения

Для динамической системы, описываемой уравнениями (1.1)–(1.2), самый простой и быстрый способ получить редуцированную модель пониженного порядка — это отсечение, т.е. отбрасывание «лишних» уравнений. Например, «естественная» процедура редукции системы в частотной области — это отсечение полюсов и нулей системы. Но если в случае SISO (Single-Input-Single-Output) системы можно сравнительно легко удалить нули и полюса, то для MIMO (Multiple-Input-Multiple-Output) системы возникает столько деталей и тонкостей, начиная с определения нулей системы, что процедура отсечения становится нетривиальной задачей. С этой точки зрения метод пространства состояний представляет собой адекватный инструмент для методологии отсечения.

В методе пространства состояний усечение вектора состояний является «естественной» процедурой получения редуцированной модели пониженного порядка. Остается лишь ответить на самый сложный и фундаментальный вопрос — какие состояния системы являются «важными» и потому должны

быть сохранены в редуцированной модели пониженного порядка. Ответом на этот вопрос будет нахождение такого преобразования системы координат, которое преобразует исходную систему к такой реализации, в которой отсечение некоторых состояний позволяет, тем не менее, сохранить в той или иной степени заданные свойства исходной системы. Все рассматриваемые в этом разделе процедуры редукции будут следовать простому правилу: *преобразуй и отсекай*. По мере возможности, мы будем давать интерпретацию полученных результатов в частотной области.

Предположим, что пространство состояний предпочитаемой реализации разложено на два взаимно ортогональных подпространства \mathbb{R}_1 и \mathbb{R}_2 размерностью n_1 и n_2 соответственно. Тогда вектор состояния z можно представить в виде

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где } z_1 \in \mathbb{R}_1, z_2 \in \mathbb{R}_2,$$

а матрицу T , которая связывает пространство состояний предпочитаемой реализации с пространством состояний исходной системы (1.1)–(1.2), можно представить в виде $T = [T_1 \ T_2]$. В итоге получим

$$(1.23) \quad x = Tz = [T_1 \ T_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Введем матрицу $R = [R_1 \ R_2]$, такую что

$$(1.24) \quad TR^T = [T_1 \ T_2] \begin{bmatrix} R_1^T \\ R_2^T \end{bmatrix} = T_1 R_1^T + T_2 R_2^T = I,$$

т.е. транспонированная матрица R^T является обратной для матрицы T . Тогда с учетом введенных обозначений исходная система (1.1)–(1.2) преобразуется к следующему виду:

$$(1.25) \quad \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u,$$

$$(1.26) \quad y = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + Du,$$

где

$$(1.27) \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^T A T_1 & R_1^T A T_2 \\ R_2^T A T_1 & R_2^T A T_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^T B \\ R_2^T B \end{bmatrix}, \quad [C_1 \ C_2] = [C T_1 \ C T_2].$$

Предположим, что у нас есть какие-то основания полагать, что при описании динамики системы можно пренебречь подпространством состояний R_2 . Тогда редуцированную модель (1.4)–(1.5) можно получить, усекая вектор состояния, так чтобы остались только состояния $x_r = z_1$. В результате такого отсечения получается редуцированная модель со следующей реализацией в пространстве состояний:

$$(1.28) \quad (A_r, B_r, C_r, D_r) = (A_{11}, B_1, C_1, D) = (R_1^T A R_1, R_1^T B, C T_1, D).$$

Отметим, что по построению $R_1^T T_1 = I$, следовательно, оператор

$$(1.29) \quad \mathbf{P} = R_1 T_1^T$$

является проекционным оператором. Этот оператор таков, что для любого $x \in \mathcal{R}(R_1)$, $\mathbf{P}x = x$. В частности можно показать [46], что все проекторы на $\mathcal{R}(R_1)$ можно параметризовать с помощью произвольной квадратной и несингулярной матрицы J в следующей форме:

$$(1.30) \quad T_1 = J^T R_1 (R_1^T J^T R_1)^{-1}.$$

Легко проверить, что определенный выше проектор обладает следующими свойствами

$$(1.31) \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}R_1 = R_1, \quad \mathbf{P}^T J^T R_1 = J^T R_1.$$

Если $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, то такой проектор называется ортогональным.

1.1.4. Минимальная реализация и передаточная эквивалентность

В разделе 1.1.1 было показано, что разные реализации в пространстве состояний могут приводить к одной и той же передаточной функции.

Определение 1.3. Две реализации в пространстве состояний линейной стационарной системы называются эквивалентными, если их передаточные функции, определяемые согласно (1.3), тождественно равны.

В контексте редукции модели и заданной реализации (A, B, C, D) порядка n вполне естественно встает вопрос о том, является ли данная реализация *минимальной* в том смысле, что не существует другой эквивалентной реализации (A_r, B_r, C_r, D_r) порядка n_r , такой что $n_r < n$. Ответ на этот вопрос основан на понятиях управляемости и наблюдаемости, сформулированных в разделе 1.1.2.

Лемма 1.5. Реализация (A, B, C, D) в пространстве состояний является минимальной тогда и только тогда, когда эта реализация является управляемой и наблюдаемой. В этом случае все эквивалентные реализации связаны между собой преобразованием подобия.

Доказательство этой леммы можно найти в любой книге по теории линейных систем, например, в [51]. Практическое значение этой леммы следующее. Если данная реализация не минимальна, то всегда можно построить эквивалентную реализацию пониженного порядка, причем передаточная функция будет иметь минимальную степень только в том случае, если реализация (A_r, B_r, C_r, D_r) является управляемой и наблюдаемой. Конструктивная процедура для построения минимальной реализации основана на определении управляемых и наблюдаемых подпространств. Это предмет следующих лемм.

Лемма 1.6. Для заданной реализации (A, B, C, D) порядка n и матрицы управляемости W_c , определяемой уравнением (1.16), выполним декомпозицию по сингулярным значениям

$$(1.32) \quad W_c = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma V_1^T,$$

где $U_1 U_1^T + U_2 U_2^T = I$, $V_1 V_1^T + V_2 V_2^T = I$ и $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n_c}) > 0$. Определим матрицы T_1 и R_1 следующим образом:

$$(1.33) \quad T_1 = U_1 \Sigma^{1/2}, \quad R_1 = U_1 \Sigma^{-1/2}.$$

Тогда реализация в пространстве состояний редуцированной системы (1.4)–(1.5) порядка n_c является управляемой, а матрицы A_r, B_r, C_r, D_r для этой реализации задаются уравнением (1.28).

Доказательство этой леммы можно найти, например, в [46].

Лемма 1.7. Для заданной реализации (A, B, C, D) порядка n и матрицы наблюдаемости W_o , определяемой уравнением (1.18), выполним декомпозицию по сингулярным значениям

$$(1.34) \quad W_o = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma V_1^T,$$

где $U_1 U_1^T + U_2 U_2^T = I$, $V_1 V_1^T + V_2 V_2^T = I$ и $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n_o}) > 0$. Определим матрицы T_1 и R_1 следующим образом:

$$(1.35) \quad T_1 = V_1 \Sigma^{-1/2}, \quad R_1 = V_1 \Sigma^{1/2}.$$

Тогда реализация в пространстве состояний редуцированной системы (1.4)–(1.5) порядка n_o является управляемой, а матрицы A_r, B_r, C_r, D_r для этой реализации задаются уравнением (1.28).

Доказательство леммы так изящно и компактно, что приведем его полностью: матрицы R_1 и T_1 , определенные в (1.35), задают ортогональный проектор $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T = V_1 V_1^T$, такой что $\mathbf{P} W_o^T = W_o^T$. Поэтому $W_{or} = W_o T_1 = U_1 \Sigma^{1/2}$ и, следовательно, ранг матрицы W_{or} равен n_o .

Леммы 1.6 и 1.7 позволяют построить, соответственно, управляемое и наблюдаемое подпространства для заданной реализации. Используя этот инструментарий, минимальную реализацию можно построить в два этапа. Сначала, применяя Лемму 1.6, строится управляемое подпространство для реализации (A, B, C, D) . Затем используется Лемма 1.7 и строится наблюдаемое подпространство для управляемой системы, полученной на предыдущем шаге. Полученная таким образом система является управляемой и наблюдаемой. Изложенную процедуру обобщает и формализует следующий алгоритм.

Алгоритм 1.1. Для заданной реализации (A, B, C, D) порядка n выполним следующие операции:

Шаг 1. Проведем сингулярную декомпозицию матрицы управляемости W_c :

$$(1.36) \quad W_c = [U_c \quad U_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \Sigma_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_c^T \\ V_{\bar{c}}^T \end{bmatrix} = U_c \Sigma_c V_c^T,$$

где $U_c U_c^T + U_{\bar{c}} U_{\bar{c}}^T = I$, $V_c V_c^T + V_{\bar{c}} V_{\bar{c}}^T = I$ и $\Sigma_c = \text{diag}(\sigma_{c1}, \dots, \sigma_{cn_c}) > 0$. Определим матрицу T_c следующим образом:

$$(1.37) \quad T_c = U_c \Sigma_c^{1/2}.$$

Шаг 2. Теперь выполним сингулярную декомпозицию произведения матрицы наблюдаемости W_o и матрицы T_c :

$$(1.38) \quad W_o T_c = [U_{co} \quad U_{\bar{co}}] \begin{bmatrix} \Sigma_{co} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{co}^T \\ V_{\bar{co}}^T \end{bmatrix} = U_{co} \Sigma_{co} V_{co}^T,$$

где $U_{co} U_{co}^T + U_{\bar{co}} U_{\bar{co}}^T = I$, $V_{co} V_{co}^T + V_{\bar{co}} V_{\bar{co}}^T = I$ и $\Sigma_{co} = \text{diag}(\sigma_{co1}, \dots, \sigma_{con_{co}}) > 0$.

Шаг 3. Определим матрицы T_1 и R_1 следующим образом:

$$(1.39) \quad T_1 = U_c \Sigma_c^{1/2} V_{co} \Sigma_{co}^{-1/2}, \quad R_1 = U_c \Sigma_c^{-1/2} V_{co} \Sigma_{co}^{1/2}.$$

Тогда реализация редуцированной системы (1.4)–(1.5) порядка n_{co} является минимальной реализацией для (A, B, C, D) , а матрицы A_r, B_r, C_r, D_r минимальной реализации задаются уравнениями (1.28) и (1.39).

Отметим, что на первом шаге алгоритма, когда применяется лемма 1.6 для построения управляемого подпространства системы, используются только матрицы U_1 и Σ , которые получаются при сингулярной декомпозиции матрицы управляемости. Матрицы V_1 и V_2 при этом остаются не задействованными и вообще не используются в алгоритме. Этот факт можно использовать для того, чтобы заменить задачу (1.32) сингулярной декомпозиции матрицы управляемости на задачу о симметричных собственных значениях

$$W_c W_c^T = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma U_1^T,$$

что повышает эффективность числовой процедуры. Тот же самый аргумент применим и для второго шага алгоритма, когда применяется лемма 1.7. В этом случае не используются матрицы U_1 и U_2 , которые получаются при сингулярной декомпозиции матрицы наблюдаемости (1.34), поэтому эту задачу можно заменить на задачу о симметричных собственных значениях матрицы $W_o^T W_o$. Для асимптотически устойчивых систем вместо матриц $W_c W_c^T$ и $W_o^T W_o$ можно использовать неотрицательно определенные грамианы управляемости P и наблюдаемости Q (см. раздел 1.1.5).

Применяя эти результаты для синтеза законов управления, необходимо соблюдать некоторые меры предосторожности. Следует сказать, что редукция ненаблюдаемых состояний всегда желательна, а вот редукцию неуправляемых состояний нужно выполнять очень аккуратно. Например, не синтезировав законы управления исходной системы, было бы преждевременно редуцировать динамику внешних возмущений системы. Редукция неуправляемых и ненаблюдаемых состояний «ничего нам не стоит» в том смысле, что исходная и редуцированная передаточные функции тождественно равны и, следовательно, ошибка редукции равна нулю. В следующем разделе рассматривается процедура отсечения, в результате применения которой размерность редуцированной реализации меньше размерности минимальной реализации. В этом случае, конечно, нет никакой гарантии, что эквивалентность передаточных функций будет сохранена, впрочем, как и некоторые другие свойства исходной системы.

1.1.5. Сбалансированная реализация и сбалансированное отсечение

В этом разделе рассматривается эффективный и, пожалуй, самый известный метод редукции системы — метод сбалансированного отсечения. И начнем мы его с изучения возможности преобразования реализации (A, B, C, D) к специальной системе координат, известной как *сбалансированные координаты*.

Определение 1.4. *Асимптотически устойчивая реализация (A, B, C, D) в пространстве состояний размерности n называется сбалансированной, если грамианы управляемости*

и наблюдаемости одновременно являются диагональными.

Если системы координат двух реализаций связаны между собой преобразованием подобия T (1.12), то грамианы управляемости P и наблюдаемости Q , а также их произведение преобразуются следующим образом:

$$(1.40) \quad P_T = T^{-1}PT^{-T}, \quad Q_T = T^TQT, \quad P_TQ_T = T^{-1}PQT.$$

Таким образом, если существует неособая матрица T , которая одновременно диагонализует грамианы управляемости и наблюдаемости, то для заданной реализации всегда можно найти сбалансированную систему координат. Следующая лемма показывает, что для минимальной реализации всегда существует конструктивный способ, который позволяет выполнить такую диагонализацию.

Лемма 1.8. *Для заданной минимальной и асимптотически устойчивой реализации (A, B, C, D) порядка n вычислим симметричные и положительно определенные грамианы управляемости P и наблюдаемости Q . Найдем неособую матрицу $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такую, чтобы*

$$(1.41) \quad P = F^T F,$$

а сингулярная декомпозиция грамиана наблюдаемости имела бы вид

$$(1.42) \quad FQF^T = U\Sigma U^T,$$

где $UU^T = I$ и $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) > 0$. Тогда преобразование подобия (1.12), для которого матрица T равна

$$(1.43) \quad T = F^T U \Sigma^{-1/4},$$

преобразует исходную реализацию к сбалансированным координатам.

Доказательство. Так как исходная реализация минимальна и асимптотически устойчива, то грамианы управляемости и наблюдаемости эрмитовы и положительно определены. Следовательно, всегда существуют неособая матрица F и унитарная матрица U , которые удовлетворяют условиям

(1.41)–(1.42). Вид грамианов управляемости и наблюдаемости, а также их произведения в новой системе координат получим простым вычислением, подставив выражение для матрицы T (1.43) в уравнение (1.40):

$$(1.44) \quad T^{-1}PT^{-T} = \Sigma^{1/2}, \quad T^TQT = \Sigma^{1/2}, \quad T^{-1}PQT = \Sigma.$$

Таким образом, грамианы управляемости и наблюдаемости диагональны и равны между собой, следовательно, преобразованная реализация находится в сбалансированной системе координат.

Процедуру редукции исходной модели описывает следующий алгоритм.

Алгоритм 1.2. *Выполнить для заданной минимальной и асимптотически устойчивой реализации (A, B, C, D) порядка n следующие действия:*

Шаг 1. Вычислить грамиан управляемости P и найти матрицу $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, которая бы удовлетворяла разложению (1.41).

Шаг 2. Вычислить грамиан наблюдаемости Q и выполнить сингулярную декомпозицию матрицы FQF^T , представив ее в виде

$$(1.45) \quad FQF^T = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix},$$

где $U_1U_1^T + U_2U_2^T = I$, $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1I, \dots, \sigma_rI) > 0$, $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}I, \dots, \sigma_pI) > 0$ и $\sigma_i \neq \sigma_j$ для всех $i \neq j$. Предполагается, что сингулярное значение σ_i имеет кратность m_i , причем $\sum_{i=1}^p m_i = n$ и $\sum_{i=1}^r m_i = n_r$.

Шаг 3. Определить матрицы T_1 и R_1 следующим образом:

$$(1.46) \quad T_1 = F^T U_1 \Sigma_1^{-1/4}, \quad R_1 = F^{-1} U_1 \Sigma_1^{1/4}.$$

Тогда реализация (1.4)–(1.5) в пространстве состояний размерности n_r будет являться редукцией исходной системы (1.1)–(1.2), а матрицы A_r, B_r, C_r, D_r для редуцированной реализации будут задаваться уравнением (1.28) и матрицами (1.46).

Следующая теорема суммирует свойства редуцированной модели, получаемой в алгоритме 1.2 методом сбалансированного отсечения.

Теорема 1.1. *Редуцированная система, получающаяся в результате применения метода сбалансированного отсечения, асимптотически устойчива, а ошибка редукции равна*

$$(1.47) \quad \|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^p \sigma_i^{1/2}.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [51]. Отметим, что вышеприведенная теорема дает верхнюю границу для нормы ошибки редукции, причем выражение для ошибки очень удобно использовать с алгоритмом 1.2. Фактически, этот алгоритм можно использовать для того, чтобы получить редуцированную модель заданного порядка, минимизируя ошибку редукции простым упорядочиванием по убыванию сингулярных чисел Ганкеля. Такое упорядочивание гарантирует, что первое сингулярное число матрицы Σ_2 (1.45) будет наибольшим из всех $p - r$ отсекаемых сингулярных чисел.

1.1.6. *LQG-сбалансированная реализация и LQG-характеристические числа*

Хотя процедура сбалансированное отсечение имеет массу привлекательных свойств, у нее есть один серьезный недостаток — это процедура для незамкнутой системы: в процессе редукции никак не учитываются не только свойства регулятора, но и сам факт наличия регулятора. В этом разделе будет рассмотрена процедура редукции замкнутой системы, когда объект управления сначала стабилизируется стандартным регулятором, и только затем к замкнутой системе применяется процедура сбалансированного отсечения. Например, можно было объединить объект G со стандартным LQG регулятором и сбалансировать эту конфигурацию. Такой подход был предложен в работе [28] и основан на нормализованной LQG задаче. Эта задача описывается в пространстве состояний сле-

дующей системой уравнений:

$$(1.48) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw_1(t) + Bu(t),$$

$$(1.49) \quad y(t) = Cx(t) + w_2(t),$$

$$(1.50) \quad z_1(t) = Cx(t),$$

$$(1.51) \quad z_2(t) = u(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вход системы, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ – выход, $w_1(t)$ и $w_2(t)$ – белый гауссовский шум с нулевым средним значением. Для простоты будем считать, что реализация (A, B, C) в пространстве состояний размерности n является минимальной. Обозначим $z = [z_1^T z_2^T]^T$ и $z = [w_1^T w_2^T]^T$. После несложных преобразований можно показать, что передаточная матрица замкнутой системы от w к z равна (см. рис. 3)

$$(1.52) \quad \mathcal{H}(G, K) = \begin{bmatrix} (I - GK)^{-1}G & (I - GK)^{-1}GK \\ K(I - GK)^{-1}G & K(I - GK)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Определим LQG -весовой функционал следующим образом:

$$(1.53) \quad C(\mathcal{H}(G, K)) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \frac{1}{2t_f} \int_{-t_f}^{t_f} z^T(t)z(t) dt \right\} = \\ = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \frac{1}{2t_f} \int_{-t_f}^{t_f} [x^T(t)C^T Cx(t) + u^T(t)u(t)] dt \right\},$$

где символом \mathbf{E} обозначено математическое ожидание. Теперь все готово для формулировки нормализованной LQG задачи управления.

Определение 1.5. *Нормализованной LQG задачей управления называется построение такого регулятора K , который минимизирует LQG функционал $C(\mathcal{H}(G, K))$ на множестве всех стабилизированных замкнутых $\mathcal{H}(G, K)$.*

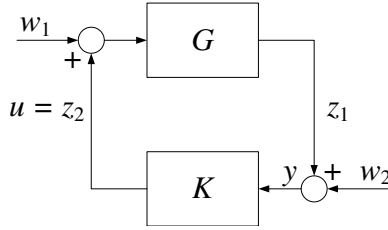


Рис. 3. Структурная схема LQG задачи

Отметим, что нормализованная LQG задача имеет «стандартный объект» P

$$(1.54) \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & [B & 0] & [B] \\ \hline [C] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ [C] & [0 & I] & [0] \end{array} \right],$$

«стандартный» в том смысле, что $[z^T y^T] = P[w^T u^T]$, где $u = Ky$. Хорошо известно [18], что регулятор K стабилизирует P тогда и только тогда, когда он стабилизирует P_{22} , и так как $P_{22} = G$, то K стабилизирует P только в том случае, если он стабилизирует G . (Под термином «стабилизирует», как обычно, подразумевается «внутренне стабилизирует», т.е. для любых начальных условий состояния G и K стремятся к нулю, когда $w = 0$.)

Решение нормализованной LQG задачи дает следующая теорема.

Теорема 1.2. Пусть для системы (1.48)–(1.51) реализация (A, B, C) в пространстве состояний размерности n является минимальной. Тогда существует единственное положительно определенное стабилизирующее решение $X_2 = X_2^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ алгебраического уравнения Риккати для управления

$$(1.55) \quad A^T X_2 + X_2 A - X_2 B B^T X_2 + C^T C = 0.$$

Кроме того, существует единственное положительно определенное стабилизирующее решение $Y_2 = Y_2^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ алгебраического уравнения Риккати для фильтрации

$$(1.56) \quad A Y_2 + Y_2 A^T - Y_2 C^T C Y_2 + B B^T = 0.$$

Нормализованный LQG регулятор $K_{LQG} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & 0 \end{array} \right]$ имеет форму наблюдателя

$$(1.57) \quad \dot{\hat{x}} = \underbrace{(A - Y_2 C^T C - B B^T X_2)}_{\hat{A}} \hat{x} + \underbrace{Y_2 C^T}_{\hat{B}} y$$

плюс обратная связь по состоянию

$$(1.58) \quad u = \underbrace{-B^T X_2}_{\hat{C}} \hat{x}.$$

Минимальное значение LQG -веса функционала равно

$$(1.59) \quad C(\mathcal{H}(G, K_{LQG})) = \text{trace} [B^T X_2 B + B^T X_2 Y_2 X_2 B].$$

Пусть несингулярная матрица T задает преобразование системы координат $x_T = T^{-1}x$ в пространстве состояний. Тогда произведения матриц X_2 и Y_2 в исходной и преобразованной системе координат, также как и произведение грамианов управляемости и наблюдаемости в модели (1.1)–(1.2), связаны между собой преобразованием подобия $(X_2)_T (Y_2)_T = T^{-1} X_2 Y_2 T$. Следовательно, собственные значения матрицы $X_2 Y_2$ являются инвариантами относительно преобразований координат и равны квадратам LQG -характеристических значений системы G . Формальное определение LQG -характеристических значений системы и некоторые их основные свойства дает следующая лемма [28].

Лемма 1.9. Пусть задана минимальная реализация (A, B, C) в пространстве состояний размерности n и пусть матрицы X_2 и Y_2 являются решениями алгебраического уравнения Риккати для управления и фильтрации соответственно. Тогда собственные значения матрицы $X_2 Y_2$ являются строго положительными инвариантами подобия, а квадратные корни из этих инвариантных собственных значений называются LQG -характеристическими значениями G . Упорядочим n собственных значений матрицы $X_2 Y_2$ в убывающем порядке $\mu_1^2 \geq \mu_2^2 \geq \dots \geq \mu_n^2 > 0$, тогда существует преобразование подобия, которое приводит и матрицу X_2 , и матрицу Y_2 к виду $M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$.

Говорят, что в этом случае система находится в LQG -сбалансированных координатах, а матрица M является диагональной матрицей LQG -характеристических значений системы G .

Как было показано в работе [28], для LQG -сбалансированной реализации малые значения μ соответствуют таким состояниям системы, которые легко управляются и хорошо фильтруются в LQG -смысле. Этот факт позволяет редуцировать и объект управления, и стабилизирующий его регулятор методом LQG -сбалансированного отсечения.

Теорема 1.3. Редукция модели методом LQG -сбалансированного отсечения.

Пусть реализация (A, B, C) в пространстве состояний размерности n является минимальной, LQG -сбалансированной, имеет LQG -балансированные значения $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > 0$, а матрица $M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = X_2 = Y_2$ является стабилизирующим решением алгебраических уравнений Риккати для управления и фильтрации. Выберем r такое, что $r < n$ и $\mu_r > \mu_{r+1}$, а затем разобьем матрицу M на блоки следующим образом:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix},$$

где $M_1 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ и $M_2 = \text{diag}(\mu_{r+1}, \dots, \mu_n)$. Матрицы A , B и C также разобьем на соответствующие блоки:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2].$$

Тогда реализация (A_{11}, B_1, C_1) в пространстве состояний размерности r является редукцией исходного объекта управления.

Теорема 1.4. Редукция регулятора методом LQG -сбалансированного отсечения.

Пусть реализация (A, B, C) в пространстве состояний размерности n является минимальной, LQG -сбалансированной, имеет LQG -сбалансированные значения $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > 0$, а матрица

$M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = X_2 = Y_2$ является стабилизирующим решением алгебраических уравнений Риккати для управления и фильтрации. Выберем r такое, что $r < n$ и $\mu_r > \mu_{r+1}$, а затем разобьем матрицу M на блоки следующим образом:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix},$$

где $M_1 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ и $M_2 = \text{diag}(\mu_{r+1}, \dots, \mu_n)$. Пусть в соответствии с теоремой 1.2 регулятор $K_{LQG} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{array} \right]$ является нормализованным LQG регулятором для объекта $G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ C & 0 \end{array} \right]$. Матрицы \hat{A} , \hat{B} и \hat{C} этого регулятора разобьем на блоки, соответствующие разбиению матрицы M :

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \quad C = [\hat{C}_1 \quad \hat{C}_2].$$

Тогда реализация $(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$ в пространстве состояний размерности r является редуцицией нормализованного LQG регулятора.

Заметим, что редуцированный регулятор

$$K_r = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_1 & 0 \end{array} \right]$$

является полноразмерным регулятором для редуцированного объекта G_r . Это замечание является прямым следствием того факта, что матрица M_1 является стабилизирующим решением алгебраических уравнений Риккати управления и фильтрации для редуцированного объекта G_r .

1.1.7. H_∞ -сбалансированная реализация и H_∞ -характеристические числа

В этом разделе мы покажем, как результаты предыдущего раздела могут быть обобщены на H_∞ случай. Нормализованная H_∞ задача управления, на которой основан H_∞ -сбалансированный метод — это просто H_∞ задача управления

для той же, что и в предыдущем разделе системы (1.48)–(1.51) с той же самой структурной схемой (см. рис. 3) и с той же самой передаточной матрицей $\mathcal{H}(G, K)$ (см. уравнение (1.52)). Прежде чем продолжить, дадим несколько определений и обсудим их.

Определение 1.6. Регулятор K является (G, γ) -допустимым, если он стабилизирует G и если $\|\mathcal{H}(G, K)\|_\infty < \gamma$.

Определение 1.7. Если K — это (G, γ) -допустимый регулятор, то тогда $\|\mathcal{H}(G, K)\|_\infty < \gamma$ называется (G, γ) -допустимой передаточной матрицей замкнутой цепи.

Отметим, что каждый элемент матрицы $\mathcal{H}(G, K)$ имеет робастную интерпретацию, а именно: $(I - GK)^{-1}G$ соответствует «аддитивной» неопределенности Δ_{11} регулятора K , $(I - GK)^{-1}GK$ соответствует «выходной мультипликативной» неопределенности Δ_{12} объекта G . $K(I - GK)^{-1}G$ соответствует «входной мультипликативной» неопределенности Δ_{21} объекта G и, наконец, $K(I - GK)^{-1}$ соответствует аддитивной неопределенности Δ_{22} объекта. Верхняя граница γ нормы $\|\mathcal{H}(G, K)\|_\infty$ означает, что робастная устойчивость гарантирована каждому из четырех типов неопределенностей.

Обозначим через γ_0 наименьшее значение γ , для которого существует (G, γ) -допустимый регулятор. Нахождение минимального значения γ_0 является задачей H_∞ -оптимального управления. В дальнейшем предполагается, что $\gamma > \gamma_0$. Это допущение позволяет ввести в рассмотрение критерий минимальной энтропии.

Определение 1.8. Пусть $H \in \mathcal{RH}_\infty$, $H(\infty) = 0$ и $\|H\|_\infty < \gamma$. Тогда энтропия $I(H, \gamma)$ определяется следующим образом:

$$(1.60) \quad I(H, \gamma) = -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\det(I - \gamma^{-2} H^*(j\omega) H(j\omega))| d\omega.$$

Мы не будем обсуждать роль и значение энтропии в теории H_∞ управления. Введение понятия энтропии позволяет нам сформулировать нормализованную задачу H_∞ управления.

Определение 1.9. Нормализованной задачей H_∞ управления называется построение такого регулятора K , который

минимизирует энтропию $I(\mathcal{H}(G, K), \gamma)$ на множестве всех (G, γ) -допустимых замкнутых $\mathcal{H}(G, K)$.

Решение нормализованной задачи H_∞ управления дает следующая теорема, доказательство которой можно найти в [15] и [21].

Теорема 1.5. Пусть для системы (1.48)–(1.51) реализация (A, B, C) в пространстве состояний размерности n является минимальной и пусть $\gamma > \gamma_0$. Тогда существует единственное положительно определенное стабилизирующее решение $X_\infty = X_\infty^T$ алгебраического уравнения Риккати для H_∞ управления

$$(1.61) \quad A^T X_\infty + X_\infty A - (1 - \gamma^{-2}) X_\infty B B^T X_\infty + C^T C = 0.$$

Кроме того, существует единственное положительно определенное стабилизирующее решение $Y_\infty = Y_\infty^T$ алгебраического уравнения Риккати для H_∞ фильтрации

$$(1.62) \quad A Y_\infty + Y_\infty A^T - (1 - \gamma^{-2}) Y_\infty C^T C Y_\infty + B B^T = 0.$$

G, γ -допустимый регулятор существует тогда и только тогда, когда существуют положительно определенные матрицы X_∞ и Y_∞ , которые удовлетворяют условию $\lambda_{\max}(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$. Определим

$$(1.63) \quad Z_\infty = (I - \gamma^2 Y_\infty X_\infty)^{-1}.$$

Нормализованный H_∞ регулятор $K_{ME\infty} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & 0 \end{array} \right]$ имеет форму наблюдателя

$$(1.64) \quad \dot{\hat{x}} = \underbrace{(A - (1 - \gamma^{-2}) Y_\infty C^T C - B B^T X_\infty Z_\infty)}_{\hat{A}} \hat{x} + \underbrace{Y_\infty C^T}_{\hat{B}} y$$

плюс обратная связь по состоянию

$$(1.65) \quad u = \underbrace{-B^T X_\infty Z_\infty}_{\hat{C}} \hat{x}.$$

Минимальное значение энтропии равно

$$(1.66) \quad I(\mathcal{H}(G, K_{ME\infty})) = \text{trace} [B^T X_\infty B + B^T X_\infty Z_\infty Y_\infty X_\infty B].$$

Пусть, как и раньше, несингулярная матрица T задает преобразование системы координат $x_T = T^{-1}x$ в пространстве состояний. Тогда произведения матриц X_∞ и Y_∞ в исходной и преобразованной системе координат, также как и произведение грамианов управляемости и наблюдаемости в модели (1.1)–(1.2), связаны между собой преобразованием подобия $(X_\infty)_T(Y_\infty)_T = T^{-1}X_\infty Y_\infty T$. Следовательно, собственные значения матрицы $X_\infty Y_\infty$ являются инвариантами относительно преобразований координат и равны квадратам H_∞ -характеристических значений системы G . Формальное определение H_∞ -характеристических значений системы и некоторые их основные свойства дает следующая лемма [41].

Лемма 1.10. Пусть задана минимальная реализация (A, B, C) в пространстве состояний размерности n , пусть $\gamma > \gamma_0$ и пусть матрицы X_∞ и Y_∞ являются решениями алгебраического уравнения Риккати для H_∞ управления и H_∞ фильтрации соответственно. Тогда собственные значения матрицы $X_\infty Y_\infty$ являются строго положительными инвариантами подобия, а квадратные корни из этих инвариантных собственных значений называются H_∞ -характеристическими значениями G . Упорядочим n собственных значений матрицы $X_\infty Y_\infty$ в убывающем порядке $\nu_1^2 \geq \nu_2^2 \geq \dots \geq \nu_n^2 > 0$, тогда $\gamma > \nu_i$ и существует преобразование подобия, которое приводит к матрицу X_∞ , и матрицу Y_∞ к виду $N = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$. Говорят, что в этом случае система находится в H_∞ -сбалансированных координатах, а матрица N является диагональной матрицей H_∞ -характеристических значений системы G .

Как было показано в работе [41], редуцированный объект управления и редуцированный H_∞ регулятор можно получить отсечением тех состояний H_∞ -сбалансированной реализации, которые соответствуют малым значениям H_∞ -характеристических значений ν . Причем в отличие от метода LQG -сбалансированной редукции метода H_∞ -сбалансированной редукции позволяет получить априорную оценку ошибки, которую дает применение редуцированного регулятора с исходным, не редуцированным объектом.

Теорема 1.6. Редукция модели методом H_∞ -сбалансированного отсечения. Пусть реализация (A, B, C) в

пространстве состояний размерности n является минимальной, H_∞ -сбалансированной для заданного $\gamma > \gamma_0$, имеет H_∞ -сбалансированные значения $\gamma > \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n > 0$, а матрица $N = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) = X_\infty = Y_\infty$ является стабилизирующим решением алгебраических уравнений Риккати для H_∞ управления и H_∞ фильтрации. Выберем r такое, что $r < n$ и $\nu_r > \nu_{r+1}$, а затем разобьем матрицу N на блоки следующим образом:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix},$$

где $N_1 = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_r)$ и $N_2 = \text{diag}(\nu_{r+1}, \dots, \nu_n)$. Матрицы A , B и C также разобьем на соответствующие блоки:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2].$$

Тогда реализация (A_{11}, B_1, C_1) в пространстве состояний размерности r является редукцией исходного объекта управления.

Теорема 1.7. Редукция регулятора методом H_∞ -сбалансированного отсечения.

Пусть реализация (A, B, C) в пространстве состояний размерности n является минимальной, H_∞ -сбалансированной для заданного $\gamma > \gamma_0$, имеет H_∞ -сбалансированные значения $\gamma > \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n > 0$, а матрица $N = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) = X_\infty = Y_\infty$ является стабилизирующим решением алгебраических уравнений Риккати для H_∞ управления и H_∞ фильтрации. Выберем r такое, что $r < n$ и $\nu_r > \nu_{r+1}$, а затем разобьем матрицу N на блоки следующим образом:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix},$$

где $N_1 = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_r)$ и $N_2 = \text{diag}(\nu_{r+1}, \dots, \nu_n)$.

Пусть в соответствии с теоремой 1.5 регулятор $K_{ME\infty} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & 0 \end{array} \right]$ является нормализованным H_∞ регулятором для объекта $G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$ и заданного γ . Матрицы \hat{A} ,

\hat{B} и \hat{C} этого регулятора разобьем на блоки, соответствующие разбиению матрицы N :

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \quad C = [\hat{C}_1 \quad \hat{C}_2].$$

Тогда реализация $(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$ в пространстве состояний размерности r является редукцией нормализованного H_∞ регулятора, а ошибка, которая обусловлена применением редуцированного регулятора с исходным, не редуцированным объектом управления, равна

$$(1.67) \quad \varepsilon \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \frac{\beta \nu_i}{\sqrt{1 + \beta_2 \nu_i^2}},$$

где $\beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}$.

1.2. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕДУКЦИИ. ЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И АЛГОРИТМ ПОИСКА ВЗАИМНООБРАТНЫХ МАТРИЦ

В предыдущем разделе были рассмотрены косвенные методы редукции динамических регуляторов полного порядка, когда либо сначала проводится редукция незамкнутой системы и уже для нее синтезируется регулятор (сбалансированное отсечение), либо сначала объект управления стабилизируется полноразмерным регулятором и только затем к замкнутой системе применяется процедура редукции (LQG - и H_∞ -сбалансированное отсечение). Косвенные методы всегда позволяют построить регулятор пониженной размерности, но, вообще говоря, не гарантируют ни заданной структуры регулятора, ни желаемого качества управления. Прямые методы, как правило, позволяют изначально задавать и структуру, и качество управления, но нет никаких гарантий, что данный регулятор будет построен. Эти общие соображения о прямых методах можно проиллюстрировать на примере синтеза регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц [2].

Линейные матричные неравенства достаточно давно и интенсивно используются в теории управления для синтеза законов управления различными классами динамических объектов. Линейные матричные неравенства позволяют с единых позиций рассматривать и решать многие проблемы теории управления и, в частности, такие важные как стабилизация неустойчивого объекта по состоянию и по измеряемому выходу, модальное управление, оптимальное линейно-квадратичное управление, оптимальное гашение внешних возмущений в рамках теории H_∞ управления, робастная устойчивость и стабилизация, абсолютная устойчивость и стабилизация, робастное H_∞ управление.

Основная идея, положенная в основу синтеза, заключается в следующем. Цель управления формулируется в виде неравенства относительно квадратичной функции Ляпунова замкнутой системы $V(x) = x^T X x$ с симметрической положительно определенной матрицей $X = X^T > 0$. Для задачи стабилизации это просто неравенство Ляпунова, а для задачи H_∞ управления это неравенство получается путем преобразования целевого условия в эквивалентное ему матричное неравенство. И в том, и в другом случае получающееся неравенство может быть представлено в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестной матрицы параметров регулятора Θ следующего вида

$$(1.68) \quad \Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0,$$

где P , Q и Ψ — матрицы соответствующей размерности и зависящие от исходных данных, причем симметрическая матрица Ψ зависит также от неизвестной матрицы X функции Ляпунова. Это неравенство имеет непустое множество решений тогда и только тогда, когда выполняются два неравенства:

$$(1.69) \quad W_P^T \Psi W_P < 0, \quad W_Q^T \Psi W_Q < 0,$$

в которых столбцы матриц W_P и W_Q образуют базисы ядер матриц P и Q соответственно. Последние два неравенства уже не содержат переменной Θ и для регуляторов по состоянию или регуляторов по выходу полного порядка (когда порядок регулятора совпадает с порядком объекта) эти неравенства являются линейными матричными неравенствами отно-

сительно матрицы X . Таким образом, исходная задача разделяется на две задачи: сначала находится матрица X , удовлетворяющая линейным матричным неравенствам (1.69), а затем найденная матрица подставляется в линейное матричное неравенство (1.68) и находятся параметры регулятора Θ .

В том случае, когда состояние объекта не измеряется и строится регулятор по выходу пониженного порядка (т.е. порядок регулятора меньше порядка объекта), одна из матриц P или Q также зависит от матрицы X , и это приводит к тому, что соответствующие неравенства (1.68) содержат как матрицу X , так и обратную к ней матрицу $Y = X^{-1}$. Теперь эти неравенства оказываются линейными матричными неравенствами относительно двух взаимнообратных матриц X и Y , и задача сводится к оптимизации некоторой невыпуклой функции при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами. Указанное обстоятельство принципиальным образом усложняет синтез регуляторов, так как отсутствуют регулярные методы оптимизации невыпуклых функций. И хотя в некоторых практически важных случаях удается осуществить требуемый синтез, ни один из предложенных алгоритмов не гарантирует решения любой задачи.

В работе [1] был предложен алгоритм для проверки разрешимости таких неравенств и нахождения их решений. Особенность предложенного алгоритма заключается в том, что он представляет собой итерационный процесс, на каждой итерации которого с помощью команды `mincx` пакета MATLAB решается задача поиска минимума линейной функции при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами. Оказывается, что этот итерационный процесс всегда сходится, причем если значение оптимизируемой функции стремится к нулю, то рассматриваемая задача разрешима. Поскольку, как показано в работах [2] и [1], синтез и стабилизирующих, и H_∞ оптимальных, и робастных регуляторов заданного порядка по выходу для линейных непрерывных и дискретных систем сводится к решению линейных матричных неравенств относительно двух взаимнообратных матриц, рассмотрим только одну из этих задач — задачу стабилизации линейного непрерывного объекта регулятором заданного порядка по выходу.

Рассмотрим управляемый объект с неизмеряемым состо-

анием

$$(1.70) \quad \dot{x} = Ax + Bu,$$

$$(1.71) \quad y = Cx,$$

в котором $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния системы, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — управление, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ — измеряемый выход. Требуется построить линейный динамический регулятор k -того порядка вида

$$(1.72) \quad \dot{x}_r = A_r x_r + B_r y,$$

$$(1.73) \quad u = C_r x_r + D_r y,$$

где $x_r \in \mathbb{R}^k$ — вектор состояния регулятора, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1.70)–(1.73). В частном случае $k = 0$ имеем статический регулятор $u = D_r y$.

Уравнение замкнутой системы (1.70–1.73) при $k \neq 0$ имеет вид

$$(1.74) \quad \dot{x}_c = A_c x_c, \quad A_c = \begin{bmatrix} A + BD_r C & BC_r \\ B_r C & A_r \end{bmatrix},$$

где $x_c = \text{col}(x, x_r)$.

Переформулируем цель управления в виде существования квадратичной функции Ляпунова $V(x_c) = x_c^T X x_c$, где $X^T = X > 0$, такой, что по любой траектории замкнутой системы имеет место

$$V < 0.$$

Это условие эквивалентно матричному неравенству Ляпунова

$$(1.75) \quad A_c^T X + X A_c < 0.$$

Вводя матрицу параметров регулятора

$$(1.76) \quad \Theta = \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix},$$

представим матрицу замкнутой системы в виде

$$(1.77) \quad A_c = A_0 + B_0 \Theta C_0,$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times k} & B \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{bmatrix},$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C & 0_{n_y \times k} \end{bmatrix},$$

выделяя тем самым слагаемое, содержащее матрицу Θ неизвестных параметров регулятора.

Теперь подставим уравнение (1.77) в неравенство Ляпунова (1.75) и получим матричное неравенство

$$(1.78) \quad A_0^T X + X A_0 + C_0^T \Theta^T B_0^T X + X B_0 \Theta C_0 < 0,$$

которое можно легко представить в форме основного неравенства теории линейных матричных неравенств

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0,$$

где $\Psi = A_0^T X + X A_0$, $P = C_0$, $Q = B_0^T X$. Согласно теории линейных матричных неравенств это неравенство разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства

$$(1.79) \quad W_{B_0^T X}^T (A_0^T X + X A_0) W_{B_0^T X} < 0,$$

$$(1.80) \quad W^T C_0 (A_0^T X + X A_0) W_{C_0} < 0,$$

в которых столбцы матриц $W_{B_0^T X}$ и W_{C_0} образуют базисы ядер матриц $B_0^T X$ и C_0 соответственно. Заметим, что $W_{B_0^T X} = X^{-1} W_{B_0^T}$, где столбцы $W_{B_0^T}$ образуют базис ядра матрицы B_0^T , и подставим это выражение в (1.79), в итоге приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 1.8. *Объект (1.70)–(1.71) стабилизируется с помощью регулятора по выходу (1.72)–(1.73) заданного порядка $k \leq n_x$ тогда и только тогда, когда существует $(n_x + k) \times (n_x + k)$ -матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$(1.81) \quad W_{C_0}^T (A_0^T X + X A_0) W_{C_0} < 0,$$

$$(1.82) \quad W_{B_0^T}^T (X^{-1} A_0^T + A_0 X^{-1}) W_{B_0^T} < 0.$$

Если условия (1.81)–(1.82) выполнены и такая матрица X найдена, то параметры Θ искомого регулятора (1.72)–(1.73) находятся как решения линейного матричного неравенства (1.78) относительно переменной Θ .

Введем матрицу $Y = X^{-1}$ и перепишем условия (1.81)–(1.82) в виде линейных матричных неравенств относительно матриц X и Y :

$$(1.83) \quad W_{C_0}^T (A_0^T X + X A_0) W_{C_0} < 0, \quad X > 0,$$

$$(1.84) \quad W_{B_0^T}^T (Y A_0^T + A_0 Y) W_{B_0^T} < 0, \quad Y > 0.$$

Тогда рассматриваемая проблема синтеза стабилизирующих регуляторов по выходу заданного порядка сводится к задаче, которую мы вслед за авторами работы [2] назовем **задачей А**: найти две взаимнообратные $(n_x + k) \times (n_x + k)$ -матрицы $X = X^T$ и $Y (XY = I)$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (1.83)–(1.84), или установить, что такие матрицы не существуют.

В заключение рассмотрим алгоритм решения **задачи А**, применение которого позволяет синтезировать регуляторы по выходу. Этот алгоритм был впервые предложен в работе [1] и предназначен для решения следующей задачи.

Задача А: найти две взаимнообратные матрицы X и $Y (XY = I)$, удовлетворяющие системе линейных матричных неравенств $L_i(X, Y) < 0$, $i = 1, 2$, относительно X и Y .

Для ее решения рассмотрим также другую задачу.

Задача А1: найти

$$(1.85) \quad \lambda_{min} = \min\{\lambda : X - Y^{-1} < \lambda I, X > 0, Y > 0, \\ L_i(X, Y) < 0, i = 1, 2, 3\},$$

где

$$L_3(X, Y) = \begin{bmatrix} -X & I \\ I & -Y \end{bmatrix}.$$

Дополнительное линейное матричное неравенство $L_3(X, Y) < 0$ в силу леммы Шура эквивалентно неравенству $X > Y^{-1}$. Поэтому в случае, когда в задаче А1 $\lambda_{min} = 0$, соответствующие матрицы X и Y являются также решением задачи А.

Для решения задачи А1 требуется минимизировать линейную функцию при ограничениях, одно из которых

$$(1.86) \quad X - Y^{-1} < \lambda I$$

не является выпуклым и, следовательно, не может быть представлено в виде линейного матричного неравенства. Это обстоятельство не позволяет решать задачу А1 методами выпуклой оптимизации. Для этого был предложен алгоритм решения задачи А1, который может быть реализован в пакете MATLAB.

Для описания алгоритма рассмотрим еще одну задачу.

Задача А2: найти

$$(1.87) \quad \lambda_{min} = \min\{\lambda : \Gamma(X, Y, G_1, G_2) < \lambda I, X > 0, Y > 0, \\ L_i(X, Y) < 0, i = 1, 2, 3\},$$

где

$$\Gamma(X, Y, G_1, G_2) = [I \quad G_1] \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ G_1 \end{bmatrix} + [G_2 \quad I] \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_2 \\ I \end{bmatrix},$$

здесь $G_i = G_i^T$, $i = 1, 2$ — некоторые заданные матрицы.

Отметим, что в задаче А2 по сравнению с задачей А1 вместо неравенства (1.86) стоит линейное матричное неравенство $\Gamma(X, Y, G_1, G_2) < \lambda I$. Так как

$$(1.88) \quad \Gamma(X, Y, G_1, G_2) = (G_1 + Y^{-1})Y(G_1 + Y^{-1}) + \\ + (G_2 + X^{-1})X(G_2 + X^{-1}) + (X - Y^{-1}) + (Y - X^{-1}) \geq 0$$

и, в силу неравенства $L_3(X, Y) < 0$, выполнено условие $X > Y^{-1}$, то когда $\lambda_{min} = 0$, соответствующие X и Y являются решением задачи А (при этом $G_1 = -Y^{-1}$ и $G_2 = -X^{-1}$).

Алгоритм состоит из следующих шагов:

- 1) $j = 0$.
- 2) Фиксируются матрицы $G_1 = G_1^{(j)}$ и $G_2 = G_2^{(j)}$.
- 3) Решается задача А2 с помощью команды `mincx` пакета MATLAB и находятся величины λ_{j+1} , X_j , Y_j .

- 4) Задаются $G_1^{(j+1)} = -Y_j^{-1}$, $G_2^{(j+1)} = -X_j^{-1}$ и осуществляется переход к шагу 2 при $j = j + 1$.

Теорема 1.9. Для любых начальных $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$ последовательность λ_j , генерируемая алгоритмом, является неубывающей и существуют следующие пределы

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda_* \geq 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} X_j = X_*, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = Y_*.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в работе [2].

Из этой теоремы следует, что возможны две ситуации. Если $\lambda_* = 0$, то $X_* Y_* = I$ и, следовательно, матрицы X_* и Y_* являются решениями задачи А. Если же $\lambda_* > 0$, то нельзя сделать определенного вывода о разрешимости задачи А. В этом случае целесообразно повторить процесс при других начальных условиях $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$, как это обычно делают в задачах глобальной оптимизации.

Следует отметить, что при синтезе робастных H_∞ регуляторов заданного порядка по выходу для линейного непрерывного и дискретного объектов требуется найти пару взаимно обратных блочно-диагональных матриц вида $\hat{X} = \text{diag}(X, S)$ и $\hat{Y} = \text{diag}(Y, \Sigma)$. Для этих случаев матрицы $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$ в алгоритме должны иметь такую же структуру.

В случае практической реализации алгоритма целесообразно применить следующее правило остановки: при выполнении одного из двух неравенств $\lambda_j < \varepsilon$ или $|\lambda_{j+1} - \lambda_j| < \varepsilon$ работа алгоритма прекращается (из теоремы следует, что алгоритм останавливается через конечное число итераций).

2. Синтез регуляторов заданного порядка в задачах ковариационного управления

2.1. НАЗНАЧЕНИЕ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Во многих задачах автоматического управления желательно синтезировать такой регулятор, чтобы среднеквадратические значения различных координат вектора состояния замкнутой

системы не превышали заданных величин. Эта задача представляет собой задачу со множественными критериями качества. Один из способов решения данной задачи заключается в назначении системе заданной ковариационной матрицы состояния [12]. Такую задачу будем называть *задачей ковариационного управления*. В рамках задачи ковариационного управления в этом разделе будут рассмотрены следующие вопросы:

- 1) описание всего множества ковариационных матриц состояния, которые можно назначить линейной системе с дискретным временем с помощью линейной обратной связи;
- 2) отыскание множества всех матриц обратной связи, которые назначают системе желаемую ковариационную матрицу состояния.

2.1.1. Ковариационное управление при полном измерении вектора состояния

Рассмотрим линейную стационарную систему с дискретным временем

$$(2.1) \quad x_{k+1} = Ax_k + B_1w_k + B_2u_k,$$

где вектор состояния $x \in \mathbb{R}^n$ полностью измерим, вектор управления $u \in \mathbb{R}^m$ представляет собой некоторый стабилизирующий закон управления в виде статической обратной связи по состоянию

$$(2.2) \quad u_k = Kx_k, \quad K: \rho(A + B_2K) < 1,$$

внешнее возмущение $w \in \mathbb{R}^p$ есть дискретная случайная последовательность типа «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $W > 0$, векторы w_k и x_0 не коррелированы. Предполагается, что пары матриц (A, B_2) и (A, B_1) , соответственно, являются стабилизируемой и управляемой. Кроме того, предполагается, что $\text{Im } B_2 \subseteq \text{Im } B_1$, т.е.

$$(2.3) \quad B_2 = B_1G$$

для некоторой матрицы G . Это предположение всегда выполняется, например, для случая аддитивной случайной помехи управления.

Пусть X — ковариационная матрица вектора состояния x :

$$X = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(x_k x_k^T).$$

Задача назначения ковариационной матрицы состояния или *задача ковариационного управления* в постановке работы [12] состоит из двух частей. Во-первых, требуется найти множество допустимых ковариационных матриц состояния \mathcal{X}_s — наибольшее множество матриц, таких что для любой матрицы $\bar{X} \in \mathcal{X}_s$ существует матрица обратной связи K , такая что $X = \bar{X}$. Во-вторых, для любой заданной матрицы $\bar{X} \in \mathcal{X}_s$ требуется найти $\mathcal{K}_s(\bar{X})$ — наибольшее множество матриц обратной связи, таких что из $K \in \mathcal{K}_s(\bar{X})$ следует $X = \bar{X}$.

Как известно, свойство управляемости инвариантно относительно обратной связи. Поскольку $B_2 = B_1 G$ и пара (A, B_1) управляема, отсюда следует, что для любой матрицы K пара $(A + B_1 G K, B_1)$ управляема. Следовательно, если обратная связь по состоянию K является стабилизирующей, то

$$(2.4) \quad X = \bar{X} > 0,$$

где матрица \bar{X} — единственное решение алгебраического уравнения Ляпунова

$$(2.5) \quad \bar{X} = (A + B_2 K) \bar{X} (A + B_2 K)^T + B_1 W B_1^T.$$

Поскольку пара $(A + B_2 K, B_1)$ управляема, матрица \bar{X} всегда положительно определена. Далее, если матрица $\bar{X} > 0$ задана, из теории устойчивости Ляпунова следует, что все матрицы K , которые удовлетворяют уравнению (2.5), являются стабилизирующими, и таким образом $X = \bar{X}$. Используя эти результаты, задачу назначения ковариационной матрицы состояния можно сформулировать следующим образом.

Задача 2.1. [12] *Для системы (2.1) требуется:*

- 1) Найти множество допустимых ковариационных матриц состояния

$$(2.6) \quad \mathcal{X}_s = \{\bar{X} : \bar{X} = \bar{X}^T > 0, \\ \exists K \text{ удовлетворяющая уравнению (2.5)}\}.$$

- 2) Для любой заданной матрицы $\bar{X} \in \mathcal{X}_s$ найти множество матриц обратной связи по состоянию

$$(2.7) \quad \mathcal{K}_s(\bar{X}) = \{K : K \text{ удовлетворяет уравнению (2.5)}\}.$$

Решение задачи 2.1 дается в форме двух теорем, сформулированных и доказанных в [12]. В первой из этих теорем дается описание множества ковариационных матриц состояния, которые можно назначить системе (2.1) с помощью линейной статической обратной связи по состоянию.

Теорема 2.1. [12] Для системы (2.1) все множество ковариационных матриц состояния, которые можно назначить данной системе с помощью матрицы обратной связи по состоянию K , имеет вид

$$(2.8) \quad \mathcal{X}_s = \{\bar{X} : \bar{X} \text{ удовлетворяет условиям (2.9)–(2.11)}\},$$

где

$$(2.9) \quad \bar{X} = \bar{X}^T > 0,$$

$$(2.10) \quad \bar{X} - B_1 W B_1^T \geq 0,$$

$$(2.11) \quad (I - B_2 B_2^\dagger)(A \bar{X} A^T - \bar{X} + B_1 W B_1^T)(I - B_2 B_2^\dagger) = 0,$$

и B_2^\dagger обозначает псевдообращение матрицы B_2 по Муру-Пенроузу.

Замечание 2.1. [12] Из условия (2.10) следует, что дисперсия каждого элемента вектора состояния ограничена снизу соответствующими диагональными элементами матрицы $B_1 W B_1^T$:

$$\mathbf{E}(x_{k(i)}^2) \geq [B_1 W B_1^T]_{ii}.$$

Замечание 2.2. [12] Множество всех решений \bar{X} уравнения (2.11) является линейным многообразием (т.е. все точки линии между любыми двумя точками множества \bar{X} также принадлежат данному множеству). Этот факт используется в работе [11] для разработки итерационного метода на основе линейного программирования для генерации допустимых ковариационных матриц состояния, удовлетворяющих ограничениям на диагональные элементы.

Следующая теорема устанавливает параметризацию множества линейных статических обратных связей по состоянию, назначающих замкнутой системе заданную ковариационную матрицу состояния.

Теорема 2.2. [12] Рассмотрим систему (2.1). Пусть задана матрица $\bar{X} \in \mathcal{X}_s$, а матрица T такова, что $TT^T = \bar{X}$. Пусть матрицы

$$N \triangleq (I - B_2 B_2^\dagger)(\sqrt{\bar{X} - B_1 W B_1^T}) \quad \text{и} \quad P \triangleq (I - B_2 B_2^\dagger)AT$$

обе имеют ранг r и сингулярные разложения

$$N = L\Lambda E^T \quad \text{и} \quad P = L\Lambda F^T,$$

где матрицы L, E и F ортонормированные, $\Lambda = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n_x}\}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{n_x}$. Системе (2.1) можно назначить ковариационную матрицу состояния \bar{X} (т.е. $X = \bar{X}$) тогда и только тогда, когда $K \in \mathcal{K}_s(\bar{X})$ и

$$(2.12) \quad \mathcal{K}_s(\bar{X}) \triangleq \left\{ K: K = B_2^\dagger \left(\sqrt{\bar{X} - B_1 W B_1^T} E \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & U_0 \end{bmatrix} F^T T^{-1} - A \right) + (I_m - B_2^\dagger B_2)Y \right\},$$

где $U_0 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ — произвольная ортонормированная матрица, $Y \in \mathbb{R}^{n \times u}$ — произвольная матрица.

Замечание 2.3. [12] Отметим, что для любой стабилизирующей матрицы обратной связи K существует ковариационная матрица состояния $\bar{X}' \in \mathcal{X}_s$ такая, что $K \in \mathcal{K}_s(\bar{X}')$.

Таким образом, матрицы обратной связи, получаемые с помощью любого метода синтеза, могут также генерироваться посредством подходящего выбора $\bar{X} \in \mathcal{X}_s$ и матриц U_0, Y в выражении (2.12).

Замечание 2.4. [12] Если матрица B_2 имеет полный столбцовый ранг и матрица A невырождена, то $r = n - m$ и $I_m - B_2^\dagger B_2 = 0$. Тогда множество матриц обратной связи $\mathcal{K}_s(\bar{X})$ порождается ортонормированной матрицей $U_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Замечание 2.5. [12] В предположении выполнения условий замечания 2.4, для системы с одним входом множество $\mathcal{K}_s(\bar{X})$ состоит максимум из двух матриц обратной связи, поскольку $U_0 = \pm 1$. Для системы с многомерным входом в общем случае множество $\mathcal{K}_s(\bar{X})$ будет содержать более двух элементов.

Из приведенных выше результатов очевидно, что матрица обратной связи, которая назначает системе допустимую ковариационную матрицу состояния, обычно не является единственной. Это свойство можно использовать для достижения вторичных целей, например, уменьшения дисперсий отдельных входов системы [12].

2.1.2. Ковариационное управление по измеряемому выходу

В предыдущем параграфе предполагалось, что вектор состояния системы можно измерять точно. Однако на практике такой случай является чрезвычайно редким. В большинстве инженерных систем измерения подвергаются воздействию шумов, и число измерений меньше, чем число состояний. В таких случаях можно оценить вектор состояния и синтезировать закон управления в виде обратной связи по этой оценке [12]. Для оценки вектора состояния используется фильтр Калмана [29, 31].

Рассмотрим линейную стационарную систему с дискретным временем

$$(2.13) \quad \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & 0 & B_2 \\ C & 0 & I_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ v_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $y \in \mathbb{R}^q$ — измеряемый выход, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, $w \in \mathbb{R}^p$ и $v \in \mathbb{R}^q$ — дискретные случайные последовательности типа «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами $W > 0$ и $V > 0$, соответственно, и взаимной ковариационной матрицей

$$R_{wv} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(w_k v_k^T),$$

а w_k и v_k не коррелированы с x_0 . Предполагается, что пара (A, B_2) стабилизируема, пара (A, B_1) управляема, а пара (A, C) детектируема. Управление u представляет собой некоторый стабилизирующий закон управления в виде обратной связи

$$(2.14) \quad u_k = K \hat{x}_k,$$

где оценка состояния \hat{x} генерируется фильтром Калмана

$$(2.15) \quad \hat{x}_{k+1} = A \hat{x}_k + B_2 u_k + G(y_k - C \hat{x}_k),$$

а матрица усиления фильтра G удовлетворяет алгебраическому уравнению Риккати

$$(2.16) \quad \begin{cases} G = (APC^T + R_{wc})(V + CPC^T)^{-1}, \\ P = (A - GC)PA^T + B_1WB_1^T - GR_{wv}^T, \end{cases}$$

где P — ковариационная матрица ошибки оценивания, $P = \mathbf{E}((x - \hat{x})(x - \hat{x})^T)$.

Для любой матрицы K , такой что матрица $A + B_2K$ устойчива по Шуру (т.е. $\rho(A + B_2K) < 1$), ковариационная матрица оценки вектора состояния равна $\hat{X} = \hat{X}$, где матрица \hat{X} удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$(2.17) \quad \hat{X} = (A + B_2K)\hat{X}(A + B_2K)^T + G(CPC^T + V)G^T.$$

Известно, что для фильтра Калмана (2.15) вектор состояния объекта (2.13) и вектор оценки состояния некоррелированы, т.е. $\mathbf{E}(\hat{x}(x - \hat{x})^T) = 0$. Таким образом, ковариационная матрица состояния объекта (2.13) определяется выражением

$$(2.18) \quad X = \hat{X} + P.$$

Поскольку матрица P не зависит от K , можно назначить ковариационную матрицу состояния X посредством выбора K для назначения заданной ковариационной матрицы состояния \hat{X} . Задача назначения ковариационной матрицы состояния с помощью обратной связи по оценке состояния формулируется следующим образом.

Задача 2.2. [12] Для системы (2.13) требуется:

- 1) Найти множество допустимых ковариационных матриц оценки состояния
(2.19)

$$\hat{\mathcal{X}}_s = \{\hat{X} : \hat{X} > 0, \exists K \text{ удовлетворяющая уравнению (2.17)}\}.$$

- 2) Для любой матрицы $\hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}_s$ найти множество стабилизирующих матриц обратной связи по оценке состояния
(2.20)

$$\hat{\mathcal{K}}_s(\hat{X}) = \{K : K \text{ удовлетворяет уравнению (2.17)}\}.$$

Тогда множество ковариационных матриц состояния, которые можно назначить системе (2.13), имеет вид

$$(2.21) \quad \mathcal{X}_s = \{\bar{X} : \bar{X} = \hat{X} + P, \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}_s\},$$

и для любой матрицы $\bar{X} \in \mathcal{X}_s$ множество матриц обратной связи K , для которых $X = \bar{X}$, имеет вид

$$(2.22) \quad \mathcal{K}_s(\bar{X}) = \hat{\mathcal{K}}_s(\bar{X} - P).$$

Рассмотрим подход к решению задачи 2.2, представленный в [12]. Отметим, что приведенная выше постановка задачи для системы (2.13) очень похожа по форме на постановку задачи 2.1 для системы с полностью измеримым вектором состояния. Однако, существует важное отличие. При решении задачи 2.1 использовалась теория устойчивости Ляпунова для того, чтобы показать, что для заданной ковариационной матрицы состояния \bar{X} , если решение K уравнения (2.5)

существует, все решения являются стабилизирующими матрицами обратной связи. Это утверждение зависело от предположений управляемости пары (A, B_1) и выполнения условия $\text{Im } B_2 \subseteq \text{Im } B_1$. К сожалению, даже если эти предположения сделаны для системы (2.13), из этого не следует, что пара (A, G) управляема или $\text{Im } B_2 \subseteq \text{Im } G$, если только число линейно независимых измерений не равно числу состояний. Поэтому в общем случае невозможно использовать теорию устойчивости Ляпунова для того, чтобы гарантировать, что если при заданной ковариационной матрице состояния \hat{X} решение K уравнения (2.17) существует, то все решения являются стабилизирующими матрицами обратной связи. Фактически, используя теорию устойчивости Ляпунова, невозможно гарантировать, что какое-либо из решений уравнения (2.17) является стабилизирующим. Поэтому простое описание множеств (2.19) и (2.20) не может быть получено из (2.17) так же просто, как их эквиваленты для случая обратной связи по состоянию.

Тем не менее, можно получить стабилизирующую матрицу обратной связи K с помощью добавления фиктивного «шума» к уравнению (2.17):

$$(2.23) \quad \hat{X} = (A + BK)\hat{X}(A + BK)^T + \\ + G(CPC^T + V)G^T + \epsilon B_1 S B_1^T,$$

где $S > 0$. Тогда предположение управляемости пары $(A + B_2 K, B_1)$ гарантирует, что при любом допустимом выборе матрицы $\hat{X} > 0$ матрица $A + B_2 K$ устойчива по Шуру. Таким образом, используя подход, разработанный для случая полного измерения вектора состояния, можно описать множество

$$(2.24) \quad \hat{\mathcal{X}}_s^\epsilon = \{\hat{X} : \hat{X} > 0, \\ \exists K \text{ удовлетворяющая уравнению (2.23)}\}.$$

Также, для любой матрицы $\hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}_s^\epsilon$ можно описать множество

$$(2.25) \quad \hat{\mathcal{K}}_s^\epsilon(\hat{X}) = \{K : K \text{ удовлетворяет уравнению (2.23)}\}.$$

Множества $\widehat{\mathcal{X}}_s^\epsilon$ и $\widehat{\mathcal{K}}_s^\epsilon(\widehat{X})$ могут рассматриваться, как аппроксимации множеств $\widehat{\mathcal{X}}_s$ и $\widehat{\mathcal{K}}_s(\widehat{X})$ [12]. Множества $\widehat{\mathcal{X}}_s^\epsilon$ и $\widehat{\mathcal{K}}_s^\epsilon(\widehat{X})$ обладают свойством, представленным следующей теоремой.

Теорема 2.3. [12] Пусть $\widehat{X} \in \widehat{\mathcal{X}}_s^\epsilon$. Тогда для любой матрицы обратной связи $K \in \widehat{\mathcal{K}}_s^\epsilon(\widehat{X})$ система (2.13) обладает следующим свойством:

$$\widehat{X} \leq \widehat{X}.$$

Из приведенных выше результатов следует, что если использовать множества, определяемые выражениями (2.24) и (2.25) для отыскания матрицы обратной связи K , то ковариационные матрицы состояния и входа системы (2.13) будут удовлетворять неравенствам

$$X \leq \widehat{X} + P \quad \text{и} \quad U = KXK^T \leq K(\widehat{X} + P)K^T.$$

Таким образом, ковариационные матрицы состояния и входа системы (2.13) всегда меньше, чем их приближенные значения, вычисленные с использованием модифицированного уравнения Ляпунова (2.23). Поэтому при выборе достаточно малого значения ϵ

$$X \cong \widehat{X} + P \quad \text{и} \quad U \cong K(\widehat{X} + P)K^T.$$

2.2. КОВАРИАЦИОННЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ ЗАДАННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В этом разделе мы рассмотрим задачу синтеза динамического ковариационного регулятора заданного порядка для дискретной линейной стационарной системы. В рамках этой задачи будет дано описание множества всех ковариационных матриц состояния, которые могут быть назначены линейной стационарной системе с дискретным временем с помощью динамического регулятора заданного порядка [25]. На основе этого результата будет представлено явное описание в замкнутой форме всех стабилизирующих регуляторов, назначаемых системе заданную ковариационную матрицу. Для всего множества таких регуляторов будет приведена параметризация с помощью двух ортогональных матриц.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную стационарную систему с дискретным временем

$$(2.26) \quad \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_{1p} & B_{2p} \\ C_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $y \in \mathbb{R}^q$ — измеряемый выход, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, $w \in \mathbb{R}^p$ и $v \in \mathbb{R}^q$ — дискретные случайные последовательности типа «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $W > 0$:

$$\mathbf{E}(w_i w_j^T) = W \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Требуется найти все динамические регуляторы заданного порядка n_c

$$(2.27) \quad \begin{bmatrix} \xi_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ y_k \end{bmatrix},$$

которые стабилизируют замкнутую систему, а также назначают заданное значение ковариационной матрицы состояния замкнутой системы

$$(2.28) \quad X \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\begin{bmatrix} x_k \\ \xi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^T & \xi_k^T \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} X_p & X_{pc} \\ X_{pc}^T & X_c \end{bmatrix}.$$

Ковариационная матрица состояния установившегося режима замкнутой системы удовлетворяет следующему уравнению Ляпунова

$$(2.29) \quad X = (A_0 + B_{02}GC_0)X(A_0 + B_{02}GC_0)^T + B_{01}WB_{01}^T,$$

где

$$A_0 \triangleq \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & B_{p1} \end{bmatrix}, \quad B_{01} \triangleq \begin{bmatrix} B_{p1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{02} \triangleq \begin{bmatrix} B_{p2} & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix},$$

$$C_0 \triangleq \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix}, \quad G \triangleq \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}.$$

Такая задача называется *задачей назначения ковариационной матрицы состояния*. Для непрерывных систем данная задача была решена в [45].

Мотивация для такого подхода в управлении заключается в том, что многие важные свойства системы могут быть описаны в терминах ковариационной матрицы состояния, включая следующее [25]:

- 1) Все устойчивые системы имеют конечные ковариационные матрицы состояния. Следовательно, описание всех ковариационных матриц, которые можно назначить линейной системе, также параметризует класс всех стабилизирующих регуляторов. Это дает дополнение во временной области к параметризации Юлы всех стабилизирующих регуляторов в частотной области.
- 2) Среднеквадратические ошибки входов, выходов и состояний системы явно представлены в ковариационной матрице в виде ее элементов.
- 3) Многие робастные свойства системы напрямую связаны с ковариационной матрицей состояния. Рассмотрим замкнутую систему

$$(2.30) \quad \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}.$$

Для системы (2.30) справедливы следующие оценки

$$(2.31) \quad \|y\|_{\infty}^2 \leq \bar{\sigma}(C_{cl} X C_{cl}^T) \|w\|_2^2,$$

$$(2.32) \quad \bar{\sigma}(\Delta A) \leq \frac{\sigma(B_{cl} W B_{cl}^T)^{1/2}}{\bar{\sigma}(X (B_{cl} W B_{cl}^T)^{-1/2})},$$

где \mathcal{L}_{∞} - и \mathcal{L}_2 -нормы определяются следующим образом

$$\|y\|_{\infty}^2 \doteq \sup_k y_k^T y_k, \quad \|w\|_2^2 \doteq \sum_{k=0}^{\infty} w_k^T w_k.$$

Неравенство (2.31) выражает оценку сверху для выхода системы при любом входном сигнале из \mathcal{L}_2 . Неравенство (2.32) оценивает верхнюю границу параметрического возмущения, для которого гарантируется устойчивость системы. Отметим явную зависимость этих оценок от ковариационной матрицы состояния X системы (2.30).

Решение задачи представлено в [25]. Пусть \bar{X} — предписанное значение ковариационной матрицы состояния замкнутой системы. Если существует множество матриц (A_c, B_c, C_c, D_c) таких, что замкнутая система (2.26), (2.27) устойчива и $X = \bar{X}$, то \bar{X} называется назначаемой ковариационной матрицей. Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия назначаемости ковариационной матрицы X .

Теорема 2.4. [25] *Для замкнутой системы (2.26), (2.27) ковариационная матрица состояния X является назначаемой тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:*

- 1) $X - B_{01}WB_{01}^T \geq 0$,
- 2) $U_{b2}^T(X_p - B_{p1}WB_{p1}^T - A_pX_pA_p^T)U_{b2} = 0$,
- 3) $\Psi_2\Psi_2^\dagger\Theta\Pi_2^\dagger\Pi_2 = \Theta$,
- 4) $\widehat{\Omega} \geq 0$,
- 5) $\text{rank } \widehat{\Omega} \leq \min\{r_\psi, n + n_c - n_1 - r_\pi\}$,

где

$$\begin{bmatrix} U_{b1} & U_{b2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{B_{p2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{b1}^T \\ V_{b2}^T \end{bmatrix} = B_{p2},$$

$$\begin{bmatrix} U_{m1} & U_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{C_p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m1}^T \\ V_{m2}^T \end{bmatrix} = C_p$$

— сингулярные разложения матриц B_{p2} и C_p , соответственно;

$$X = TT^T, \quad Q \triangleq X - B_{01}WB_{01}^T = LL^T, \quad U_{B2} \triangleq \begin{bmatrix} U_{b2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$V_{M2} \triangleq \begin{bmatrix} V_{m2} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$N \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F^T = U_{B2}^T L, \quad N \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} E^T = U_{B2}^T A_0 T,$$

$$\Lambda \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$$

— сингулярные разложения матриц $U_{B2}^T L$ и $U_{B2}^T A_0 T$, соответственно;

$$LF = [\Psi_1 \quad \Psi_2], \quad E^T T^{-1} V_{M2} = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix}, \quad \Theta \triangleq A_0 V_{M2} - \Psi_1 \Pi_1,$$

$$\Psi_1 \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times n_1}, \quad \Psi_2 \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c-n_1)},$$

$$\Pi_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times (n-r_m)}, \quad \Pi_2 \in \mathbb{R}^{(n+n_c-n_1) \times (n-r_m)};$$

$$[U_{\psi_1} \quad U_{\psi_2}] \begin{bmatrix} \Sigma_{\Psi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\psi_1}^T \\ V_{\psi_2}^T \end{bmatrix} = \Psi_2,$$

$$[U_{\pi_1} \quad U_{\pi_2}] \begin{bmatrix} \Sigma_{\Pi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\pi_1}^T \\ V_{\pi_2}^T \end{bmatrix} = \Pi_2,$$

$$\Sigma_{\Psi} \in \mathbb{R}^{r_{\psi} \times r_{\psi}}, \quad \Sigma_{\Pi} \in \mathbb{R}^{r_{\pi} \times r_{\pi}}$$

— сингулярные разложения матриц Ψ_2 и Π_2 , соответственно; и

$$\widehat{\Phi} \triangleq \Sigma_{\Psi}^{-1} U_{\psi_1}^T \Theta V_{\pi_1} \Sigma_{\Pi}^{-1}, \quad \widehat{\Omega} \triangleq I - \widehat{\Phi} \widehat{\Phi}^T.$$

Замечание 2.6. [25] Условия 1 и 2 теоремы 2.4 являются условиями назначаемости ковариационной матрицы состояния для регуляторов в виде статической обратной связи по состоянию. Следовательно, ковариационная матрица X_p не может быть назначена системе никаким динамическим регулятором, если она не может быть назначена матрицей обратной связи по состоянию.

Замечание 2.7. [25] Если $X > B_{01} W B_{01}^T$, то условие 5 теоремы 2.4 эквивалентно условию

$$\text{rank } \widehat{\Omega} \leq n + n_c - n_1 - r_{\pi}.$$

Более того, если матрицы B_{p1} и C_p полного ранга, то $n_1 = n - m$, и условие 5 приобретает вид

$$\text{rank } \widehat{\Omega} \leq m + n_c - r_\pi.$$

Замечание 2.8. [25] Условие 3 теоремы 2.4 можно заменить условиями

$$U_{\psi 2}^T \Theta = 0, \quad \Theta V_{\pi 2} = 0.$$

Следующая теорема дает описание множества всех регуляторов, назначающих ковариационную матрицу состояния X замкнутой системе.

Теорема 2.5. [25] Пусть ковариационная матрица X является назначаемой для системы (2.26), (2.27), или, что эквивалентно, уравнение (2.29) разрешимо относительно матрицы G при заданной матрице X . Тогда все регуляторы G , которые назначают системе (2.26), (2.27) ковариационную матрицу состояния X , имеют вид

$$(2.33) \quad G = B_{02}^\dagger (LV_1 T^{-1} - A_0) C_0^\dagger + B_{02}^\dagger B_{02} Z C_0 C_0^\dagger - Z,$$

где

$$V_1 = F \left[\begin{array}{c|c} I_{n_1} & 0 \\ \hline 0 & V_\psi \left[\begin{array}{c|c} \widehat{\Phi} & \widehat{U}_\Omega \widehat{\eta} V_3 \\ \hline V_4 \widehat{\Sigma}_\Gamma^{1/2} U_{\Gamma 1}^T & U_\pi^T \end{array} \right] \end{array} \right] E^T,$$

$$V_3 \in \mathbb{R}^{(n+n_c-n_1-r_\pi) \times (n+n_c-n_1-r_\pi)},$$

$$V_4 \in \mathbb{R}^{(n+n_c-n_1-r_\psi) \times (n+n_c-n_1-r_\psi)}$$

— произвольные ортогональные матрицы,

$$Z \in \mathbb{R}^{(m+n_c) \times (q+n_c)}$$

— произвольная матрица;

$$\widehat{U}_\Omega \begin{bmatrix} \widehat{\Sigma}_\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \widehat{U}_\Omega^T = \widehat{\Omega}$$

— сингулярное разложение матрицы $\widehat{\Omega}$;

$$\widehat{\eta} \triangleq \begin{bmatrix} \widehat{\Sigma}_{\Omega}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\eta} \in \mathbb{R}^{r_{\psi} \times (n+n_c-n_1-r_{\pi})},$$

$$\widehat{\Gamma} \triangleq I - \Lambda_1^T \Lambda_1 = \widehat{U}_{\Gamma} \begin{bmatrix} \widehat{\Sigma}_{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \widehat{U}_{\Gamma}^T,$$

$$\Lambda_1 \triangleq [\widehat{\Phi} \quad \widehat{U}_{\Omega} \widehat{\eta} V_3], \quad \widehat{U}_{\Gamma} = [U_{\Gamma 1} \quad U_{\Gamma 2}].$$

Замечание 2.9. [25] В общем случае в структуре регулятора G имеются три свободных параметра — матрицы V_3, V_4 и Z . В случае, когда матрицы B_{p2} и C_p полного ранга, последние два слагаемых в выражении (2.33) сокращаются, и остается лишь два свободных параметра V_3 и V_4 :

$$(2.34) \quad G = B_{02}^{\dagger} (L V_1 T^{-1} - A_0) C_0^{\dagger}.$$

Замечание 2.10. [25] Матрица $B_{01} W B_{01}^T$ является нижней границей X . В общем случае на практике нет необходимости синтезировать регулятор для достижения этой нижней границы. Поэтому можно потребовать выполнения условия $X > B_{01} W B_{01}^T$, и в таком случае свободный параметр V_4 сокращается, и остается лишь один свободный параметр V_3 . В этом случае

$$V_1 = F \left[\frac{I_{n_1} \mid 0}{0 \mid V_{\psi} [\widehat{\Phi} \mid \widehat{U}_{\Omega} \widehat{\eta} V_3] U_{\pi}^T} \right] E^T,$$

и матрица параметров регулятора G определяется выражением (2.34).

Замечание 2.11. [25] Размерность матрицы V_3 зависит от ранга матрицы Π_2 . Если $r_{\pi} = n + n_c - n_1 + 1$ или $r_{\pi} = n_c + m - 1$ при условиях замечания 2.10, то матрица $V_3 = \pm 1$. Если матрица Π_2 имеет полный строчный ранг, ковариационный регулятор является единственным.

Замечание 2.12. [25] Устойчивость замкнутой системы гарантируется, если пара $(A_0 + B_{02} G C_0, B_{01} \sqrt{W})$ управляема.

В теореме 2.5 дано описание множества всех регуляторов, которые назначают замкнутой системе заданную ковариационную матрицу состояния. Порядок регулятора определяется *a priori*, а описание множества всех регуляторов дается в замкнутой форме в терминах матриц реализации объекта управления, поэтому решение данной задачи синтеза не требует ни редукции модели, ни редукции регулятора. Это является важной особенностью ковариационных регуляторов. Свободными параметрами регулятора являются две ортогональные матрицы, и эти матрицы можно выбирать так, чтобы обеспечить выполнение дополнительных целей управления, кроме назначения ковариационной матрицы состояния (например, обеспечение минимальную энергию управления или робастности). Описание всего множества ковариационных регуляторов представляет собой параметризацию во временной области класса всех стабилизирующих регуляторов. Класс параметризован постоянной матрицей X (ковариационной матрицей состояния замкнутой системы) и двумя произвольными ортогональными матрицами V_3 и V_4 .

2.3. ЕДИНЫЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ РЕГУЛЯТОРОВ ЗАДАННОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

В этом разделе рассматривается синтез регуляторов заданного (или пониженного) порядка, которые удовлетворяют определенным требованиям к качеству и/или к робастности. А именно, будут рассмотрены следующие три задачи [27]:

- 1) задача ковариационного управления (в качестве задачи подавления внешних возмущений);
- 2) задача Q -стабилизации (задача робастной стабилизации); и
- 3) робастная задача \mathcal{L}_∞ -оптимизации (как задача робастного качества).

Решения всех трех задач управления будут представлены в виде единой задачи линейной алгебры — решения линейного матричного неравенства вида

$$BGC + (BGC)^T + Q < 0$$

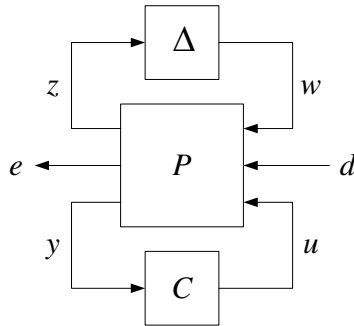


Рис. 4. Конфигурация системы управления

относительно неизвестной матрицы G [27].

В первой задаче в качестве меры для уровня подавления возмущений используется ковариационная матрица сигнала ошибки при возбуждении системы белым шумом, поскольку ограничение значений элементов на главной диагонали ковариационной матрицы сигнала ошибки соответствует ограничению дисперсий компонентов вектора сигнала ошибки. Такая матричнозначная мера качества дает естественный подход к решению задач управления со множественными критериями качества. Задача заключается в синтезе стабилизирующего регулятора заданного порядка, который обеспечивает ограниченность сверху ковариационной матрицы ошибки замкнутой системы заданной матрицей. В качестве задачи робастной стабилизации рассматривается синтез регулятора, робастно стабилизирующего линейную стационарную систему с ограниченной по норме переменной структурированной неопределенностью. Третья задача — задача робастного качества — состоит в синтезе Q -стабилизирующего регулятора для объекта с неопределенностью, гарантирующего ограниченность пиковых значений сигнала ошибки при возмущении единичной энергии для всех допустимых структурированных неопределенностей.

Рассмотрим систему управления с обратной связью, блок-диаграмма которой изображена на рис. 4, где P — обобщенный объект управления, C — регулятор и Δ — неопределенность. В этом разделе будут рассматриваться следующие за-

дачи управления:

- *Подавление внешних возмущений*: Требуется найти регулятор C для номинального объекта управления P ($\Delta \equiv 0$), такой что сигнал ошибки e достаточно мал в некотором смысле при отклике на определенный класс возмущающих воздействий d .
- *Робастная стабилизация*: Требуется найти регулятор C , обеспечивающий внутреннюю устойчивость замкнутой системы для всех возмущений Δ , принадлежащих известному классу множества неопределенностей $\beta\Delta$.
- *Робастное качество*: Требуется найти регулятор C , обеспечивающий внутреннюю устойчивость замкнутой системы и достаточное подавление сигнала ошибки e при отклике на определенный класс возмущающих воздействий d для всех неопределенностей Δ из множества неопределенностей $\beta\Delta$.

Формальные постановки перечисленных концептуальных задач управления будут выполнены в следующем параграфе. Рассмотрим линейную стационарную систему с непрерывным временем с ограниченной по норме переменной структурированной неопределенностью:

$$(2.35) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 & B_2 \\ \hline C_0 & D_{00} & D_{01} & D_{02} \\ C_1 & D_{10} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{20} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ d(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$

$$w(t) = \Delta(t)z(t),$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_p}$ — состояние, $d \in \mathbb{R}^{n_d}$ — внешнее возмущение, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ — управление, $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ — сигнал ошибки, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ — измеряемый выход, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ и $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ — экзогенные сигналы, введенные для описания неопределенности Δ . Для простоты полагается $n_w = n_z$. Известно, что неопределенность Δ принадлежит к следующему множеству:

$$(2.36) \quad \beta\Delta = \{\Delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_w \times n_z}, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1, \Delta(t) \in \Delta\},$$

где

$$\Delta \triangleq \{\text{blockdiag}(\delta_1 I_{k_1}, \dots, \delta_s I_{k_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_f) : \\ \delta_i \in \mathbb{R}, \Delta_i \in \mathbb{R}^{k_{s+i} \times k_{s+i}}\}.$$

Для регулятора в виде статической обратной связи по выходу

$$u(t) = Gy(t)$$

замкнутая система описывается уравнениями

$$(2.37) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B}_0 & \widehat{B}_1 \\ \widehat{C}_0 & \widehat{D}_{00} & \widehat{D}_{01} \\ \widehat{C}_1 & \widehat{D}_{10} & \widehat{D}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ d(t) \end{bmatrix},$$

где матрицы реализации замкнутой системы определяются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B}_0 & \widehat{B}_1 \\ \widehat{C}_0 & \widehat{D}_{00} & \widehat{D}_{01} \\ \widehat{C}_1 & \widehat{D}_{10} & \widehat{D}_{11} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 \\ C_0 & D_{00} & D_{01} \\ C_1 & D_{10} & D_{11} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{02} \\ D_{12} \end{bmatrix} G [C_2 \mid D_{20} \quad D_{21}],$$

где матрица предполагается $D_{22} = 0$ для гарантии корректности соединения обратной связи. Для динамического регулятора в форме наблюдателя

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

с состоянием $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ замкнутая система имеет в точности такую же структуру, что и уравнения (2.37) для замкнутой системы со статической обратной связью, но при этом матрицы объекта управления и параметров регулятора должны

быть заменены следующими расширенными матрицами:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A & B_0 & B_1 & B_2 \\ \hline C_0 & D_{00} & D_{01} & D_{02} \\ C_1 & D_{10} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{20} & D_{21} & G^T \end{array} \right] \leftarrow \left[\begin{array}{cc|cccc} A & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_\xi} \\ \hline C_0 & 0 & D_{00} & D_{01} & D_{02} & 0 \\ C_1 & 0 & D_{10} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ C_2 & 0 & D_{20} & D_{21} & D_c^T & B_c^T \\ 0 & I_{n_\xi} & 0 & 0 & C_c^T & A_c^T \end{array} \right],$$

соответствующими расширенному вектору состояния $[x^T(t) \ \xi^T(t)]^T$. Поэтому задача синтеза динамического регулятора заданного порядка может рассматриваться как частный случай задачи синтеза регулятора в виде статической обратной связи по выходу. Отметим, что в данном случае стандартное предположение $D_{12}^T D_{12} > 0$ является ограничивающим, поскольку расширенная матрица $[D_{12} \ 0]$ для динамического регулятора никогда не будет иметь полного столбцового ранга. Для простоты предполагается $B_2^T B_2 > 0$ и $C_2 C_2^T > 0$.

2.4. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Задача подавления внешних возмущений. В качестве задачи подавления внешних возмущений, рассмотрим задачу ковариационного управления. Рассмотрим непрерывный линейный стационарный объект управления

$$(2.38) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

с регулятором в виде статической обратной связи по выходу $u(t) = Gy(t)$, где d — белый шум с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей I . Обозначим

$$E \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(e(t)e^T(t))$$

ковариационную матрицу сигнала ошибки $e(t)$.

Задача 2.3. [27] Пусть задана положительно определенная матрица $\bar{E} > 0$. Требуется определить, существует ли матрица статической обратной связи по выходу G , такая что $E < \bar{E}$, и получить формулу для такого регулятора.

Матричнозначный стохастический критерий качества E можно использовать для определения детерминистических критериев качества. Например, как известно, H_2 -норма передаточной матрицы $T_{ed}(s)$ от возмущения d к ошибке e

$$\|T_{ed}\|_2^2 = \text{tr } E.$$

Следующая лемма [27] устанавливает условия, при которых регулятор G является стабилизирующим и обеспечивает ограниченность ковариационной матрицы сигнала ошибки E заданной матрицей.

Лемма 2.1. [27] Пусть заданы матрица $\bar{E} > 0$ и регулятор G . Следующие утверждения эквивалентны.

- 1) Регулятор G является стабилизирующим и $E < \bar{E}$.
- 2) Существует матрица $P > 0$ такая, что

$$(2.39) \quad \begin{aligned} \hat{A}P + P\hat{A}^T + \hat{B}_1\hat{B}_1^T &< 0, \\ \hat{C}_1P\hat{C}_1^T &< \hat{E}. \end{aligned}$$

Задача робастной стабилизации. В связи с постановкой задачи робастной стабилизации, рассмотрим следующую систему с неопределенностью

$$(2.40) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_0 & B_2 \\ C_0 & D_{00} & D_{02} \\ C_2 & D_{20} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$

$$w(t) = \Delta(t)z(t),$$

с регулятором в виде статической обратной связи по выходу $u(t) = Gy(t)$, где неопределенность Δ принадлежит множеству $\beta\Delta$, определенному формулой (2.36).

Для постановки задачи робастной стабилизации необходимо ввести понятие Q -устойчивости [27].

Определение 2.1. *Линейная система с неопределенностью (2.40) называется Q -устойчивой в отношении множества неопределенностей $\beta\Delta$, если передаточная функция T_{zw} от внешнего возмущения w к выходу z является устойчивой и существует матрица $S \in \mathcal{S}$ такая, что $\|ST_{zw}S^{-1}\|_\infty < 1$, где масштабирующее множество \mathcal{S} , соответствующее $\beta\Delta$, определяется следующим образом*

$$\mathcal{S} \triangleq \{\text{blockdiag}(S_1, \dots, S_s, s_1 I_{k_{s+1}}, \dots, s_f I_{k_{s+f}}) : \\ S_i \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, s_i \in \mathbb{R}, S_i > 0, s_i > 0\}.$$

Задача робастной стабилизации формулируется следующим образом.

Задача 2.4. [27] *Требуется определить, существует ли матрица статической обратной связи по выходу G , обеспечивающая Q -стабилизацию замкнутой системы, и получить формулу для такого регулятора.*

Следующая лемма характеризует Q -устойчивость замкнутой системы.

Лемма 2.2. [27] *Пусть задан регулятор G для системы с неопределенностью (2.40). Следующие утверждения эквивалентны.*

- 1) Система (2.40), замкнутая регулятором G , является Q -устойчивой для неопределенности $\Delta \in \beta\Delta$.
- 2) Существуют матрицы $P > 0$ и $S \in \mathcal{S}$ такие, что

$$(2.41) \quad \begin{bmatrix} P\hat{A} + \hat{A}^T P + \hat{B}_0 S \hat{B}_0^T & P\hat{C}_0^T + \hat{B}_0 S \hat{D}_{00}^T \\ \hat{C}_0 P + \hat{D}_{00} S \hat{B}_0^T & \hat{D}_{00} S \hat{D}_{00}^T - S \end{bmatrix} < 0.$$

Задача робастного качества. В качестве задачи робастного качества рассмотрим робастную задачу \mathcal{L}_∞ -управления. Рассмотрим следующую систему с неопределенностью

$$(2.42) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & D_{00} & D_{01} & D_{02} \\ C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & D_{20} & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ d(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \\ w(t) = \Delta(t)z(t),$$

с регулятором в форме статической обратной связи по измеряемому выходу $u(t) = Gy(t)$, где неопределенность $\Delta \in \beta\Delta$. Пусть пиковое значение сигнала ошибки e определяется выражением

$$\widehat{J}(G, \Delta, d) \triangleq \|e\|_{\mathcal{L}_\infty}^2 = \sup_{t \geq 0} \{e^T(t)e(t)\},$$

где e — сигнал ошибки замкнутой системы с регулятором G под воздействием внешнего возмущения d при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$ в присутствии возмущения Δ . Определим наихудшее пиковое значение сигнала ошибки следующим образом:

$$J(G) \triangleq \sup_{\Delta, d} \left\{ \widehat{J}(G, \Delta, d) : \int_0^x d^T(t)d(t)dt \leq 1, \Delta \in \beta\Delta \right\}.$$

Задача 2.5. [27] Пусть задано число $\gamma > 0$. Требуется найти матрицу статической обратной связи по выходу G , обеспечивающую Q -стабилизацию замкнутой системы и выполнение условия $J(G) < \gamma$.

Практическая значимость данной задачи заключается в том, что ограниченность пикового значения сигнала ошибки e значением $\sqrt{\gamma}$ гарантируется для любого возмущения d с единичной энергией и для любой структурированной неопределенности $\Delta \in \beta\Delta$ с ограниченной нормой.

Следующая лемма [27] устанавливает условия, при которых регулятор G обеспечивает Q -стабилизацию замкнутой системы и выполнение условия ограниченности функционала качества $J(G)$.

Лемма 2.3. [27] Пусть задан регулятор G для системы с неопределенностью (2.42). Следующие утверждения эквивалентны.

- 1) Система (2.42), замкнутая регулятором G , является Q -устойчивой для неопределенности $\Delta \in \beta\Delta$.
- 2) Существуют матрицы $P > 0$ и $S \in \mathcal{S}$ такие, что

$$(2.43) \quad \begin{bmatrix} P\widehat{A} + \widehat{A}^T P + \widehat{B}_0 S \widehat{B}_0^T + \widehat{B}_1 \widehat{B}_1^T & P\widehat{C}_0^T + \widehat{B}_0 S \widehat{D}_{00}^T + \widehat{B}_1 \widehat{D}_{01}^T \\ \widehat{C}_0 P + \widehat{D}_{00} S \widehat{B}_0^T + \widehat{D}_{01} \widehat{B}_1^T & \widehat{D}_{00} S \widehat{D}_{00}^T - S + \widehat{D}_{01} \widehat{D}_{01}^T \end{bmatrix} < 0.$$

В этом случае

$$J(G) < \bar{J}(G),$$

где

$$\bar{J}(G) \triangleq \inf \{ \|\hat{C}_1 P \hat{C}_1^T\| : P > 0 \text{ и } S \in \mathcal{S} \text{ удовлетворяют неравенству (2.52)} \}.$$

Задача робастного \mathcal{L}_∞ -управления может рассматриваться как комбинация задач ковариационного управления и Q -стабилизации, в которой робастность гарантируется ограниченностью H_∞ -нормы замкнутой системы, а качество измеряется максимальным сингулярным значением ковариационной матрицы ошибки.

2.4.1. Синтез регуляторов заданного порядка с помощью линейных матричных неравенств

В этом разделе будет показано, что все три задачи управления, поставленные в предыдущем параграфе, сводятся к одной математической задаче и могут быть решены единым способом, основанным на решении линейного матричного неравенства определенного вида.

Теорема 2.6. [27] *Рассмотрим линейное матричное неравенство*

$$(2.44) \quad BGC + (BGC)^T + D < 0$$

относительно неизвестной матрицы G .

- 1) Регулятор G является решением задачи ковариационного управления 2.3 тогда и только тогда, когда существует матрица $P > 0$ такая, что $C_1 P C_1^T < \bar{E}$ и выполняется неравенство (2.44), в котором

$$(2.45) \quad [B \quad C^T \quad D] \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} B_2 & PC_2^T & AP + PA^T \quad B_1 \\ 0 & D_{21}^T & B_1^T \quad -I \end{array} \right].$$

- 2) Регулятор G является решением задачи Q -стабилизации 2.4 тогда и только тогда, когда

существуют матрицы $P > 0$ и $S \in \mathcal{S}$ такие, что выполняется неравенство (2.44), в котором

$$(2.46) \quad [B \ C^T \ D] \triangleq \begin{array}{c|c|ccc} B_2 & PC_2^T & AP + PA^T & PC_0^T & B_0 \\ D_{02} & 0 & C_0P & -S & D_{00} \\ \hline 0 & D_{20}^T & B_0^T & D_{00}^T & -S^{-1} \end{array}.$$

3) Регулятор G является решением робастной задачи \mathcal{L}_∞ -управления 2.5 тогда и только тогда, когда существуют матрицы $P > 0$ и $S \in \mathcal{S}$ такие, что $\|C_1PC_1^T\| < \gamma$ и выполняется неравенство (2.44), в котором

$$(2.47) \quad [B \ C^T \ D] \triangleq \begin{array}{c|c|ccccc} B_2 & PC_2^T & AP + PA^T & PC_0^T & B_0 & B_1 \\ D_{02} & 0 & C_0P & -S & D_{00} & D_{01} \\ \hline 0 & D_{20}^T & B_0^T & D_{00}^T & -S^{-1} & 0 \\ 0 & D_{21}^T & B_1^T & D_{01}^T & 0 & -I \end{array}.$$

Теорема 2.6 утверждает, что все три задачи управления, поставленные в предыдущем разделе, могут быть сведены к одной задаче отыскания решения линейного матричного неравенства (2.44) относительно матрицы регулятора G . В работе [27] сформулирована лемма, устанавливающая условия разрешимости линейного матричного неравенства (2.44) в терминах матриц B , C и D .

Лемма 2.4. [27] Пусть заданы матрицы $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ и $D = D^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Пусть $\text{rank } C = k < n$. Матрица $G \in \mathbb{R}^{m \times k}$, удовлетворяющая линейному матричному неравенству

$$BGC + (BGC)^T + D < 0,$$

существует тогда и только тогда, когда

$$(2.48) \quad B^\perp DB^{\perp T} < 0, \quad C^{T\perp} DC^{T\perp T} < 0,$$

где A^\perp обозначает левый аннулятор матрицы A : $\ker A^\perp = \text{Im } A$, $A^\perp A^{\perp T} > 0$.

В этом случае

$$(2.49) \quad G = -\rho B^T \Phi C^T (C \Phi C^T)^{-1},$$

где $\rho > 0$ — (достаточно большое) число, такое что $\Phi > 0$, где

$$\Phi \triangleq (\rho B B^T - D)^{-1}.$$

Если в лемме 2.4 матрица $B B^T > 0$ и/или матрица $C^T C > 0$, то аннуляторы B^\perp и/или $C^{T\perp}$ не существуют, и в таком случае задача отыскания решений линейных матричных неравенств (2.48) значительно упрощается [26]. Матрица G в лемме 2.4 соответствует регулятору. Хотя лемма 2.4 устанавливает явную формулу только для одного регулятора, в работе [26] представлена явная формула для всех регуляторов.

Далее рассмотрим решение задач 2.3–2.5 в терминах линейных матричных неравенств. Результаты получены непосредственным применением леммы 2.4 к теореме 2.6.

Задача ковариационного управления. Следующая теорема устанавливает условия разрешимости задачи 2.3 в терминах линейных матричных неравенств.

Теорема 2.7. [27] Пусть задана матрица $\bar{E} > 0$. Следующие утверждения эквивалентны.

1) Существует регулятор в виде статической обратной связи по выходу G , стабилизирующий систему (2.38) и обеспечивающий ограниченность ковариационной матрицы ошибки замкнутой системы $E < \bar{E}$.

2) Существуют матрицы P и Q такие, что $P = Q^{-1}$ и

$$C_1 P C_1^T < \bar{E}, \quad B_2^\perp (A P + P A^T + B_1 B_1^T) B_2^{\perp T} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} Q A + A^T Q & Q B_1 \\ B_1^T Q & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^{\perp T} < 0.$$

В таком случае один регулятор G явно задан формулой (2.49), где матрицы B , C и D определяются выражением (2.45) с использованием матрицы P , удовлетворяющей неравенствам (2.50).

Задача Q -стабилизации. Условия существования решения задачи 2.4 представлены в следующей теореме.

Теорема 2.8. [27] *Следующие утверждения эквивалентны.*

- 1) *Существует регулятор в виде статической обратной связи по выходу G , обеспечивающий Q -стабилизацию системы с неопределенностью (2.40).*
- 2) *Существуют матрицы P , Q , R и S такие, что $P = Q^{-1}$, $R = S^{-1}$, $S \in \mathcal{S}$ и*

$$(2.51) \quad \begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} B_2 \\ D_{02} \end{array} \right]^\perp \left\{ \left[\begin{array}{cc} AP + PA^T & PC_0^T \\ C_0P & -S \end{array} \right] + \right. \\ & \left. + \left[\begin{array}{c} B_0 \\ D_{00} \end{array} \right] S \left[\begin{array}{cc} B_0^T & D_{00}^T \end{array} \right] \right\} \left[\begin{array}{c} B_2 \\ D_{02} \end{array} \right]^{\perp T} < 0, \\ & \left[\begin{array}{c} C_2^T \\ D_{02}^T \end{array} \right]^\perp \left\{ \left[\begin{array}{cc} QA + A^TQ & QB_0 \\ B_0^TQ & -R \end{array} \right] + \right. \\ & \left. + \left[\begin{array}{c} C_0^T \\ D_{00}^T \end{array} \right] R \left[\begin{array}{cc} C_0 & D_{00} \end{array} \right] \right\} \left[\begin{array}{c} C_2^T \\ D_{20}^T \end{array} \right]^{\perp T} < 0. \end{aligned}$$

В таком случае один регулятор G явно задан формулой (2.49), где матрицы B , C и D определяются выражением (2.46) с использованием матриц P и S , удовлетворяющих неравенствам (2.51).

Задача робастного \mathcal{L}_∞ -управления. Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \bar{B}_0 &\triangleq [B_0 \quad B_1], \quad \bar{D}_{00} \triangleq [D_{00} \quad D_{01}], \\ \bar{D}_{20} &\triangleq [D_{20} \quad D_{21}], \quad \bar{S} \triangleq \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{R} \triangleq \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Следующая теорема устанавливает условия разрешимости задачи 2.5 в терминах линейных матричных неравенств.

Теорема 2.9. [27] *Пусть задано число $\gamma > 0$. Следующие утверждения эквивалентны.*

- 1) Существует регулятор в виде статической обратной связи по выходу G , обеспечивающий Q -стабилизацию системы с неопределенностью (2.42) и выполнение неравенства $\bar{J}(G) < \gamma$.
- 2) Существуют матрицы P , Q , R и S такие, что $P = Q^{-1}$, $R = S^{-1}$, $S \in \mathcal{S}$ и

$$(2.52) \quad C_1 P C_1^T < \gamma I,$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} B_2 \\ D_{02} \end{array} \right]^\perp \left\{ \left[\begin{array}{cc} AP + PA^T & PC_0^T \\ C_0 P & -S \end{array} \right] + \right. \\ & + \left. \left[\begin{array}{cc} \bar{B}_0 & \\ \bar{D}_{00} & \end{array} \right] \bar{S} \left[\begin{array}{cc} \bar{B}_0^T & \bar{D}_{00}^T \end{array} \right] \right\} \left[\begin{array}{c} B_2 \\ D_{02} \end{array} \right]^{\perp T} < 0, \\ & \left[\begin{array}{c} C_2^T \\ \bar{D}_{20}^T \end{array} \right]^\perp \left\{ \left[\begin{array}{cc} QA + A^T Q & Q\bar{B}_0 \\ \bar{B}_0^T Q & -R \end{array} \right] + \right. \\ & + \left. \left[\begin{array}{cc} C_0^T & \\ \bar{D}_{00}^T & \end{array} \right] \bar{R} \left[\begin{array}{cc} C_0 & \bar{D}_{00} \end{array} \right] \right\} \left[\begin{array}{c} C_2^T \\ \bar{D}_{20}^T \end{array} \right]^{\perp T} < 0. \end{aligned}$$

В таком случае один регулятор G явно задан формулой (2.49), где матрицы B , C и D определяются выражением (2.47) с использованием матриц P и S , удовлетворяющих неравенствам (2.51).

Вычислительные аспекты решения. Кратко рассмотрим некоторые вычислительные аспекты решения рассмотренных задач синтеза регуляторов заданного порядка с помощью линейных матричных неравенств.

Для задачи робастного \mathcal{L}_∞ -управления, результирующая вычислительная задача отыскания матриц P , Q , R и S , удовлетворяющих условиям утверждения (2) теоремы 2.9, не является выпуклой из-за условий связи $P = Q^{-1}$ и $R = S^{-1}$. Однако, следующее следствие из теоремы 2.9, показывает, что задача робастного \mathcal{L}_∞ -управления является выпуклой даже для случая произвольной матрицы D_{00} при условии полного измерения вектора состояния без шума. В таком случае регулятор G представляет собой матрицу статической обратной связи по состоянию.

Следствие 2.1. [27] Пусть задано число $\gamma > 0$. Допустим, что вектор состояния системы (2.42) можно измерять без шума, и матрицы

$$C_2 = I, \quad D_{20} = 0, \quad D_{21} = 0.$$

Тогда эквивалентны следующие утверждения.

- 1) Существует регулятор в виде статической обратной связи по состоянию G , обеспечивающий Q -стабилизацию системы с неопределенностью (2.42) и выполнение неравенства $\bar{J}(G) < \gamma$.
- 2) Существуют матрицы $P > 0$ и $S \in \mathcal{S}$ такие, что

$$(2.53) \quad C_1 P C_1^T < \gamma I, \quad S > \bar{D}_{00} \bar{S} \bar{D}_{00}^T,$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{02} \end{bmatrix}^\perp \left\{ \begin{bmatrix} AP + PA^T & PC_0^T \\ C_0 P & -S \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \bar{B}_0 \\ \bar{D}_{00} \end{bmatrix} \bar{S} \begin{bmatrix} \bar{B}_0^T & \bar{D}_{00}^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{02} \end{bmatrix}^{\perp T} < 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что множество матриц P и S , удовлетворяющих условиям утверждения (2) следствия 2.1, является выпуклым, и поэтому можно построить регулятор G для заданного значения γ с помощью аппарата выпуклой оптимизации или определить, что такого регулятора не существует. Отметим, что условия следствия 2.1 также определяют выпуклое множество в отношении P , S и γ . Таким образом, значение γ в данной вычислительной задаче можно минимизировать, а матрицу G оптимального регулятора вычислить по формуле (2.49) леммы 2.4.

Для задачи ковариационного управления и задачи Q -стабилизации результирующая вычислительная задача также является нетривиальной из-за условия связи $P = Q^{-1}$. Подобно задаче робастного \mathcal{L}_∞ -управления, при условии полной измеримости вектора состояния и отсутствия случайных помех эти задачи сводятся к построению регулятора в виде статической обратной связи по состоянию и нетрудно разрешимым вычислительным задачам выпуклой оптимизации (см.

следствие 2.1). Если рассматривать задачу синтеза динамического регулятора, порядок которого не задан, то, используя технику, аналогичную работе [26], можно показать, что для всех задач управления, рассмотренных в данном параграфе, условие связи $P = Q^{-1} > 0$ заменяется *выпуклым* условием $P \geq Q^{-1} > 0$ или, что эквивалентно,

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0.$$

Таким образом, задача ковариационного управления с заданным порядком регулятора становится выпуклой. Тем не менее, две другие задачи даже в этом случае остаются невыпуклыми из-за условия $R = S^{-1}$, $S \in \mathcal{S}$ [27].

В заключение отметим, что для численного решения задач, рассмотренных в данном параграфе, можно использовать вычислительные методы решения линейных матричных неравенств относительно взаимно-обратных матриц, представленные в монографии [2].

3. Методы формирования контура

Как было подчеркнуто во введении, ПИД регуляторы занимают особое место в технических приложениях. Большое количество работ по синтезу и настройке одномерных и многомерных ПИД регуляторов посвящено использованию идей робастности. В этом разделе будут изложены некоторые идеи робастного управления (H_∞ оптимизации) при синтезе регуляторов фиксированного порядка и фиксированной структуры, в частности, ПИД регуляторов.

Ключевым моментом при синтезе многомерных ПИД регуляторов является процедура H_∞ формирования контура. Рассмотрим ее более подробно.

Под формированием контура при синтезе системы управления понимают метод синтеза системы, при котором непосредственно определяют форму частотной характеристики передаточной функции разомкнутой или замкнутой системы. Основная идея в распространении методов формирования контура замкнутой системы для многомерной системы

состояла в использовании матричных норм. В работе [17] было предложено использовать при анализе и синтезе многомерных систем сингулярные числа.

В теории робастной оптимизации показано, что требования робастной устойчивости и робастного качества могут быть записаны как требования максимизации сингулярных чисел некоторых передаточных функций замкнутой системы.

Принципиальная идея формирования контура (loop shaping) заключается в том, что максимальные сингулярные числа этих передаточных матричных функций замкнутых систем могут быть непосредственно определены над соответствующими частотными диапазонами посредством сингулярных чисел соответствующих передаточных матричных функций разомкнутых систем. Таким образом, синтез регулятора K , удовлетворяющего некоторым требованиям для замкнутой системы (рис.5) может быть достигнут посредством выбора

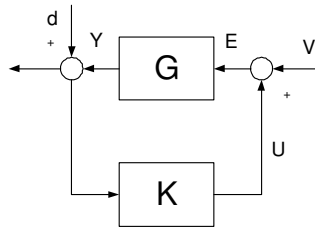


Рис. 5. Замкнутая система

K , который соответствующим образом «формирует» сингулярные числа разомкнутой системы (рис. 6). Более подробно с

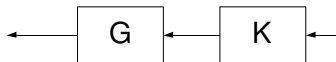


Рис. 6. Разомкнутая система

методом формирования контура в многомерном случае можно ознакомиться в работе [17].

Для того, чтобы проиллюстрировать отношение между общими целями синтеза замкнутой системы и требованиями к сингулярным числам разомкнутой системы будем рассматривать четыре общих цели синтеза и покажем, что каждая

цель может быть аппроксимирована в определенном частотном диапазоне посредством сингулярных значений разомкнутой системы.

В последующих выкладках нам понадобятся следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(A) &= 1/\underline{\sigma}(A^{-1}), \\ \bar{\sigma}(AB) &\leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B), \\ \bar{\sigma}(A+B) &\leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B), \\ \underline{\sigma}(A+B) &\geq \underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(B).\end{aligned}$$

По определению,

$$\bar{\sigma}(A) = \bar{\sigma}(A(j\omega)) \leq \|A\|_{\infty}$$

для всех ω .

Приведем аппроксимацию максимальных сингулярных значений передаточной функции замкнутой системы (в соответствующем диапазоне частот) сингулярными значениями передаточных функций разомкнутой системы.

- 1) Максимальные сингулярные значения функции чувствительности $(I - GK)^{-1}$. Минимизация $\bar{\sigma}((I - GK)^{-1})$ уменьшает влияние воздействия возмущения d на выход объекта $Y + d$. Справедливо следующее неравенство (3.1)

$$\bar{\sigma}((I - GK)^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I - GK)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK) - 1} \simeq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK)}$$

для частот, при которых выполняется соотношение $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$.

- 2) Максимальные сингулярные значения передаточной функции замкнутой системы $K(I - GK)^{-1}$ от возмущения d к управлению U . Она характеризует робастность относительно аддитивной неопределенности номинального объекта. Минимизация $\bar{\sigma}(K(I - GK)^{-1})$ приводит к увеличению запаса робастой устойчивости при аддитивной неопределенности. Мы также имеем

$$(3.2) \quad \bar{\sigma}(K(I - GK)^{-1}) \leq \frac{\bar{\sigma}(K)}{\underline{\sigma}(I - GK)} \simeq \bar{\sigma}(K)$$

для частот, при которых $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$.

- 3) Максимальные сингулярные значения функции дополнительной чувствительности $GK(I - GK)^{-1}$. Минимизация $\bar{\sigma}(GK(I - GK)^{-1})$ уменьшает влияние возмущения на выходе объекта d на выход объекта Y , а также максимизирует робастную устойчивость к мультипликативному возмущению на выходе объекта. Справедливы неравенства

$$(3.3) \quad \bar{\sigma}(GK(I - GK)^{-1}) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}((GK)^{-1}) - 1} \simeq \bar{\sigma}(GK)$$

для частот, при которых $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$.

- 4) Максимальные сингулярные значения передаточной функции $(I - GK)^{-1}G$ замкнутой системы. Уменьшение влияния возмущений на входе объекта V на его выход Y обеспечивается минимизацией $\bar{\sigma}((I - GK)^{-1}G)$. Относительно разомкнутой системы мы получаем

$$(3.4) \quad \bar{\sigma}((I - GK)^{-1}G) = \bar{\sigma}(((GK)^{-1} - I)^{-1}(GK)^{-1}G) \simeq \bar{\sigma}(K^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(K)},$$

для частот, при которых $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$. K предполагается обратимой и квадратной.

В каждом из вышеописанных случаев мы аппроксимировали критерий для замкнутой системы условием на сингулярные числа G и K над соответствующим диапазоном частот. Первый и четвертый случаи являются стандартными критериями качества, в то время как второй и третий случаи являются целями робастной устойчивости. Анализируя (3.1)–(3.4), можно констатировать, что требования хорошего качества для разомкнутой системы ($\underline{\sigma}(GK)$, $\underline{\sigma}(K)$ большие) вступают в противоречие с требованиями робастной устойчивости ($\bar{\sigma}(GK)$, $\bar{\sigma}(K)$ малые), демонстрируя хорошо известный компромисс между качеством и робастной устойчивостью. Таким образом, мы можем достигнуть приемлемого компромисса: так как качество обычно важно на низкой частоте, мы

задаемся тем фактом, что $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$ (то есть $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$ большое) для всех частот $\omega \in (0, \omega_L)$, и, так как робастная устойчивость обычно более важна на высоких частотах, мы полагаем, что $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$ (другими словами, что $\bar{\sigma}(GK)$ мало) для всех частот $\omega \in (\omega_U, \infty)$. Величины ω_L и ω_U ($\omega_L < \omega_U$) выбираются для определения соответствующего частотного диапазона для вышеуказанных целей.

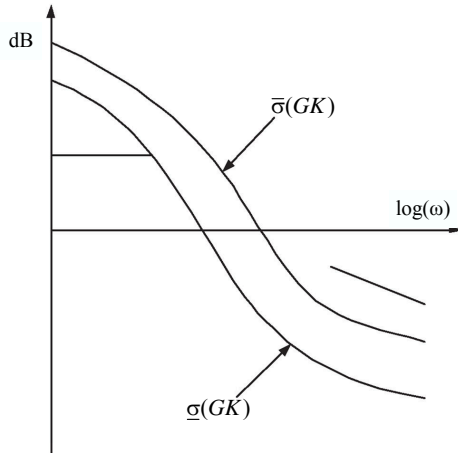


Рис. 7. Формирование сингулярных чисел разомкнутой системы

На рис. 7 графически проиллюстрировано, как требования к качеству замкнутой системы ограничивают поведение сингулярных чисел разомкнутой системы при синтезе. Разработчик должен выбрать K так, чтобы $\bar{\sigma}(GK)$ и $\underline{\sigma}(GK)$ принадлежало соответствующим областям. Это значит, что $\underline{\sigma}(GK) > L(\omega)$ для всех $\omega \in (0, \omega_L)$ и $\bar{\sigma}(GK) < U(\omega)$ для всех $\omega \in (\omega_U, \infty)$. Возможно в дальнейшем необходимо будет настраивать $\underline{\sigma}(K)$ к $(0, \omega_L)$, а $\bar{\sigma}(K)$ к (ω_U, ∞) для того, чтобы удовлетворить целям 2) и 4), соответственно.

Однако этот подход (синтезировать свойства замкнутой системы по разомкнутой) не гарантирует внутренней устойчивости. Для систем с одним входом и одним выходом в работе [7] было показано, что в общем случае устойчивость замкнутой системы зависит от соотношения коэффициента усиления (амплитуды) и фазы разомкнутой системы около ча-

стоты среза ($|GK| = 1$), и, в частности, скорость перехода от большого коэффициента к малому коэффициенту в зависимости от частоты ограничена посредством требования фазы. Это ограничение приводит к тому, что на рис. 7 диапазон частот (ω_L, ω_U) не может быть выбран произвольно малым и можно показать, что для практического синтеза максимальный наклон не должен превышать 40 dB/dec. Таким образом, процедура формирования контура дополняется ограничениями на устойчивость.

В работе [17] соотношение (коэффициент усиления/фаза) было расширено на многомерные системы и было показано, что похожие ограничения существуют в терминах убывания величины собственных значений (не сингулярных чисел) матрицы GK , обозначаемых $\lambda_i(GK)$, в области частоты среза. Следовательно, формирование контура для многомерных систем также дополняется требованием внутренней устойчивости, и невозможно выбирать параметры L, U, ω_L, ω_U на рис. 7 без соответствующих ограничений на обеспечение устойчивости. Данная «классическая» процедура формирования контура является поэтому особенно запутанной в многомерном случае, потому что разработчику требуется манипулировать с $\underline{\sigma}(GK)$ и $\bar{\sigma}(GK)$ для того, чтобы достичь желаемой формы, в то же время ограничивая скорость убывания собственных значений $\lambda_i(GK)$ для обеспечения внутренней устойчивости замкнутых систем. Более того, заметим, что эти требования являются даже более ограничивающими, если номинальный объект имеет полюса в правой полуплоскости.

Подход к формированию контура, излагаемый в этом разделе, является проще с точки зрения разработчика и похож на метод Loop Transfer Recovery (LTR), применяемый при синтезе LQG регуляторов [30] и [16]: разработчик определяет желаемую форму контура (на этой стадии игнорируя рассмотрение устойчивости), и затем «сформированный» объект компенсируется посредством регулятора, используя нормализованную взаимно простую факторизацию. В этом случае гарантированные свойства устойчивости обеспечивают внутреннюю устойчивость.

3.1. ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА

В данном разделе мы изложим основные этапы процедуры синтеза, которая была сформулирована выше. Цель этого подхода — объединить простой компромис (качество/робастность), получаемый с помощью формирования контура с гарантированными свойствами устойчивости с помощью подхода H_∞ синтеза. Синтез регуляторов с использованием H_∞ процедуры формирования контура, предложенной Д. МакФарлейном и К. Гловером, является эффективным методом синтеза робастных регуляторов и успешно применяется для решения различных задач управления [35]. В этой методике разработчик формирует объект с предкомпенсатором W_1 и посткомпенсатором W_2 , как показано на рис. 9

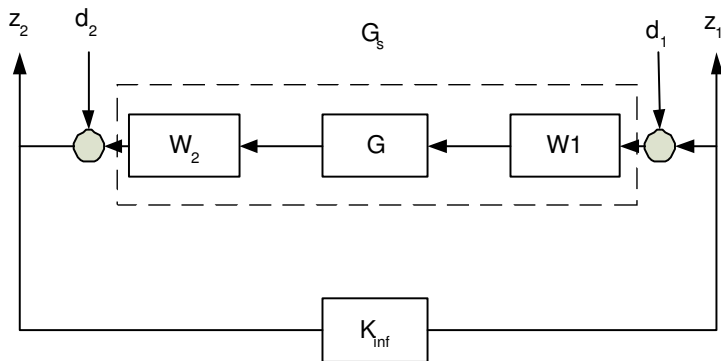


Рис. 8. Замкнутая система с предкомпенсатором и посткомпенсатором

Желаемая форма контура (loop shape) достигается, если H_∞ норма матрицы передаточных функций от возмущений d_1 и d_2 к выходам z_1 и z_2 минимизируется по всем стабилизирующим регуляторам K_∞ для того, чтобы получить желаемую величину γ :

$$(3.5) \quad \gamma = \left\| \begin{array}{c} T \\ d_1 \rightarrow z_1 \\ d_2 \rightarrow z_2 \end{array} \right\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} K_{\infty} \\ I \end{bmatrix} (I - G_s K_{\infty})^{-1} [G_s \quad I] \right\|_{\infty} \geq \gamma_{opt},$$

где G_s — «взвешенный» объект, K_{∞} — регулятор. Величина, обратная γ , называется диапазоном робастной устойчивости ε . Область робастной устойчивости ε может принимать значения между 0 и 1. Кроме того, величина ε является индикатором, характеризующим степень достижения задаваемых требований к замкнутой системе. Малые значения ε показывают несовместимость требований к формированию контура замкнутой системы, т.е. они не могут выполняться одновременно. В этом случае разработчик должен перестроить разомкнутый объект.

Модель неопределенности, используемая в этом методе, является неопределенностью взаимно простых факторов. Это не требует специального знания неопределенности как таковой и охватывает области как низких, так и высоких частот для возмущающего сигнала. Более того, реальный и номинальный объекты не должны иметь одно и тоже число полюсов и нулей в правой полуплоскости.

Можно выделить следующие этапы процедуры синтеза с помощью метода формирования контура:

- 1) Формирование контура. Выбирается предкомпенсатор W_1 и(или) посткомпенсатор W_2 , «формируются» сингулярные числа номинального объекта для того, чтобы получить желаемую форму разомкнутой системы. Номинальный объект G и «формирующие функции» W_1 и W_2 комбинируются для того, чтобы получить «сформированный» объект в виде $G_s = W_2 G W_1$ (см. рис. 9). Предполагается, что W_1 и W_2 такие, что G_s не содержит скрытых неустойчивых мод.
- 2) Оценка совместимости требований к формированию контура.

- Решается задача робастной стабилизации для объекта G_s , и вычисляется оптимальный запас устойчивости ε_{max} . Для этого минимизируется H_∞ норма передаточной функции замкнутой системы $\left\| \begin{matrix} T & d_1 & \rightarrow & z_1 \\ & d_2 & & z_2 \end{matrix} \right\|_\infty$ по всем стабилизирующим регуляторам K_∞ для получения оптимальной цены γ_{opt} в виде

$$\gamma_{opt} = \varepsilon_{max}^{-1} = \left\| \left[\begin{matrix} K_\infty \\ I \end{matrix} \right] (I - G_s K_\infty)^{-1} \left[\begin{matrix} G_s & I \end{matrix} \right] \right\|_\infty.$$

Если $\varepsilon_{max} \ll 1$ (обычно $\varepsilon_{max} < 0.2$), то возвращаемся к шагу 1 и настраиваем W_1 и W_2 .

- Выбираем $\varepsilon \leq \varepsilon_{max}$. При выбранном ε синтезируем K_∞ регулятор, который робастно стабилизирует нормализованную взаимно простую факторизацию объекта $G_s = M_s^{-1} N_s$ с областью устойчивости ε , используя подход, описанный в главе 4 книги [36] (см. рис. 10).

3) Окончательный регулятор K конструируется комбинацией регулятора и формирующих передаточных функций W_1, W_2 , так что (см. рис. 11)

$$K = W_1 K_\infty W_2.$$

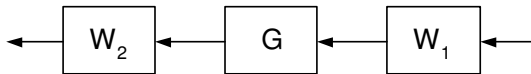


Рис. 9. Сформированный объект

Теоретическим базисом для H_∞ формирования контура является то, что K_∞ не модифицирует желаемую форму контура существенным образом на низких и высоких частотах, если достигнутое значение ε_{max} является слишком маленьким [51].

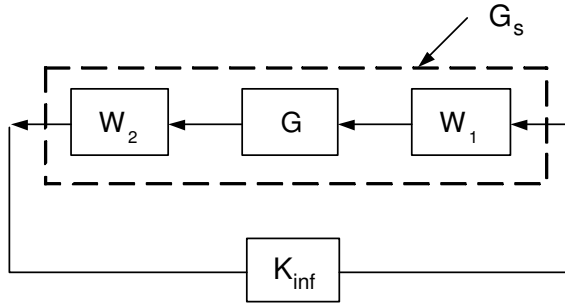


Рис. 10. H_∞ регулятор

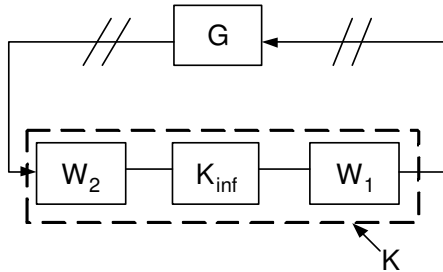


Рис. 11. Окончательный регулятор

Решающую роль в процедуре синтеза играет способ нахождения весовых матриц (предкомпенсатора W_1 и посткомпенсатора W_2). Форма весов определяется спецификациями разработки замкнутого контура. Главные критерии, которым надо следовать — это высокий коэффициент усиления на низких частотах, такой, чтобы достигалось уменьшение влияний возмущений на входе и выходе объекта; малый коэффициент усиления на высоких частотах для парирования шума, а также плавный переход вокруг частоты среза контура. То есть коэффициент усиления контура не должен убывать быстрее, чем 20 дБ/декаду, для того, чтобы была желаемая робастная устойчивость, запасы по амплитуде и фазе, перерегулированию и затуханию [43]. Быстрое время стабилизации может быть достигнуто с высокой контурной частотой среза и хорошим ε . Высокий коэффициент усиления на низких частотах

может быть достигнут с помощью пропорциональных и интегральных фильтров, находящихся в предкомпенсаторе W_1 . Низкий коэффициент усиления на высоких частотах может быть реализован с помощью низкочастотных фильтров, расположенных в посткомпенсаторе W_2 . Фильтры упреждения-запаздывания, расположенные в W_1 , могут обеспечить гладкий переход вокруг частоты среза, если это необходимо.

В практических приложениях перед выполнением процедуры формирования контура производится масштабирование номинального объекта. Масштабируются входы и выходы номинального объекта G_{nom} с помощью пред- и постмасштабирующих матриц S_1 и S_2 для того, чтобы получить масштабированный объект $G = S_2 G_{nom} S_1$. Масштабирование выполняется для того, чтобы каждому входу и выходу придать одинаковое значение в МИМО системе.

Рассмотрим некоторые из подходов к синтезу многомерного робастного ПИД регулятора, которые используют основные идеи робастной H_∞ теории управления и метода формирования контура.

3.2. ПОДХОД, ОСНОВАННЫЙ НА РЕШЕНИИ БИЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

В работе [19] предлагается парадигма синтеза регуляторов фиксированной структуры и фиксированного порядка с использованием H_∞ методов формирования контура. Похожая работа опубликована в диссертации [37]. Однако там она была сформулирована с использованием модифицированной расширенной проблемы Нехари, в отличие от подхода ВМІ (билинейных матричных неравенств), который использован в этой статье. Более того, в [37] предкомпенсатор W_1 в H_∞ методах формирования контура выбирается диагональной фиксированной структуры, в рассматриваемой же работе предполагается, что W_1 и W_1^{-1} являются матрицами из RH_∞ .

3.2.1. Предварительные сведения и обозначения

Через \mathbb{R} обозначим поле действительных чисел, через \mathbb{R}_+ — множество положительных чисел. Будем обозначать через матрицу

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ * & R \end{bmatrix} \text{ матрицу } \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix}.$$

Лемма 3.1. (Лемма о вещественной ограниченности)

Дана передаточная функция $T(s)$ с реализацией $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\|C(sI - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma$ и матрица A устойчива.
- 2) Существует симметричная положительно определенная матрица X , удовлетворяющая соотношению

$$\begin{bmatrix} XA + A^*X & XB & C^* \\ * & -\gamma I & D^* \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

3.2.2. Структура регулятора

Существуют несколько структур ПИД регуляторов, используемых на практике. В этом разделе предполагается следующая структура

$$(3.6) \quad K_{PID_{ij}}(s) = k_{P_{ij}} + \frac{k_{I_{ij}}}{s} + \frac{k_{D_{ij}}}{\frac{s}{\tau} + 1},$$

где $k_{P_{ij}}$ — пропорциональный, $k_{I_{ij}}$ — интегральный и $k_{D_{ij}}$ — дифференциальный коэффициенты ПИД регулятора.

Для каждого ПИД регулятора существуют $3m^2 + 1$ параметров, которые надо построить для объекта с m входами и m выходами (объект G предлагается для простоты квадратным).

Минимальную реализацию ПИД регулятора (3.6) можно представить в виде

$$(3.7) \quad K_{PID_{ij}}(s) = \frac{(k_{I_{ij}} - k_{D_{ij}}\tau^2)s + k_{I_{ij}}\tau}{s^2 + \tau s} + (k_{P_{ij}} + k_{D_{ij}}\tau) = \frac{\mathcal{K}_{D_{ij}}s + \mathcal{K}_{I_{ij}}}{s^2 + \tau s} + \mathcal{K}_{P_{ij}}.$$

Тогда

$$(3.8) \quad K_{PID}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{K}_{D_{11}}s + \mathcal{K}_{I_{11}}}{s^2 + \tau s} + \mathcal{K}_{P_{11}} & \cdots & \frac{\mathcal{K}_{D_{1m}}s + \mathcal{K}_{I_{1m}}}{s^2 + \tau s} + \mathcal{K}_{P_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathcal{K}_{D_{m1}}s + \mathcal{K}_{I_{m1}}}{s^2 + \tau s} + \mathcal{K}_{P_{m1}} & \cdots & \frac{\mathcal{K}_{D_{mm}}s + \mathcal{K}_{I_{mm}}}{s^2 + \tau s} + \mathcal{K}_{P_{mm}} \end{bmatrix}.$$

$K_{PID}(s)$ имеет следующее представление

$$(3.9) \quad K_{PID}(s) = D_c + \frac{B_{c1}}{s} + \frac{B_{c2}}{s + \tau},$$

где

$$D_c = \mathcal{K}_P = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{P_{11}} & \cdots & \mathcal{K}_{P_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{P_{m1}} & \cdots & \mathcal{K}_{P_{mm}} \end{bmatrix},$$

$$B_{c1} = \frac{\mathcal{K}_I}{\tau} = \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{K}_{I_{11}}}{\tau} & \cdots & \frac{\mathcal{K}_{I_{1m}}}{\tau} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathcal{K}_{I_{m1}}}{\tau} & \cdots & \frac{\mathcal{K}_{I_{mm}}}{\tau} \end{bmatrix},$$

$$B_{c2} = \mathcal{K}_D - \frac{\mathcal{K}_I}{\tau} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{D_{11}} - \frac{\mathcal{K}_{I_{11}}}{\tau} & \cdots & \mathcal{K}_{D_{1m}} - \frac{\mathcal{K}_{I_{1m}}}{\tau} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{D_{m1}} - \frac{\mathcal{K}_{I_{m1}}}{\tau} & \cdots & \mathcal{K}_{D_{mm}} - \frac{\mathcal{K}_{I_{mm}}}{\tau} \end{bmatrix}.$$

Предположим, что $\text{rank } B_{ci} = m$, тогда минимальная реализация $K_{PID}(s)$ задается как

$$(3.10) \quad K_{PID}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 0_{m \times m} & \tau I_{m \times m} & B_{c1} \\ \hline I_{m \times m} & I_{m \times m} & B_{c2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right].$$

Приведенная минимальная реализация иногда называется реализацией Гильберта. Заметим, что C_c является постоянной матрицей для всех ПИД регуляторов фиксированной структуры при их минимальной реализации. Если требуется синтез многоконтурной структуры ПИД регуляторов, то матрицы B_{c1} , B_{c2} и D_c должны выбираться диагональными матрицами.

3.2.3. Предлагаемая постановка задачи

В этом разделе приведена предложенная постановка задачи синтеза ПИД регулятора в свете подхода H_∞ формирования контура. Основная цель состояла в том, чтобы сохранить все парадигмы H_∞ формирования контура, но в результате получить ПИД регулятор.

Напомним, что при синтезе регуляторов с использованием H_∞ процедуры формирования контура разработчик формирует объект $G_s = W_2 G W_1$ с предкомпенсатором W_1 и посткомпенсатором W_2 , как показано на рис. 8.

Желаемая форма контура достигается, если H_∞ норма матричных передаточных функций от возмущений d_1 и d_2 к выходам z_1 и z_2 минимизируется по всем стабилизирующим регуляторам K_∞ , чтобы получить желаемую величину γ :

$$(3.11) \quad \gamma = \left\| \begin{matrix} T \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} K_\infty \\ I \end{bmatrix} (I - G_s K_\infty)^{-1} \begin{bmatrix} G_s & I \end{bmatrix} \right\|_\infty \geq \gamma_{opt},$$

где G_s — «взвешенный» объект, K_∞ — регулятор.

Новая постановка, предложенная в данной работе, показана на рис. 12.

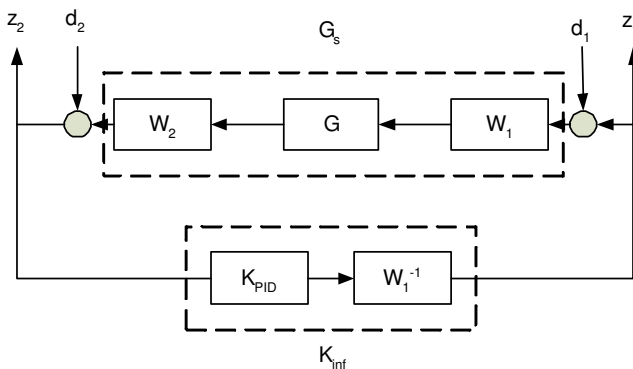


Рис. 12. Новая постановка задачи

В этой постановке регулятор имеет конкретную структуру

$$K_\infty = W_1^{-1} K_{PID},$$

где $W_1 \in RH_\infty$, $W_1^{-1} \in RH_\infty$, и K_{PID} является ПИД регулятором, как он определен в предыдущем разделе.

Приведенная структура регулятора K_∞ будет гарантировать, что окончательный регулятор будет иметь желаемую ПИД структуру, так как

$$K = W_1 K_\infty W_2 = K_{PID} W_2.$$

Заметим, что окончательный регулятор является ПИД регулятором в соединении с посткомпенсатором W_2 . Посткомпенсатор используется для парирования высокочастотного шума, что является общей практикой в реальных приложениях. Если измерения свободны от шума, то окончательный регулятор будет простым ПИД регулятором, и матрица W_2 может быть выбран единичной.

Хотя K_∞ является структурированным, он сохраняет все качества робастности и гарантии качества регулятора по методу H_∞ формирования контура так долго, как достигается удовлетворительное ε . Более того, сокращение $W_1 W_1^{-1}$ не создает никаких проблем в терминах внутренней устойчивости и робастности замкнутого контура, так как

- обе $W_1 \in RH_\infty$, $W_1^{-1} \in RH_\infty$, поэтому они не имеют скрытых мод, и при сокращении ничего не теряется,
- W_1 не имеет неопределенности, хотя объект неопределенный. Напомним, что W_1 не является частью физического объекта.

Таким образом, ПИД регулятор, синтезированный с использованием предыдущей постановки, будет иметь робастность и гарантии качества регулятора, сформированного по принципу H_∞ формирования контура при условии получения удовлетворительного ε .

Задача синтеза может быть представлена как задача оптимизации следующим образом:

$$(3.12) \quad \min_{stabK_{PID}} \left\| \begin{array}{c} T \\ d_1 \\ d_2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right\|_{\infty},$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} & \min_{stabK_{PID}} \gamma = \\ & = \min_{stabK_{PID}} \left\| \left[\begin{array}{c} W_1^{-1}K_{PID} \\ I \end{array} \right] (I - W_2GK_{PID})^{-1} \left[\begin{array}{cc} W_2GF_{PID} & I \end{array} \right] \right\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Минимизация γ эквивалентна максимизации области робастной устойчивости ε по всем стабилизирующим регуляторам. Оптимизация в (3.12) не является простой задачей, так как эта задача не выпукла по K_{PID} . Однако ее решение может быть получено, если оптимизационная задача ставится в пространстве состояний с использованием матричных неравенств.

3.2.4. Решение оптимизационной задачи

Новая постановка может быть преобразована в H_{∞} формулировку, как показано на рис. 13. Весовые функции W_1 и W_1^{-1} влияют на величину робастной устойчивости ε . Функционал качества замкнутой системы определяется с помощью K_{PID} и W_2 . С другой стороны, W_1 влияет на контур обратной связи через K_{PID} , так как параметры K_{PID} формируются в соответствии со взвешенным объектом G_s , который включает также и W_1 .

Имея соответствующие реализации в пространстве состояний каждой передаточной функции на рис.13, можно получить реализацию в пространстве состояний передаточной

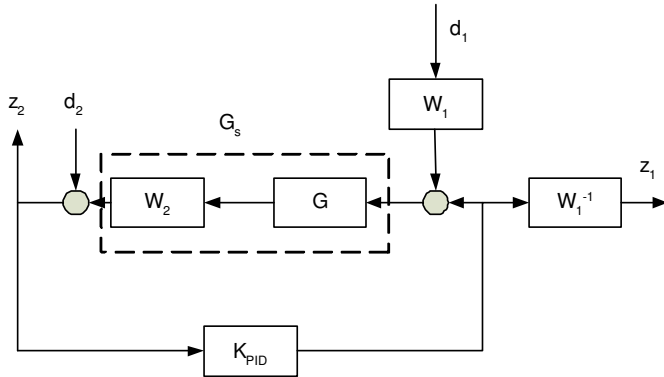


Рис. 13. H_∞ -формулировка задачи

функции от возмущений d_1 и d_2 к выходам z_1 и z_2 :

$$(3.13) \quad T \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{cl} & B_{cl} & & \\ \hline B_{cl} & D_{cl} & & \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cc} \tilde{A}_1 & 0 & \tilde{B}_1 C_c & \tilde{B}_1 D_c C & 0 & \tilde{B}_1 D_c \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_c & B_c C & 0 & B_c \\ 0 & BC_1 & BC_2 & A + BD_c C & BD_1 & BD_c \\ \hline \tilde{C}_1 & 0 & \tilde{D}_1 C_c & \tilde{D}_1 D_c C & 0 & \tilde{D}_1 D_c \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & I \end{array} \right],$$

где

$$\tilde{G}_s(s) = W_2 G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right],$$

$$K_{PID}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right],$$

$$W_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right],$$

$$W_1^{-1}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_1 & \tilde{B}_1 \\ \hline \tilde{C}_1 & \tilde{D}_1 \end{array} \right].$$

Полученная реализация уже является выпуклой в пространстве параметров. Используя лемму о вещественной ограниченности, оптимизационная задача (3.12) может быть представлена в пространстве состояний в терминах матричных неравенств в виде

$$(3.14) \quad \min_{X, A_c, B_c, D_c} \gamma$$

при условии
$$\begin{pmatrix} XA_{cl} + A_{cl}^*X & XB_{cl} & C_{cl}^* \\ * & -\gamma I & D_{cl}^* \\ * & * & -\gamma I \end{pmatrix} < 0,$$

$X > 0.$

Сформулированная оптимизационная постановка представляет собой задачу решения билинейных матричных неравенств (BMI problem). Она является выпуклой по X и выпуклой в пространстве параметров A_c, B_c, D_c , но бивыпуклой по всем параметрам вместе. Хотя ясно, как найти по крайней мере один локальный минимум, но в общем случае глобальная оптимизация является достаточно трудной задачей. В литературе существуют несколько описаний методов решения билинейных матричных неравенств [6], [22]. Большинство из этих методов находятся на стадии своего развития и пока не могут быть легко применены к решению практических задач. Простой и надежный путь получить ответ на оптимизационную задачу (3.14) заключается в решении ее итерационным путем, похожим на D - K итерации. В этом методе локальное решение билинейных матричных неравенств ищется альтернативной минимизацией оптимальной цены γ в соответствии с фиксированными параметрами регулятора и оптимизации по X , и наоборот. Этот метод имеет преимущество в том, что при его реализации можно воспользоваться методом внутренней точки. Главным же недостатком является то, что этот подход не гарантирует сходимости к стационарной точке вследствие негладкости функции [22]. Однако опыт показывает, что на практике данный метод работает вполне удовлетворительно.

H_∞ ПИД регулятор, построенный по методике формирования контура, может быть синтезирован следующим образом:

- 1) Производим масштабирование номинального объекта G .

Задаваясь W_1 и W_2 , находим первоначальный ПИД регулятор, который стабилизирует замкнутую систему. Получаем реализацию в пространстве состояний для первоначального ПИД регулятора $A_{c_0}, B_{c_0}, C_c, D_{c_0}$ как показано в разделе 3.2.2. Вычисляем первоначальное значение критерия качества

$$\left\| \begin{array}{c} T \\ d_1 \\ d_2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right\|_{\infty} \approx \gamma_0.$$

Важно, чтобы первоначальное значение критерия качества γ_0 было не очень большим. Обозначаем $\gamma_{s_0} = \gamma_0, i = 0$.

2) $i := i + 1$.

3) Задаваясь $A_{c_{i-1}}, B_{c_{i-1}}, D_{c_{i-1}}$ и $\gamma_{s_{i-1}}$, вычисляем $A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl}$, используя (3.13), и решаем следующую задачу минимизации линейных матричных неравенств относительно X_i :

$$(3.15) \quad \begin{bmatrix} X_i A_{cl} + A_{cl}^* X_i & X_i B_{cl} & C_{cl}^* \\ * & -\gamma I & D_{cl}^* \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad X_i > 0.$$

Получаем положительно определенную матрицу, удовлетворяющую условию на H_{∞} норму замкнутой системы для $KPID_{i-1}$. Так как решение задачи не единственно, алгоритм может сходиться к незначительно отличающимся минимумам для той же самой начальной точки каждый раз, когда он запускается. Существует $n \times (n + 1)/2$ определяемых переменных, которые надо определить в задаче для замкнутого контура с n состояниями. Этот шаг составляет главную вычислительную нагрузку процесса оптимизации.

4) Задаваясь X_i , решаем следующую задачу минимизации

с линейными матричными неравенствами:

$$(3.16) \quad \min_{A_{c_i}, B_{c_i}, D_{c_i}} \gamma_{s_i}$$

при условии
$$\begin{bmatrix} X_i A_{cl} + A_{cl}^* X_i & X_i B_{cl} & C_{cl}^* \\ * & -\gamma I & D_{cl}^* \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

Если существует решение минимизационной задачи с ограничениями в виде линейных матричных неравенств, переходим к шагу 2. Если решения вышеобозначенной задачи не существует, переходим к следующему шагу. Выходами задачи оптимизации являются $A_{c_i}, B_{c_i}, D_{c_i}$, которые описывают i -й ПИД регулятор и γ_{s_i} . На этом шаге для объекта размерности m существуют $2 \times m^2 + 2$ переменных, которые надо найти.

- 5) Окончательные значения $\tau, \mathcal{K}_P, \mathcal{K}_I, \mathcal{K}_D$ могут быть получены из $A_{c_i}, B_{c_i}, D_{c_i}$, используя уравнение (3.9). Далее параметры ПИД регулятора вычисляются непосредственно из уравнения (3.7).

Замечание 3.1. Минимальное значение величины γ_{s_i} на шаге 4 в некоторых случаях может быть очень консервативным, так как величина X_i является фиксированной во время минимизации (3.16). Заметим, что настоящее значение критерия качества достигалось как γ_{a_i} , следовательно имеет место следующее соотношение:

$$\left\| \begin{matrix} T \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \right\|_{\infty} \approx \gamma_{a_i} \leq \gamma_{s_i},$$

и разница между γ_{a_i} и γ_{s_i} может быть большой. Несмотря на то, что всегда имеет место неравенство

$$\gamma_{s_i} < \gamma_{s_j}, \quad i > j,$$

не обязательно имеет место неравенство

$$\gamma_{a_i} < \gamma_{a_j}, \quad i > j.$$

Следовательно, алгоритм может сходиться к величине γ_a , которая не является лучшим значением критерия качества, достигаемым в процессе оптимизации. Однако эта проблема может быть легко преодолена, так как можно запоминать все выходы процесса оптимизации на каждом шаге.

Замечание 3.2. Алгоритм, описанный выше, является нисходящим алгоритмом в том смысле, что γ_{s_i} монотонно не возрастает от i , и минимальное значение γ_{s_i} , полученное на шаге i меньше, чем $\gamma_{s_{i-1}}$. Однако описанный выше алгоритм не является градиентным для того, чтобы сходиться к локальному или глобальному минимуму [5]. Гарантируется только свойство монотонности.

Замечание 3.3. Предложенный подход не ограничивается ПИД регуляторами. Вместо K_{PID} может быть выбран регулятор другой фиксированной структуры и порядка.

3.2.5. Выбор начального ПИД регулятора

Очень важным моментом алгоритма является выбор первоначального стабилизирующего регулятора. Одним из путей выбора первоначального ПИД регулятора является проверка весов предкомпенсатора W_1 . В общем случае, достаточно расположить передаточные функции первого и второго порядков на диагонали W_1 . Нетрудно преобразовать эти передаточные функции к ПИ/ПИД передаточным функциям. Если ПИД коэффициенты весов известны, начальный ПИД регулятор может быть выбран ПИД регулятором с коэффициентом, меньшим, чем коэффициенты весов предкомпенсатора W_1 .

3.3. ПИД-АППРОКСИМАЦИЯ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД МАКЛОРЕНА

В работе [47] предлагается синтез ПИД регулятора производить в два этапа. На первом этапе синтезируется регулятор полного порядка. Он определяется традиционным подходом на основе H_∞ метода формирования контура. Далее производится редуцирование регулятора полного порядка до ПИД структуры. Метод ПИД аппроксимации основан на разложении в ряд Маклорена передаточной функции регулятора, которая представлена в пространстве состояний.

3.3.1. Синтез ПИД регулятора

Известно, что синтез H_∞ регуляторов, основанный на 2-Риккати подходе, дает регулятор с порядком, равным порядку объекта. Нереально получить ПИД регулятор, который был бы так же робастен и удовлетворял тому же критерию качества, что и регулятор высокого порядка. Возможны две аппроксимации:

- Обеспечивать, по возможности, качество и пожертвовать робастностью.
- Обеспечивать робастность и пожертвовать качеством.

В данной работе предлагается обеспечивать, по возможности, качество и пожертвовать робастностью. Более того, эта аппроксимация проще для получения регулятора, сохраняющего робастность, так как невозможно для ПИД регулятора обеспечить ту же робастность, что и для регулятора высокого порядка.

Рассмотрим регулятор полного порядка, полученный на основе H_∞ метода формированию контура, который имеет следующую реализацию в пространстве состояний.

Предположим, что регулятор $K \in H_2^{m \times m}$ имеет n -мерное внутреннее состояние X , соответствующее входу Y и выходу U , описываемое уравнениями

$$(3.17) \quad \begin{cases} \dot{x} &= A_k x + B_k y, \\ u &= C_k x + D_k y, \end{cases}$$

где $A_k \in R^{n \times n}$, $B_k \in R^{n \times p}$, $C_k \in R^{q \times n}$, $D_k \in R^{q \times p}$.

Пусть ранг матрицы A_k будет равен r . Заметим, что $r < n$, так как, из-за вхождения W_1 в регулятор, A_k всегда имеет, по крайней мере, одно нулевое собственное значение.

Кратность нулевого собственного значения A_k будет $n - k$. Мы предполагаем, что существует $n - r$ линейно независимых собственных векторов для этого нулевого собственного значения. Найдем теперь преобразование подобия T , такое, что

$$T A_k T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

где A_2 невырождена. Это преобразование может быть вычислено, используя декомпозицию собственных чисел матрицы A_k . С этим T новая реализация в пространстве состояний задается в виде

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}_k \tilde{x} + \tilde{B}_k y, \\ u &= \tilde{C}_k \tilde{x} + \tilde{D}_k y, \end{cases}$$

где $\tilde{A}_k = T A_k T^{-1}$, $\tilde{D}_k = D_k$ и

$$\tilde{C}_k = C_k T^{-1} = [C_1 \quad C_2], \quad \tilde{B}_k = T B_k = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

ПИД аппроксимация в форме

$$(3.18) \quad K_{PID}(s) = K_s + K_i/s + K_d s$$

может быть получена путем рассмотрения первых членов ряда Маклорена для регулятора по переменной s :

$$\begin{aligned} K(s) &= [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} sI & 0 \\ 0 & sI - A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{C_1 B_1}{s} + (D_k - C_2 A_2^{-1} B_2 - C_2 A_2^{-2} B_2 s + \dots \end{aligned}$$

Предполагается $s \ll \sigma(A_2)$, что характеризует поведение на низких частотах. Итак, получаем

$$(3.19) \quad K_p = D_k - C_2 A_2^{-1} B_2, \quad K_i = C_1 B_1, \quad K_d = -C_2 A_2^{-2} B_2.$$

Очевидно, что основанный на данной процедуре редукции результирующий ПИД регулятор достигает хорошей аппроксимации регулятора K на низких частотах. Кроме того, можно ожидать, что результирующий ПИД регулятор будет сохранять качество парирования возмущений регулятора высокого порядка.

После процедуры редукции необходимо рассмотреть следующие шаги:

- Вследствие требования минимально-фазовости ПИД регулятора, знаки пропорционального, интегрального и дифференциального коэффициентов должны быть одинаковыми. Таким образом, если знаки соответствующих элементов K_p , K_d и K_d в (3.19) разные, то мы должны отбросить член, который имеет противоположный знак с элементом в K_i , который является наиболее важным членом.
- Вычисление производной (дифференцирование) должно выполняться с осторожностью. Было определено, что ПИД аппроксимация с идеальным регулятором s иногда дестабилизирует процесс, хотя регулятор высокого порядка работал хорошо. Это происходит редко для одноконтурных процессов, но достаточно распространено для многомерных процессов. Вероятной причиной этого является тот факт, что фазовая информация оригинального регулятора теряется, когда используется идеальный дифференциатор. Таким образом, для дифференциатора должен использоваться фильтр $\frac{1}{\alpha s + 1}$.

Когда и как мы должны использовать фильтр? Пусть

$$K_r(s) \triangleq K(s) - (K_p + K_i/s),$$

таким образом, K_r является остатком ПИ части для $K(s)$. Анализируя график сингулярного значения каждого элемента K_r/s , мы можем понять, в каком элементе должен использоваться фильтр, заменяя дифференциатор.

Суммируя сказанное выше, процедура настройки ПИД регулятора выглядит так:

- Выбираем диагональный ПИ компенсатор W_1 так, чтобы величина ε_{max} была приемлемой (между 0.2 и 0.5). На этом шаге мы пытаемся сделать действие интегратора W_1 как можно большим.
- Аппроксимируем результирующий H_∞ регулятор ПИД регулятором, как указано в процедуре, описанной в этом разделе.

- При необходимости настраиваем задающий фильтр для того, чтобы развязать задающие отклики.
- Если качество во временной области является неудовлетворительным, следуем идее настройки одноконтурных ПИ регуляторов для того, чтобы найти другой предкомпенсатор и повторить предыдущий шаг.

В заключение заметим, что ПИД аппроксимация должна быть неудовлетворительна, если части высокого порядка оригинального регулятора являются критичными для устойчивости и робастности системы.

3.3.2. Численный пример

Практическое приложение приведенного подхода к синтезу ПИД регулятора рассматривается в работе [49]. В статье на основе процедуры идентификации получена линейная динамическая модель бойлерной системы $y(s) = G(s)u(s)$, представленная в виде передаточной функции

$$(3.20) \quad G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} G_{11}(s) &= \frac{(-0.16s^2 + 0.052s + 0.0014) \cdot 10^{-3}}{s^2 + 0.0168s}, \\ G_{12}(s) &= \frac{(3.1s - 0.032) \cdot 10^{-3}}{s^2 + 0.0215s}, \quad G_{13}(s) = 0, \\ G_{21}(s) &= \frac{-0.0395 \cdot 10^{-3}}{s + 0.018}, \quad G_{22}(s) = \frac{2.51 \cdot 10^{-3}}{s + 0.0157}, \\ G_{23}(s) &= \frac{(0.588s^2 + 0.2015s + 0.0009) \cdot 10^{-3}}{s^2 + 0.0352s + 0.000142}, \\ G_{31}(s) &= \frac{(-1.18s + 0.139) \cdot 10^{-3}}{s^2 + 0.01852s + 0.000091}, \\ G_{32}(s) &= \frac{0.448s + 0.0011}{s^2 + 0.0127s + 0.000095}, \end{aligned}$$

$$G_{33}(s) = \frac{0.582s - 0.0243}{s^2 + 0.1076s + 0.00104}.$$

Входными переменными u являются: $u(1)$ — расход воды (кг/с), $u(2)$ — расход топлива(кг/с), $u(3)$ — расход впрыскиваемого парохладителя (кг/с).

Выходными переменными y являются: $y(1)$ — уровень в барабане (м), $y(2)$ — давление в барабане(МПа), $y(3)$ — температура пара (град. С).

На первом этапе выполняется синтез робастного регулятора полного порядка с использованием H_∞ процедуры формирования контура для нормализованной левой взаимно простой факторизации объекта $G(s)$.

Прежде чем приступить к процедуре формирования контура для бойлерной системы, необходимо провести масштабирование коэффициентов передаточной функции объекта $G(s)$. В работе выходная переменная $y(1)$ масштабируется на 100, $y(2)$ — на 1000, а $y(3)$ остается без изменений. Входная переменная $u(1)$ масштабируется на 10 , а $u(2)$ и $u(3)$ остаются без изменений.

Для масштабированной модели W_1 (префильтр) выбирается в виде $W_1 = W_a W_i$, где

$$W_a = \begin{bmatrix} 0.00149 & 0.0133 & 0.00362 \\ 0.00016 & 0.0075 & 0.002 \\ 0.00110 & 0.0126 & -0.0394 \end{bmatrix},$$

$$W_i = \begin{bmatrix} 10 + \frac{4}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 + \frac{0.05}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{0.05}{s} \end{bmatrix},$$

W_2 выбирается в виде единичной матрицы, т.е. $W_2 = I$.

На первом шаге процедуры формирования контура задается «формирующий» объект $G_S = W_2 G W_1$. В результате процедуры синтеза получен H_∞ регулятор полного порядка, минимальная реализация которого имеет размерность, равную 18. Оптимальный запас робастной устойчивости ε_{max} получен равным 0.3129, что говорит об удовлетворительном выполнении требований к формированию контура. Графики сингулярных значений желаемой разомкнутой системы, определяемых префильтром W_1 и постфильтром W_2 , и разомкну-

той системы с H_∞ регулятором представлены на рис. 14. Близость графиков, особенно в области частоты среза, указывает на удовлетворительное выполнении проектных требований.

Поведение функции чувствительности S и дополнительной функции чувствительности T замкнутой системы с H_∞ регулятором показано на рис. 15.

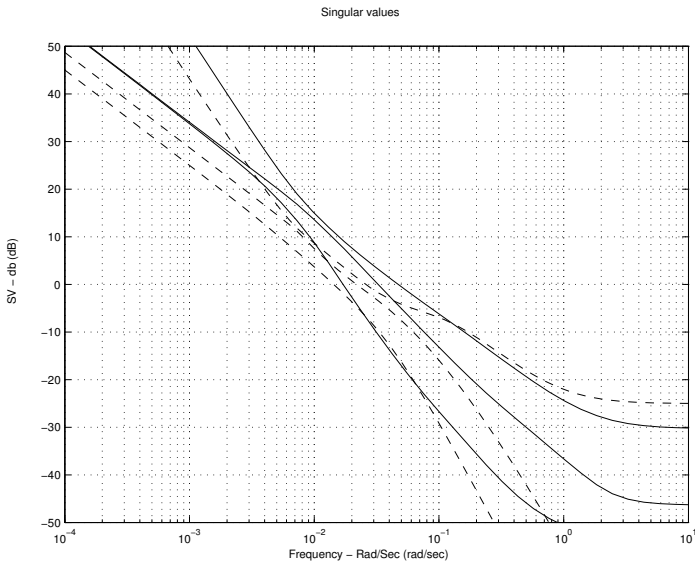


Рис. 14. Сингулярные значения разомкнутой системы с H_∞ регулятором (пунктирная) и сформированного объекта (сплошная). Ось абсцисс: частота в логарифмическом масштабе, рад/с. Ось ординат: сингулярные значения, дБ

На втором этапе синтеза ПИД регулятора производилась редукция регулятора полного порядка на основе разложения в ряд Маклорена.

В нашем случае H_∞ регулятор 18 порядка аппроксимируется ПИД регулятором со следующими коэффициентами:

$$K_p = \begin{bmatrix} -203.6982 & 89.1113 & 0.3113 \\ -2.4423 & -5.8581 & -0.0001 \\ -12.1076 & -11.2533 & 0.0659 \end{bmatrix},$$

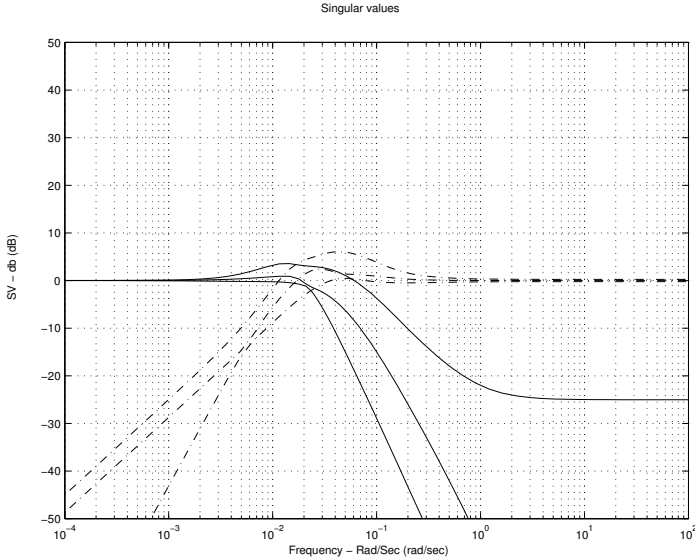


Рис. 15. Сингулярные значения функции чувствительности S (пунктирная) и дополнительной функции чувствительности T (сплошная) замкнутой системы с H_∞ регулятором. Ось абсцисс: частота в логарифмическом масштабе, рад/с. Ось ординат: сингулярные значения, дБ

$$K_i = \begin{bmatrix} -2.1518 & -2.4762 & 0.0025 \\ -0.0261 & -0.1867 & -0.0001 \\ -0.1366 & -0.3929 & -0.0009 \end{bmatrix},$$

$$K_d = \begin{bmatrix} 6608.8 & -5073.0 & 5.9321 \\ 66.255 & 52.938 & 0.0059 \\ 592.08 & -582.06 & -0.0015 \end{bmatrix}.$$

В практических приложениях ПИ регулятор применяется значительно чаще, чем ПИД регулятор. Сингулярные значения разомкнутой системой с ПИ регулятором и H_∞ регулятором приведены на рис. 16. Из графиков видно, что оба регулятора имеют близкие характеристики в пределах полосы пропускания. В области частоты среза их поведение практически не

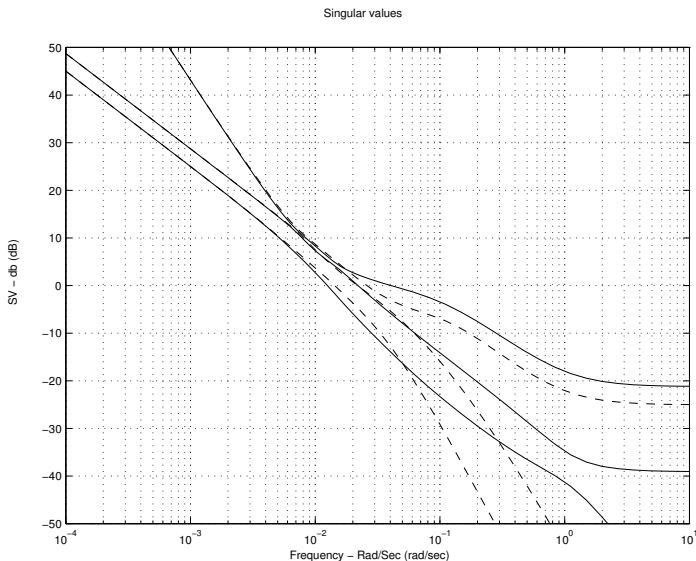


Рис. 16. Сингулярные значения разомкнутой системой с ПИ регулятором (сплошная) и H_∞ регулятором (пунктирная). Ось абсцисс: частота в логарифмическом масштабе, рад/с. Ось ординат: сингулярные значения, дБ

отличается. Ухудшение характеристик ПИ регулятора проявляется в области высоких частот.

Анализируя графики (рис. 17) максимальных сингулярных значений функции чувствительности S для обоих регуляторов, можно констатировать, что до частоты 10^{-2} рад/с графики практически совпадают. Пик у ПИ регулятора незначительно смещен относительно пика H_∞ регулятора. В области высоких частот наблюдается ухудшение свойств ПИ регулятора примерно на 5 Дб. Максимальные сингулярные значения функции дополнительной чувствительности для обоих регуляторов не превосходят 10 Дб. Положения пиков у обоих регуляторов практически совпадают. Наблюдается незначительное увеличение величины пика у ПИ регулятора.

Частотный анализ позволяет сделать вывод, что предложенный подход по аппроксимации робастного H_∞ регулятора ПИ (ПИД) регулятором является достаточно эффективным.

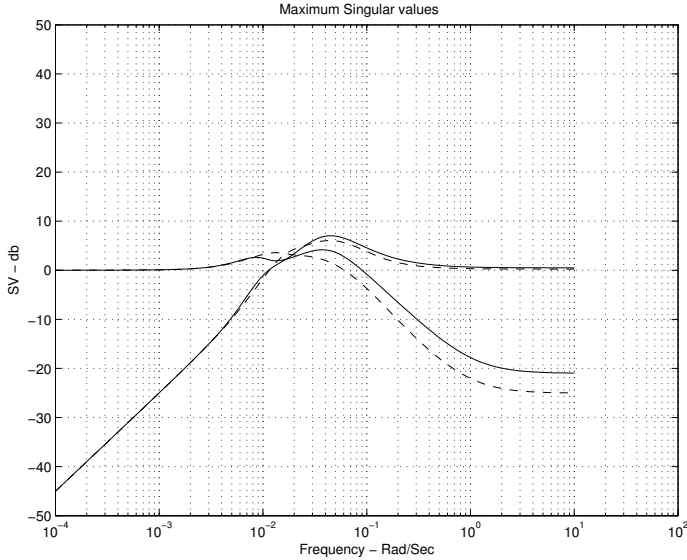


Рис. 17. Максимальные сингулярные значения S и T для H_∞ (пунктирная) и ПИД (сплошная) регуляторов. Ось абсцисс: частота в логарифмическом масштабе, рад/с. Ось ординат: сингулярные значения, дБ

3.4. НАСТРОЙКА ПИД РЕГУЛЯТОРА ПУТЕМ ПРЯМОЙ МИНИМИЗАЦИИ H_∞ НОРМЫ

В работе [40] предлагается прямой метод определения ПИД регулятора.

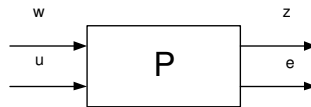


Рис. 18. Открытый объект

Для объекта P с r управляющими входами u , p измеряемыми выходами e , внешними входами w и желаемым выходом z (рис. 18), стандартный многоконтурный ПИД закон управления, включающий статическое развязывающее устройство

на входе объекта (или на выходе регулятора), может быть описан так:

$$(3.21) \quad k(s) = \begin{bmatrix} 1 & \vartheta_{12} & \cdots & \vartheta_{1p} \\ \vartheta_{21} & 1 & \cdots & \vartheta_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vartheta_{p1} & \vartheta_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_p(s) \end{bmatrix},$$

где

$$(3.22) \quad V_i(s) = K_{p_i} \left(1 + \frac{1}{sT_{i_i}} + \frac{sT_d}{1 + sT_{d_i}/N_i} \right)$$

является стандартным ПИД регулятором. Целью синтеза является определение параметрического множества Θ , на котором норма передаточной функции $\mathcal{F}_l(P, K(\Theta))$ от внешнего входа w к выходу z минимальна:

$$(3.23) \quad \Theta = \arg \inf_{\Theta} \|\mathcal{F}_l(P, K(\Theta))\|_{\infty}.$$

Так как H_{∞} норма передаточной функции $\|\mathcal{F}_l(P, K(\Theta))\|_{\infty}$ может быть вычислена с высокой точностью и достаточно быстро методами бисекции [8], [9], задача оптимизации 3.23 может быть решена последовательно. Вычисленная норма передаточной функции $\mathcal{F}_l(P, K(\Theta))$ может быть минимизирована в соответствии с параметрами регулятора. Так как H_{∞} норма определена только для устойчивых объектов, оптимизация должна учитывать следующее ограничение:

$$(3.24) \quad Re(\lambda_{max}(\mathcal{F}_l(P, K(\Theta))) < 0,$$

где λ_{max} — собственное значение с максимальной вещественной частью. Задача оптимизации с целевой функцией (3.23) и ограничением (3.24) может быть решена с помощью последовательного квадратичного программирования (SQP) [20]. С другой стороны, ограничение может быть включено в целевую функцию, и задача формулируется так:

$$(3.25) \quad \Theta = \arg \inf_{\Theta} \{ \|\mathcal{F}_l(P, K(\Theta))\|_{\infty} + \alpha \max(Re(\lambda_{max}), 0) \}.$$

Здесь α — достаточно большое положительное число, и H_∞ норма неустойчивой системы устанавливается фиксированным большим положительным числом. Эта модифицированная целевая функция позволяет получить большую робастность, но решение оптимизационной задачи медленнее по сравнению с симплекс-методом [42].

Настраиваемые константы $K_{p_i}, T_{i_i}, T_{d_i}, N_i$ и ϑ_{ij} ПИД регулятора являются естественным выбором для параметров оптимизации. Однако, числовые эксперименты показали, что сходимость достаточно медленная, и более быстрые результаты могут быть получены посредством параметризации ПИД регулятора в пространстве состояний:

$$(3.26) \quad \dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N_i}{T_{d_i}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{K_{p_i}}{T_{i_i}} \\ N_i K_{p_i} \end{bmatrix} e_i,$$

$$(3.27) \quad u_i = [1 - N_i/T_{d_i}] x + [K_{p_i} + N_i K_{p_i}] e_i,$$

где параметрами оптимизации будут $-N_i/T_{d_i}, K_{p_i}/T_{i_i}, N_i K_{p_i}, K_{p_i} + N_i K_{p_i}$ и ϑ_{ij} .

Литература

- [1] БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных уравнений и алгоритма поиска взаимнообратных матриц* / Автоматика и телемеханика. 2005. №1. С. 82 – 99.
- [2] БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*. М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
- [3] ГУДВИЕН Г.К., ТРЕБЕ С.Ф., САМГАДО М.Э. *Проектирование систем управления*. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004. – 911 с.
- [4] РОТАЧ В.Я. *Теория автоматического управления*. М.: Издательство МЭИ, 2004. – 400 с.

- [5] ANDERSON B.D.O., LIU Y. *Controller reduction: concepts and approaches* // IEEE Trans. Automat. Control. Vol. 34. 1989. P. 802 – 812.
- [6] BAO J., FORBES J.F., MCLELLAN P.J. *Robust multiloop PID controller design: a successive semidefinite programming approach* // Industrial and Engineering Chemistry Research. Vol. 38(9). 1999. P. 3407 – 3419.
- [7] BODE H.W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1945. – 235 p.
- [8] BOYD S., BALAKRISHNAN V., KABAMBA P. *A bisection methods for computing the H_∞ -norm of a transfer function matrix and related problems* // Math. Control Signals Systems. Vol. 2. 1989. Springer-Verlag, New York. P. 207 – 219.
- [9] BRUINSMA N. A., STEINBUCH M. *A fast algorithm to compute the H_∞ -norm of a transfer function matrix* // Systems and Control Letters. Vol. 14. 1990. P. 287 – 293.
- [10] CHEN B.S., CHIANG Y. M., LEE C.H. *A genetic approach to mixed H_2/H_∞ optimal PID control* // IEEE Control System Magazine. Vol. 15. 1995. P. 51 – 56.
- [11] COLLINS E.G., SKELTON R.E. *Constrained variance design using state covariance assignment* // Proc. 1986 Amer. Contr. Conf. Seattle, WA, June 1986. P. 51 – 56.
- [12] COLLINS E.G., SKELTON R.E. *A theory of state covariance assignment for discrete systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-32. 1987. No. 1. P. 32 – 41.
- [13] DESBIANS A., PAMERLEAU A., HODOUIN D. *Frequency based tuning of SISO controllers for two-by-two processes* // IEEE Proc. on Control and Applications. Vol. 143. 1996. P. 49 – 56.
- [14] DONG J.W., BROSILOW G.B. *Design of robust multivariable PID controllers via IMC* // Proc. American Control Conference. Albuquerque, New Mexico. 1997. P. 3380 – 3384.

- [15] DOYLE J.C., GLOVER K., KHARGONEKAR P.P., FRANCIS B.A. *State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems* // IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 34. 1989. No. 8. P. 831 – 847.
- [16] DOYLE J.C., STEIN G. *Robustness with observers* // IEEE Trans. on AC. Vol. AC-24. 1979. P. 607 – 611.
- [17] DOYLE J.C., STEIN G. *Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis* // IEEE Trans. on AC. Vol. AC-26. 1981. No. 1. P. 4 – 16.
- [18] FRANCIS B.A. *A course in H_∞ control theory* // in Lecture Notes Contr. Inform. Sci. Vol. 88. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [19] GENC A.U. *A state-space algorithms for designing h_∞ loop shaping PID controllers* // http://www-control.eng.cam.ac.uk/aug20/hinf_pid.pdf
- [20] GILL P.E., MURRAY W., WRIGHT M.H. *Practical optimization*. London: Academic Press, 1981. P. 176 – 180.
- [21] GLOVER K., MUSTAFA D. *Derivation of the maximum entropy H_∞ -controller and a state-space formula for its entropy* // Int. J. Contr. Vol. 50. 1989. No. 3. P. 899 – 916.
- [22] GOH K.C., TURAN L., SAFONOV M.G., PAPAVALASSILOPOULOS G.P., LY J.H. *Biaffine matrix inequality properties and computational methods*. // In Proceedings of the American Control Conference. June 1994. P. 850 – 855.
- [23] GRIMBLE M.J. *H_∞ controllers with a PID structure* // Trans. ASMEJ. Dynam. Syst. Meas. Control. Vol. 112. 1990. P. 325 – 330.
- [24] HO W.K., HANG C.C., CAO L.S. *Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications* // Automatica. Vol. 31. 1995. No. 3. P. 497 – 502.
- [25] HSIEH C., SKELTON R.E. *All covariance controllers for linear discrete-time systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 35. 1990. No. 8. P. 908 – 915.

- [26] IWASAKI T., SKELTON R.E. *All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas* // Automatica. Vol. 30. 1994, No. 8.
- [27] IWASAKI T., SKELTON R.E. *A unified approach to fixed-order controller design via linear matrix inequalities* // MPE. Vol. 1. 1995. P. 59 – 75.
- [28] JONCKHEERE E.A., SILVERMAN L.M. *A new set of invariants for linear systems — Application to reduced order compensator design* // IEEE Trans. Automat. Control. Vol. 28. 1983. P. 953 – 964.
- [29] KALMAN R. *Contributions to the theory of optimal control* // Bol. Soc. Mat. Mex. 1960. No. 5. P. 102 – 199.
- [30] KWAKERNAAK H. *Minimax frequency domain performance and robustness optimization of linear feedback systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. 1985. P. 994 – 1004.
- [31] KWAKERNAAK H., SIVAN R. *Linear optimal control systems*. New York: Wiley, 1972.
- [32] LOH A.P., HANG C.C., QUEK G.K., VASNANI V.U. *Autotuning of multiloop proportional-integral controller using relay feedback* // Ind. Eng. Chem. Res. Vol. 32. 1993. P. 1102 – 1107.
- [33] LOH A.P., VASNANI V.U. *Describing function matrix for multivariable systems and its use in multiloop PI design* // Journal of Process Control. Vol. 4. 1994. P. 115 – 120.
- [34] LUYBEN L.W. *Simple method for tuning SISO controllers in multivariable systems* // Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev. Vol. 25. 1986. P. 654 – 660.
- [35] MCFARLANE D.C., GLOVER K. *A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis* // IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 37. 1992. P. 759 – 769.
- [36] MCFARLANE D.C., GLOVER K. *Robust controller design using normalized coprime factorization description*. Springer-Verlag, 1990.

- [37] MIYAMOTO S. *Robust control design - A coprime factorization and LMI approach*. PhD thesis, University of Cambridge, Department of Engineering, May 1998.
- [38] MOORE B.C. *Principal component analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction* // IEEE Trans. Automat. Control. Vol. AC-26. 1981. P. 17 – 32.
- [39] MORARI M., ZAFIRIOU E. *Robust Process Control*. Englewood Cliffs NJ.: Prentice-Hall, 1989.
- [40] MUSCH H.E., STEINER M. *Tuning advanced PID controller via direct H_∞ minimization* // In Proceedings of European Control Conference. Brussel, Belgium. July 1997.
- [41] MUSTAFA D., GLOVER K. *Controller reduction by H_∞ -balanced truncation* // IEEE Trans. Automat. Control. Vol. 36. 1991. No. 6. P. 668 – 682.
- [42] NELDER J.A., MEAD R. *A simple method for function minimization* // Computer Journal. Vol. 1, 1964. P. 308 – 313.
- [43] PAPAGEORGIOU G. *Robust control system design: H_∞ loop shaping and aerospace applications*. PhD thesis, University of Cambridge, Department of Engineering, July 1998.
- [44] SHIU S.J., HUANG S.H. *Sequential design method for multivariable decoupling and multiloop PID controllers* // Ind. Eng. Chem. Res. Vol. 37. 1998. P. 107 – 119.
- [45] SKELTON R.E., IKEDA M. *Covariance controls for linear continuous time systems* // Int. J. Contr. Vol. 49. 1989. No. 5. P. 1773 – 1785.
- [46] SKELTON R.E., OLIVEIRA M., HAN J. *System modeling and model reduction* // http://maeweb.ucsd.edu/~skelton/publications/han_modelreduction_bookchap.pdf

- [47] TAN W., CHEN T. *Robust controller design and PID tuning for multivariable processes* // http://cobnitz.codeen.org:3125/citeseer.ist.psu.edu/cache/papers/cs/28407/http:zSzzSznyquist.ee.ualberta.cazSztchenzSz.zSzpaperszSztan_ajc02.pdf/robust-controller-design-and.pdf
- [48] TAN W., LIU J.Z., TARN P.K.S. *PID tuning based on loop-shaping H_∞ control* // IEEE Proc. on Control and Applications. Vol. 145. 1998. P. 485 – 490.
- [49] TAN W., MARQUEZ H.J., CHEN T. *Multivariable robust controller design for boiler system* // IEEE Transactions on Automatic Control System Technology. Vol. 10. 2002. No. 5. P. 735 – 742.
- [50] WANG Q.G., ZOU Q., LEE T.H., BI Q. *Autotuning of multivariable PID controllers from decentralized relay feedback* // Automatica. Vol. 33. 1997. P. 319 – 330.
- [51] ZHOU K., DOYLE J.C. *Essentials of robust control*. New Jersey: Prentice Hall Inc., 1998.
- [52] ZHUANG M., ATHERTON D.P. *Automatic tuning of optimum PID controllers* // IEEE Proc. on Control and Applications. Vol. 140. 1993. P. 216 – 224.
- [53] ZHUANG M., ATHERTON D.P. *PID controller design for a TITO system* // IEEE Proc. on Control and Applications. Vol. 141. 1994. P. 111 – 120.
- [54] ZIEGLER J.G., NICHOLS N.B. *Optimum settings for automatic controllers* // Trans. ASME. Vol. 62. 1942. P. 759 – 768.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым*