ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ СИСТЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ТИПА

Мирецкий И.Ю.
(Волжский гуманитарный институт (филиал) Волгоградского государственного университета, Волжский)
miretsky@vgi.volsu.ru

Рассматривается конвейерная задача теории расписаний. На множестве перестановочных расписаний вводится метрика. Вводятся понятия s-окрестности и s-оптимальности расписания. Разработан подход к построению расписаний, оптимальных в s-окрестности. Подход основан на проведении преобразований расписания. Определены условия эффективности композиций преобразований.

Ключевые слова: конвейерная задача, расписание, поиск в локальной окрестности

Введение

При планировании работы ряда дискретных систем эффективными оказываются модели и методы теории расписаний. Частным случаем общей задачи теории расписаний является конвейерная задача $Fm \mid perm \mid C_{\max}$, или задача об оптимальном перестановочном расписании [1]. Ее решают с целью оптимизации функционирования систем последовательной обработки (конвейерных систем).

Задача $Fm \mid perm \mid C_{\max}$ NP-трудна [4]. Для ее решения предлагались различные эвристики [5]. Их сравнительный анализ показывает, что метод поиска в локальной окрестности позволяет довольно быстро находить приемлемые по качеству решения [2]. Традиционно при реализации метода локального поиска используются техники одиночной вставки, транспозиций и блочного перемещения работ. Окрестность расписания определяется возможными вставками, транспозициями и блочными перемещениями. В настоящей работе предлагается окрестность рассматривать более широко. Для формального описания окрестности на множестве перестановочных расписаний вводится метрика; для отыскания приближенно-оптимальных расписаний предлагается использовать направленный поиск. Введение метрики позволяет при решении задачи рассматривать различные по мощности окрестности (s-окрестности), что, в свою очередь, дает возможность строить приближенно оптимальные расписания различного качества (s-оптимальные расписания) посредством эффективных (полиномиально сложных) алгоритмов.

1. Формализация задачи

Рассмотрим задачу $Fm \mid perm \mid C_{\max}$ об оптимальном перестановочном расписании, состоящую в минимизации длительности производственного цикла в системе конвейерного типа. Система состоит из m последовательно работающих машин $M_1, ..., M_m$, на которых требуется выполнить n заданий-работ $t_1, ..., t_n$. Работа t_j, $j = \overline{1,n}$, состоит из m операций $O_{1j}, ..., O_{mj}$, причем каждая операция O_{ij} выполняется соответствующей машиной M_i, $i = \overline{1,m}$, за время a_{ij}. Очередность выполнения работ на всех машинах одна и та же. Требуется определить оптимальную последовательность обработки (расписание) работ, для которой общее время выполнения всех работ на всех машинах (длина расписания $C_{\max}$, или просто C) минимально.

Пусть P_n множество всех перестановок из n элементов $1, 2, ..., n$; $p(r)$ – r-й элемент перестановки $p \in \mathrm{P}_n$. Перестановке p соответствует расписание $\pi(p) = (t_{p(1)}, ..., t_{p(n)}) \in \boldsymbol{P}$. Если $p(r) = k$, то работа t_k в расписании $\pi(p)$ занимает r-е место. Известно, что

$$C_{p(r)}(\pi, 1) = \sum_{s=1}^{r} a_{1,p(s)},\ r = \overline{1,n},\ C_{p(1)}(\pi, i) = \sum_{s=1}^{i} a_{s,p(1)},\ i = \overline{1,m},$$

$$C_{p(r)}(\pi,\ i) = \max\{C_{p(r)}(\pi,\ i-1),\ C_{p(r-1)}(\pi,\ i)\} + a_{i,\,p(r)},$$
$$i = \overline{2,m},\quad r = \overline{2,n}.$$

Здесь $C_{p(r)}(\pi,\ i)$ – момент завершения выполнения i-й операции работы, занимающей в расписании $\pi(p)$ r-е место. Длина расписания $\pi(p)$ есть $C(\pi) = C_{p(n)}(\pi,\ m)$. Задача состоит в нахождении расписания π_{opt}: $C(\pi_{\text{opt}}) = \min\limits_{\pi \in \boldsymbol{P}} C(\pi)$.

Работу t_j, $j = \overline{1,n}$, будем описывать вектором

$$\boldsymbol{A}_j = [a_{1j}, \ldots, a_{mj}]^{\text{T}},$$

а расписание $\pi(p)$ – матрицей времен выполнения работ

$$\boldsymbol{A}(\pi(p)) = [\boldsymbol{A}_{p(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{p(n)}].$$

Задача сводится к нахождению экстремальной перестановки столбцов в матрице $\boldsymbol{A}(\pi)$.

Рассмотрим путь S в матрице $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ – последовательность из $(n + m - 1)$ клеток $(i,\ j)$ матрицы $\boldsymbol{A}$, начинающуюся клеткой (1, 1), заканчивающуюся клеткой $(m,\ n)$, и такую, что каждая клетка $(i,\ j)$ (кроме последней) предшествует одной из клеток $(i + 1,\ j)$ или $(i,\ j + 1)$. Примем обозначение: ${}^{ab}S_{cd}$ – сегмент пути $S \equiv {}^{11}S_{mn}$ в матрице $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$; клетка $(a,\ b)$ матрицы – первый элемент сегмента, $(c,\ d)$ – последний.

Длина расписания π есть

$$C(\pi) = \max_{k \in \{1,\ldots,q\}} \sum_{(i,p(r)) \in S_k} a_{i,p(r)},$$

где $\{S_1, \ldots, S_q\}$ – множество всех путей в матрице $\boldsymbol{A}(\pi)$. Путь S_u называется критическим, если

$$\sum_{(i,p(r)) \in S_u} a_{i,p(r)} = C(\pi).$$

Множество всех критических путей в матрице $\boldsymbol{A}(\pi)$ обозначим $\mathbf{M}$; $\mathbf{I}_{\text{M}} = \{u \mid u \in \{1, \ldots, q\},\ S_u \in \mathbf{M}\}$.

2. Окрестность расписания и субоптимальные решения

Пусть $\pi(p)$ – произвольное расписание с матрицей времен выполнения работ $\boldsymbol{A}(\pi)=[\boldsymbol{A}_{p(1)}, ..., \boldsymbol{A}_{p(n)}]$. Зададим над π оператор преобразования $\Omega_{k,l}$, $k, l \in \{1, ..., n\}$ [2], который переносит работу $t_{p(k)}$ на позицию l и выполняет преобразование расписания $\pi(p)$ в расписание $\pi_1 = \Omega_{k,l}(\pi)$, такое, что:

1) $\boldsymbol{A}(\pi_1)=[\boldsymbol{A}_{p(1)}, \boldsymbol{A}_{p(2)}, ..., \boldsymbol{A}_{p(k-1)}, \boldsymbol{A}_{p(k+1)}, ..., \boldsymbol{A}_{p(l)}, \boldsymbol{A}_{p(k)}, \boldsymbol{A}_{p(l+1)}, ..., \boldsymbol{A}_{p(n)}]$ при $k < l$,
2) $\boldsymbol{A}(\pi_1)=[\boldsymbol{A}_{p(1)}, \boldsymbol{A}_{p(2)}, ..., \boldsymbol{A}_{p(l-1)}, \boldsymbol{A}_{p(k)}, \boldsymbol{A}_{p(l)}, ..., \boldsymbol{A}_{p(k-1)}, \boldsymbol{A}_{p(k+1)}, ..., \boldsymbol{A}_{p(n)}]$ при $k > l$,
3) $\boldsymbol{A}(\pi_1) \equiv \boldsymbol{A}(\pi)$ при $k = l$ (пустой оператор).

Композиция операторов преобразования (композиция преобразований)

$$\Omega_{k_{s-1},l_{s-1}}(\Omega_{k_{s-2},\,l_{s-2}}...(\Omega_{k_1,l_1}(\Omega_{k,l}(\pi(p))))...)$$

есть последовательность

$$\Omega_{k,l}(\pi),\ \Omega_{k_1,l_1}(\pi_1),...,\ \Omega_{k_{s-2},l_{s-2}}(\pi_{s-2})\ ,\ \Omega_{k_{s-1},l_{s-1}}(\pi_{s-1})$$

преобразований, где

$$\pi_1 \equiv \pi_1(p_1) = \Omega_{k,l}(\pi) \in \boldsymbol{P}\ ,\ \pi_2 \equiv \pi_2(p_2) = \Omega_{k_1,l_1}(\pi_1) \in \boldsymbol{P}$$

и т. д. Расписание

$$\pi_s(p_s) = \Omega_{k_{s-1},l_{s-1}}(\Omega_{k_{s-2},l_{s-2}} \dots\ (\Omega_{k_1,l_1}(\Omega_{k,l}(\pi)))\dots) \in \boldsymbol{P}$$

однозначно определяется расписанием π и набором индексов k, l и k_j, l_j, где $j = \overline{1, s-1}$.

Расписание π_j, $j \in \{1, ..., s-1\}$, называется потомком исходного расписания π.

Число непустых операторов преобразования, входящих в композицию, называется длиной композиции.

Множество расписаний класса $\boldsymbol{P}$ замкнуто относительно оператора $\Omega_{k,l}$.

Пусть π, $\pi_1 \in \boldsymbol{P}$ – два произвольных расписания для системы заданий $\{t_1, ..., t_n\}$, а $\Omega(\pi, \pi_1)$ – множество всех композиций, переводящих расписание π в π_1 ($\Omega(\pi, \pi_1) \neq \varnothing$). Обозначим через i_r длину r-й композиции множества $\Omega(\pi, \pi_1)$ и образуем множество $\mathbf{I} = \{i_1, ..., i_r, ...\}$. Из множества $\Omega(\pi, \pi_1)$ выделим композицию минимальной длины $s = \min_{i_r \in \mathbf{I}} i_r$. Верно неравенство $0 \le s \le n - 1$, причем $s = 0$ в том и только в том случае, когда $\pi \equiv \pi_1$.

Введем функцию $\rho(\pi, \pi_1)$:

$\rho(\pi, \pi_1) = s \; (= \min_{i_r \in \mathbf{I}} i_r)$.

Нетрудно убедиться в том, что функция $\rho(\pi, \pi_1)$ обладает следующими свойствами:

1) $\pi, \pi_1 \in \boldsymbol{P}$: $\rho(\pi, \pi_1) \ge 0$;
2) $\rho(\pi, \pi_1) = 0 \Leftrightarrow \pi = \pi_1$;
3) $\pi, \pi_1 \in \boldsymbol{P}$: $\rho(\pi, \pi_1) = \rho(\pi_1, \pi)$;
4) $\pi, \pi_1, \pi_2 \in \boldsymbol{P}$: $\rho(\pi, \pi_1) + \rho(\pi_1, \pi_2) \ge \rho(\pi, \pi_2)$.

Таким образом, функция $\rho(\pi, \pi_1)$ определяет метрику на множестве $\boldsymbol{P}$ перестановочных расписаний. Используя функцию $\rho(\pi, \pi_1)$, введем понятие s-окрестности расписания.

s-окрестностью расписания π называется множество

$\boldsymbol{P}_s(\pi) = \{\pi_r \mid \pi_r \in \boldsymbol{P}, \rho(\pi, \pi_1) \le s\}$.

Множество $\boldsymbol{P}_s(\pi)$ состоит из всех расписаний, которые можно получить из π s-кратным применением оператора преобразования $\Omega_{k,l}$.

Расписание $\tilde{\pi}$ называется оптимальным в окрестности $\boldsymbol{P}_{\mathrm{s}}(\pi)$ относительно критерия $C_{\max}$, если оно принадлежит этой окрестности и $C_{\max}(\tilde{\pi}) \le C_{\max}(\pi_r)$ для любого расписания π_r из этой окрестности.

Расписание π^* называется s-локально оптимальным, или просто s-оптимальным, относительно критерия $C_{\max}$, если оно оптимально (относительно $C_{\max}$) в своей s-окрестности $\boldsymbol{P}_s(\pi^*)$:

$C_{\max}(\pi^*) \le C_{\max}(\pi_r), \forall(\pi_r) \in \boldsymbol{P}_s(\pi^*)$.

Субоптимальным называется любое s-оптимальное расписание.

s-оптимальное расписание является s_1-оптимальным при любом $s_1 < s$. Оптимальное решение является s-оптимальным при любом s. Субоптимальное решение тем точнее (ближе к оптимальному), чем больше значение s; $(n-1)$-оптимальное расписание является безусловно оптимальным.

3. Построение субоптимальных расписаний

В матрице $\boldsymbol{A}(\pi(p))$ рассмотрим сегмент ${}^{\bar{r}_u,r}S_{\underline{r}_u,r}$, образованный при пересечении пути S_u с r-м столбцом $\boldsymbol{A}_{p(r)}$, $r=\overline{1,n}$:

(1) $\quad S_u \cap {}^{1r}S_{mr} = {}^{\bar{r}_u,r}S_{\underline{r}_u,r}, \;\; \bar{r}_u \le \underline{r}_u.$

Пусть $\pi_1(p_1) = \Omega_{k,l}(\pi(p))$. Разобьем путь S_u на три сегмента:

$$S^1 = {}^{11}S_{\bar{k}_u,k} \setminus \{(\bar{k}_u,k)\},\; S^2 = {}^{\bar{k}_u,k}S_{\underline{k}_u,k},\; S^3 = {}^{\underline{k}_u,k}S_{mn} \setminus \{(\underline{k}_u,k)\}.$$

В матрице $\boldsymbol{A}(\pi_1)$ выделим путь $S_{u*} = S^{1*} \cup S^{2*} \cup S^{3*}$, такой, что

1) $S^{1*} = S^1$, $S^{2*} = S^2$, $S^{3*} = S^3$, если $k = l$,

2) $S^{1*} = S^1$, $S^{2*} = S^2$, $S^{3*} = \{(s,r) \mid r < l, (s, r+1) \in S^3 \setminus \{\underline{k}_u, k+1\}\} \cup \{(\underline{l}_u, l)\} \cup \{(s,r) \mid r > l, (s,r) \in S^3\}$, если $k < l$

3) $S^{2*} = S^2$, $S^{3*} = S^3$, $S^{1*} = \{(s,r) \mid r < l, (s,r) \in S^1\} \cup \{(\bar{l}_u, l)\} \cup \{(s,r) \mid r > l, (s, r-1) \in S^1 \setminus \{\bar{k}_u, k+1\}\}$, если $k > l$.

Путь S_{u*} в матрице $\boldsymbol{A}(\pi_1)$ называется образом пути S_u в матрице $\boldsymbol{A}(\pi)$ при преобразовании $\Omega_{k,l}(\pi)$.

Определим меру эффективности преобразования $\Omega_{k,l}(\pi)$:

$\Delta_{k,l}(\pi) = \max\{C(\pi) - C(\Omega_{k,l}(\pi)), 0\}$.

Преобразование $\Omega_{k,l}(\pi)$ называется эффективным, если $\Delta_{k,l}(\pi) > 0$, и неэффективным, если $\Delta_{k,l}(\pi) = 0$. Аналогичным образом определяется эффективность композиции преобразований.

При анализе эффективности преобразований удобен аппарат образов путей. Это становится очевидным, если учесть возможность сопоставления длины $C(\pi)$ расписания π и оценки (снизу) длины $C(\pi_1)$ его расписания-потомка π_1.

Для пути S_u и индексов $k, l \in \{1, ..., n\}$ определим

$$(2) \quad \delta^u_{k,l}(\pi) = \begin{cases} \sum\limits_{i=\bar{k}_u}^{\underline{k}_u - 1} (a_{i,p(k)} - a_{i,p(k+1)}) + (a_{\underline{k}_u,\, p(k)} - a_{\underline{l}_u,\, p(k)}),\ k \le l; \\ \sum\limits_{i=\bar{k}_u + 1}^{\underline{k}_u} (a_{i,p(k)} - a_{i,p(k-1)}) + (a_{\bar{k}_u,\, p(k)} - a_{\bar{l}_u,\, p(k)}),\ k > l. \end{cases}$$

Лемма 1. Справедливы неравенства
$\Delta_{k,l}(\pi) \le \min\limits_{u \in \mathbf{I}_M} \max\{\delta^u_{k,l}(\pi), 0\}$, $k, l \in \{1, ..., n\}$.[1]

Из леммы 1 следует, что величину $\delta^u_{k,l}(\pi)$, $u \in \mathbf{I}_M$, можно рассматривать как прогноз (оценку) эффективности преобразования $\Omega_{k,l}(\pi)$. Лемма используется для элиминации неэффективных преобразований.

Теорема 1. Для того чтобы расписание π было 1-оптимальным, достаточно, чтобы для каждой пары (k, l), $k, l \in \{1, ..., n\}$, существовало $u \in \mathbf{I}_M$ такое, что $\delta^u_{k,l}(\pi) \le 0$.

Для получения s-оптимальных расписаний используются эффективные преобразования и композиции преобразований. Ключевым при этом является вопрос оценивания длины расписания

$$(3) \quad \pi_s(p_s) = \Omega_{k_{s-1}, l_{s-1}}(\Omega_{k_{s-2}, l_{s-2}} \dots (\Omega_{k_1, l_1}(\Omega_{k,l}(\pi))) \dots) \in \boldsymbol{P}_s(\pi)$$

по исходному расписанию π при произвольных значениях индексов преобразований $k, l, k_j, l_j \in \{1, ..., n\}$, $j = \overline{1, s-1}$, то есть вопрос оценки эффективности композиции. Ставится и решается задача: определить значения параметров k, l, k_j, l_j, при которых композиция эффективна.

Прежде чем перейти к решению поставленной задачи и формулированию соответствующих утверждений, выполним вспомогательные построения и сделаем ряд замечаний.

Рассмотрим сначала исходное расписание $\pi(p)$. Для всех

---

[1] Доказательства формальных результатов приведены в приложении.

$r=\overline{1,n}$ и произвольного пути S_u в матрице $\boldsymbol{A}(\pi(p))$ в соответствии с (1) определим значения $\bar{r}_u$, $\underline{r}_u$ и образуем множества

(4) $\mathbf{H}(S_u,\pi)=\{p(r)\mid \bar{r}_u=\underline{r}_u,\ 1\le r\le n\}$, $\mathbf{V}(S_u,\pi)=\{1,\dots,n\}\setminus\mathbf{H}(S_u,\pi)$.

Перейдем теперь к расписанию $\pi_s(p_s)$ (см. формулу (3)). Заметим, что для его получения необходимо построить $s-1$ промежуточных расписаний-потомков

(5) $$\begin{aligned}&\pi_1(p_1)=\Omega_{k,l}(\pi),\ \pi_2(p_2)=\Omega_{k_1,l_1}(\pi_1),\ \dots,\\&\pi_{s-1}(p_{s-1})=\Omega_{k_{s-2},l_{s-2}}(\pi_{s-2}).\end{aligned}$$

Композиции, в которых многократно выполняется перенос одной и той же работы, не рассматриваются: будем считать, что

(6) $p(k)\neq p_i(k_i)$, $i=\overline{1,s-1}$, $p_i(k_i)\neq p_j(k_j)$, $i,j=\overline{1,s-1}$, $i\neq j$.

Наконец, в матрицах $\boldsymbol{A}(\pi_1)$, $\boldsymbol{A}(\pi_2)$, ..., $\boldsymbol{A}(\pi_{s-1})$, соответствующих расписаниям-потомкам (5), выделим пути: S^1_{u*} – образ пути S_u в матрице $\boldsymbol{A}(\pi_1)$, S^i_{u*} – путь в матрице $\boldsymbol{A}(\pi_i)$, являющийся образом пути S^{i-1}_{u*} в матрице $\boldsymbol{A}(\pi_{i-1})$, $i=\overline{2,s}$.

Лемма 2. Пусть $\pi\equiv\pi(p)$, S_u – путь в матрице $\boldsymbol{A}(\pi)$, $|\mathbf{H}(S_u,\pi)|>s$. Пусть $\pi_s(p_s)$ определяется (3) и

(7) $p(k)\in\mathbf{H}(S_u,\pi)$, $p_i(k_i)\in\mathbf{H}(S^i_{u*},\pi_i)$,

Тогда:

1) существует, по крайней мере, $(|\mathbf{H}(S_u,\pi)|-s)>0$ индексов v из множества $\{1,\dots,n\}$, таких, что $\delta^{u*}_{v,w}(\pi_s)=\delta^{u}_{\hat{v},\hat{w}}(\pi)$, причем между парами (v,w) и $(\hat{v},\hat{w})$ можно установить соответствие;

2) множество $\mathbf{H}(S_u,\pi)$ инвариантно относительно преобразований $\Omega_{k,l}(\pi)$, $p(k)\notin\mathbf{V}(S_u,\pi)$.

Лемма показывает согласованность оценок. А именно, оценки $\delta^{u*}_{k_i,l_i}(\pi_i)$ эффективности преобразований расписаний-потомков π_i, $i=\overline{1,s-1}$, содержатся в системе оценок $\delta^{u}_{k,l}(\pi)$ (2), построенной для исходного расписания π. В то же время, пары индексов преобразований (k,l) и (k_i,l_i), $i=\overline{1,s-1}$, однозначно определяют расписание (композицию) (3). Поэтому при выполнении условий (6) и (7) появляется возможность оценки длины расписания-потомка π_s по исходному расписанию π. Однако невыясненным пока остается способ конструирования эффективной композиции – вторая (и главная) часть проблемы синтеза s-оптимальных расписаний: какие работы и на какие позиции следует перенести в расписании π для уменьшения его длины. Перейдем к обсуждению этого вопроса.

Пусть в расписании $\pi(p)$ определены s работ с индексами $p(\hat{k}_0),\ p(\hat{k}_1), \ldots,\ p(\hat{k}_{s-1})$, позиции которых следует изменить на $\hat{l}_0,\ \hat{l}_1,\ \ldots,\ \hat{l}_{s-1}$ соответственно. Эти работы и позиции могут быть выделены, например, в результате анализа системы оценок (2), в предположении, что проведение комплекса преобразований $\Omega_{\hat{k}_i,\hat{l}_i}(\pi),\ i=\overline{0,s-1}$, приведет к расписанию, длина которого меньше длины $C(\pi)$ исходного. Суммарная эффективность преобразований $\Omega_{\hat{k}_i,\hat{l}_i}(\pi)$, $i=\overline{0,s-1}$, оценивается как $\hat{\delta}(\pi)=\sum_{i=0}^{s-1}\delta^{u}_{\hat{k}_i,\hat{l}_i}(\pi)$.

Рассмотрим задачу, обратную той, что решалась в лемме 2: определить композиции

$$\Omega_{k_{s-1},l_{s-1}}(\Omega_{k_{s-2},l_{s-2}} \ldots (\Omega_{k_1,l_1}(\Omega_{k_0,l_0}(\pi)))\ldots)$$

и преобразования, их составляющие, для которых справедлива оценка $\hat{\delta}(\pi)$. Задача не является тривиальной, поскольку нельзя применить s операторов $\Omega_{k_i,l_i}(\pi)$, $i=\overline{0,s-1}$, к одному и тому же расписанию π. При решении этой задачи используется свойство инвариантности множества $\mathbf{H}(S_u,\ \pi)$.

Можно показать, что любая композиция вида (3), удовлетворяющая условиям (6) и (7), может быть описана последовательностью из s преобразований $\Omega_{k,l}(\pi)$ самого расписания π. Представим эту последовательность в виде схемы

(8) $\Omega_{(\hat{k}_0,\hat{l}_0),\ (\hat{k}_1,\hat{l}_1),\ \ldots,\ (\hat{k}_{s-1},\hat{l}_{s-1})}(\pi)$.

В записи (8) пары индексов $(\widehat{k}_i, \widehat{l}_i)$, $i = \overline{0, s-1}$, определяют преобразования $\Omega_{(\widehat{k}_i, \widehat{l}_i)}(\pi)$, которые необходимо провести. Запись (8) является схемой проведения преобразований. С помощью этой схемы описывается семейство композиций, в котором каждая композиция имеет оценку эффективности $\widehat{\delta}(\pi)$. Несложно установить состав этого семейства и указать способ доопределения схемы (8) на случай, когда среди индексов $\widehat{k}_i$ существуют такие, что $p(\widehat{k}_i) \in \mathbf{V}(S_u, \pi)$. После доопределения любую композицию из s преобразований, а значит, и любое расписание из окрестности $\boldsymbol{P}_s(\pi)$, можно описать схемой (8). Семейство расписаний, соответствующих схеме (8) при фиксированном наборе $\widehat{k}_i, \widehat{l}_i$, $i = \overline{0, s-1}$, обозначается $\Pi_s(\pi)$:

$$\Pi_s(\pi) = \Omega_{(\widehat{k}_0, \widehat{l}_0),\, (\widehat{k}_1, \widehat{l}_1),\, \ldots,\, (\widehat{k}_{s-1}, \widehat{l}_{s-1})}(\pi) \subset \boldsymbol{P}_s(\pi).$$

Образуем множества

$$\mathbf{H}_u^+ = \left\{(k, l) \mid p(k) \in \mathbf{H}(S_u, \pi),\ l \in \{1,\ \ldots,\ n\}, \delta_{k,l}^u(\pi) > 0\right\},$$

$$\mathbf{H}_u^- = \left\{(k, l) \mid p(k) \in \mathbf{H}(S_u, \pi),\ l \in \{1,\ \ldots,\ n\}, \delta_{k,l}^u(\pi) \le 0\right\},$$

$$\mathbf{V}_u = \left\{(k, l) \mid p(k) \in \mathbf{V}(S_u, \pi),\ l \in \{1,\ \ldots,\ n\}\right\}.$$

Очевидно $|\mathbf{H}_u^+ \cup \mathbf{H}_u^- \cup \mathbf{V}_u| = n^2$, так что пара индексов (k, l) любого преобразования $\Omega_{k,l}(\pi)$ принадлежит одному из трех описанных множеств. Пары индексов (k, l) из множества $\mathbf{H}_u^+$ определяют преобразования с «хорошим» прогнозом, а пары из множества $\mathbf{H}_u^-$ – преобразования с «плохим» прогнозом.

Механизм построения эффективной композиции указывает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{H}$ – произвольное подмножество множества $\{(k, l) \mid k \in \{1, \ldots, n\},\ l \in \{1, \ldots, n\}\}$, $|\mathbf{H}| = s > 1$. Для того чтобы расписание $\pi_s \in \Pi_s(\pi) = \Omega_{(\widehat{k}_0, \widehat{l}_0),\, (\widehat{k}_1, \widehat{l}_1),\, \ldots,\, (\widehat{k}_{s-1}, \widehat{l}_{s-1})}(\pi)$, где $(\widehat{k}_i, \widehat{l}_i) \in \mathbf{H}$, $i = \overline{0, s-1}$, обладало свойством $C(\pi_s) < C(\pi)$, необходимо, чтобы для каждого $u \in \mathbf{I}_{\mathrm{M}}(\pi)$ выполнялось либо

1) $\mathbf{H} \cap \mathbf{V}_u = \varnothing$ и $\sum\limits_{(\hat{k}_i,\hat{l}_i)\in \mathbf{H}\cap\mathbf{H}_u^+} \delta^u_{\hat{k}_i,\hat{l}_i}(\pi) + \sum\limits_{(\hat{k}_i,\hat{l}_i)\in \mathbf{H}\cap\mathbf{H}_u^-} \delta^u_{\hat{k}_i,\hat{l}_i}(\pi) > 0$,

либо

2) $\mathbf{H} \cap \mathbf{V}_u \neq \varnothing$.

Доказательство теоремы опирается на лемму 2 и приведено в [2].

Следствие теоремы 2. Пусть

1) $\exists u \in \mathbf{I}_{\mathrm{M}}(\pi)$: $|\mathbf{H}_u^-| \geq s$, 2) $\forall\, i = \overline{0, s-1}$: $(\hat{k}_i, \hat{l}_i) \in \mathbf{H}_u^-$.

Тогда $\forall \pi_s \in \Pi_s(\pi) = \Omega_{(\hat{k}_0,\hat{l}_0),\,(\hat{k}_1,\hat{l}_1),\,\ldots,\,(\hat{k}_{s-1},\hat{l}_{s-1})}(\pi)$: $C(\pi_s) \geq C(\pi)$.

Следствие теоремы 2 элиминирует неэффективные композиции.

На базе приведенных теоретических положений могут быть построены эффективные алгоритмы синтеза субоптимальных расписаний. Лемма 2, а также теорема 2 и ее следствие позволяют строить алгоритмы локального поиска без «слепого» блуждания по окрестности. Фактически они обеспечивают возможность проведения направленного поиска в схемах последовательного улучшения. Описание 1-оптимальных алгоритмов решения задачи Беллмана–Джонсона (в том числе, алгоритма градиентного типа) приведено в работе [3]. s-оптимальные ($s > 1$) алгоритмы позволяют получать приближения более высокого качества. Однако их требования к вычислительным ресурсам более серьезны, в силу чего s-оптимальные алгоритмы резонно адаптировать к имеющимся ресурсам (настраивать параметр s).

В заключение отметим, что задача $Fm\,|\,perm\,|\,C_{\max}$ – не единственная, где можно использовать представленный подход к получению приближенно оптимальных решений. Аналоги приведенных лемм и теорем можно получить для задач с директивными сроками, с повторным обслуживанием и др. Введенные в работе определение s-окрестности и понятие s-оптимальности допускают широкое использование и применимы к решению класса задач, которые можно поставить на множестве перестановок.

Приложение

Доказательство леммы 1.

1. При $k = l$, очевидно, $\Delta_{k,l}(\pi) = \delta^u_{k,l}(\pi) = 0$.

2. Пусть $k < l$. Выберем произвольно $u \in I_M$ и рассмотрим критический путь S_u матрицы $\boldsymbol{A}(\pi) = [\boldsymbol{A}_{p(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{p(n)}]$. Разобьем путь S_u на сегменты ${}^{11}S_{\bar{k}_u,k} \setminus (\bar{k}_u, k)$, ${}^{\bar{k}_u,k}S_{\underline{k}_u,k}$ и ${}^{\underline{k}_u,k}S_{mn} \setminus (\underline{k}_u, k)$. Длина расписания π есть

$$C(\pi) = \sum_{(i,p(j))\in {}^{11}S_{\bar{k}_u,k}\setminus(\bar{k}_u,k)} a_{i,p(j)} + \sum_{i=\bar{k}_u}^{\underline{k}_u} a_{i,p(k)} + \sum_{(i,p(j))\in {}^{\underline{k}_u,k}S_{mn}\setminus(\underline{k}_u,k)} a_{i,p(j)}.$$

Рассмотрим расписание $\pi_1(p_1) = \Omega_{k,l}(\pi)$, $k < l$. В матрице $\boldsymbol{A}(\pi_1)$ выделим путь S_{u*}, являющийся образом пути S_u. Имеем:

$$\sum_{(i,p_1(j))\in {}^{11}S^*_{\bar{k}_u,k}\setminus(\bar{k}_u,k)} a_{i,p_1(j)} = \sum_{(i,p(j))\in {}^{11}S_{\bar{k}_u,k}\setminus(\bar{k}_u,k)} a_{i,p(j)},$$

$$\sum_{(i,p_1(j))\in {}^{\bar{k}_u,k}S^*_{\underline{k}_u,k}} a_{i,p_1(j)} = \sum_{i=\bar{k}_u}^{\underline{k}_u} a_{i,p_1(k)} = \sum_{i=\bar{k}_u}^{\underline{k}_u} a_{i,p(k+1)},$$

$$\sum_{(i,p_1(j))\in {}^{\underline{k}_u,k}S^*_{mn}\setminus(\underline{k}_u,k)} a_{i,p_1(j)} = \sum_{(i,p(j))\in {}^{\underline{k}_u,k}S_{mn}\setminus(\underline{k}_u,k)} a_{i,p(j)} - a_{\underline{k}_u,p(k+1)} + a_{\underline{l}_u,p(k)}.$$

В левых частях равенств суммирование выполняется вдоль сегментов пути S_{u*}. Учитывая, что в матрице $\boldsymbol{A}(\pi_1)$ путь S_{u*} не обязательно является критическим, получаем:

$$C(\pi_1) \geq \sum_{(i,p_1(j))\in S_{u*}} a_{i,p_1(j)} = \sum_{(i,p(j))\in {}^{11}S_{\bar{k}_u,k}\setminus(\bar{k}_u,k)} a_{i,p(j)} +$$

$$+ \sum_{i=\bar{k}_u}^{\underline{k}_u} a_{i,p(k+1)} + \sum_{(i,p(j))\in {}^{\underline{k}_u,k}S_{mn}\setminus(\underline{k}_u,k)} a_{i,p(j)} - a_{\underline{k}_u,p(k+1)} + a_{\underline{l}_u,p(k)}.$$

Оценим теперь величину $\Delta_{k,l}(\pi)$.

$$\Delta_{k,l}(\pi) \overset{def}{=} \max\{C(\pi) - C(\pi_1), 0\} \leq$$

$$\leq \max\left[\sum_{i=\bar{k}_u}^{\underline{k}_u} a_{i,p(k)} - \left(\sum_{i=\bar{k}_u}^{\underline{k}_u} a_{i,p(k+1)} - a_{\underline{k}_u,p(k+1)} + a_{\underline{l}_u,p(k)}\right), 0\right] =$$

$$= \max\left[\sum_{i=\bar{k}_u}^{\underline{k}_u-1} a_{i,p(k)} + a_{\underline{k}_u,p(k)} - \left(\sum_{i=\bar{k}_u}^{\underline{k}_u-1} a_{i,p(k+1)} + a_{\underline{l}_u,p(k)}\right), 0\right] =$$

$$= \max\left[\sum_{i=\bar{k}_u}^{\underline{k}_u-1}\left(a_{i,p(k)} - a_{i,p(k+1)}\right) + \left(a_{\underline{k}_u,p(k)} - a_{\underline{l}_u,p(k)}\right), 0\right] = \max\{\delta^u_{k,l}(\pi), 0\}.$$

Неравенство $\Delta_{k,l}(\pi) \le \max\{\delta^u_{k,l}(\pi), 0\}$ верно при всех $u \in \mathbf{I}_{\text{M}}$, откуда следует справедливость леммы для случая $k < l$.

3. Доказательство для случая $k > l$ проводится аналогично. •

Доказательство теоремы 1.

Если выполняется

$$\forall k,\, l \in \{1, \ldots, n\}\ \ \exists u \in \mathbf{I}_{\text{M}}:\ \ \delta^u_{k,l}(\pi) \le 0,$$

то, в силу леммы 1, не существует ни одного эффективного преобразования $\Omega_{k,l}(\pi)$ расписания π. Следовательно, расписание π является 1-оптимальным. •

Доказательство леммы 2.

Образуем множество $\mathbf{L}(S_u, \pi) = \{i \mid i = \underline{r}_u,\ 1 \le r \le n\} \cup \{1\}$.

1. Пусть $s = 1$.

Из определений оператора преобразования и образа пути при учете того, что $p(k) \in \mathbf{H}(S_u, \pi)$, следует: $\mathbf{L}(S_u, \pi) = \mathbf{L}(S_{u*}, \pi_1)$, $\mathbf{H}(S_u, \pi) = \mathbf{H}(S_{u*}, \pi_1)$. Покажем:

$\forall (v, w)$: $p_1(v) \in \mathbf{H}(S_u, \pi) \setminus \{p(k)\}, w \in \{1, \ldots, n\}$

$\exists\,(\hat{v}, \hat{w}) : p(\hat{v}) \in \mathbf{H}(S_u, \pi) \setminus \{p(k)\}, \hat{w} \in \{1, \ldots, n\}$: $\delta^{u*}_{v,w}(\pi_1) = \delta^u_{\hat{v},\hat{w}}(\pi)$.

Для всех пар индексов (k, l), удовлетворяющих условиям $p(k) \in \mathbf{H}(S_u, \pi)$, $l \in \{1, \ldots, n\}$, оценка $\delta^u_{k,l}(\pi)$ имеет вид

$$\delta^u_{k,l}(\pi) = \begin{cases} a_{\underline{k}_u,\, p(k)} - a_{\underline{l}_u,\, p(k)}, & k \le l; \\ a_{\bar{k}_u,\, p(k)} - a_{\bar{l}_u,\, p(k)}, & k > l. \end{cases}$$

Так как $p(k) \in \mathbf{H}(S_u, \pi)$, то $p_1(v) \in \mathbf{H}(S_{u*}, \pi_1)$ при всех v, при которых выполнено условие $p_1(v) \in \mathbf{H}(S_u, \pi) \setminus \{p(k)\}$. Поэтому при любом $w \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место:

$$\delta^{u*}_{v,w}(\pi_1)=\begin{cases}a_{\underline{v}_{u*},\,p_1(v)}-a_{\underline{w}_{u*},\,p_1(v)}, & v\le w;\\ a_{\overline{v}_{u*},\,p_1(v)}-a_{\overline{w}_{u*},\,p_1(v)}, & v>w.\end{cases}$$

Заметим: $\underline{w}_{u*}, \overline{w}_{u*} \in \mathbf{L}(S_{u*}, \pi_1)$. Определим $\widehat{v}$ из условия $p(\widehat{v})=$ $=p_1(v)$. Так как $p(\widehat{v})\in \mathbf{H}(S_u, \pi)$, то при любом $t\in\{1, \ldots, n\}$

$$\delta^{u}_{\widehat{v},t}(\pi)=\begin{cases}a_{\underline{\widehat{v}}_u,\,p(\widehat{v})}-a_{\underline{t}_u,\,p(\widehat{v})}, & \widehat{v}\le t;\\ a_{\overline{\widehat{v}}_u,\,p(\widehat{v})}-a_{\overline{t}_u,\,p(\widehat{v})}, & \widehat{v}>t\end{cases}=\begin{cases}a_{\underline{v}_{u*},\,p_1(v)}-a_{\underline{t}_u,\,p_1(v)}, & v\le t;\\ a_{\overline{v}_{u*},\,p_1(v)}-a_{\overline{t}_u,\,p_1(v)}, & v>t,\end{cases}$$

причем $\underline{t}_u, \overline{t}_u \in \mathbf{L}(S_u, \pi)$. В силу того, что $\mathbf{L}(S_u, \pi)=\mathbf{L}(S_{u*}, \pi_1)$, всегда можно подобрать такое значение $\widehat{w}\in\{1,\ldots,n\}$, чтобы выполнялось $\delta^{u*}_{v,w}(\pi_1)=\delta^{u}_{\widehat{v},\widehat{w}}(\pi)$.

2. Пусть $s > 1$ и

(9) $p(k)\neq p_i(k_i),\ i=\overline{1,s-1},\ p_i(k_i)\neq p_j(k_j),\ i, j=\overline{1,s-1},\ i\neq j$.

Положим $\pi\equiv\pi_{i-1}$, $\pi_1\equiv\pi_i$, $i = 2, 3, \ldots, s$. Из п. **1** следует $\mathbf{L}(S^{i-1}_{u*}, \pi_{i-1}) = \mathbf{L}(S^{i}_{u*}, \pi_i)$, $\mathbf{H}(S^{i-1}_{u*}, \pi_{i-1}) = \mathbf{H}(S^{i}_{u*}, \pi_i)$, то есть

(10) $\mathbf{L}(S_u, \pi) = \mathbf{L}(S^{i}_{u*}, \pi_i)$, $\mathbf{H}(S_u, \pi) = \mathbf{H}(S^{i}_{u*}, \pi_i)$, $i=\overline{1,s}$.

Учитывая равенства (10) и рассуждая, как в п. **1**, заключаем, что для каждого элемента $\delta^{u*}_{v,w}(\pi_i)$ множеств $\left\{\delta^{u*}_{v,w}(\pi_i)\,|\right.$ $\left.p_i(v)\in\mathbf{H}(S^{i}_{u*},\pi_i)\setminus\{p(k), p_1(k_1),\ldots, p_{i-1}(k_{i-1})\}, w\in\{1,\ldots,n\}\right\}$, $i =$ $= 1, 2, \ldots, s$, найдется равный ему элемент $\delta^{u}_{\widehat{v},\widehat{w}}(\pi)\in\left\{\delta^{u}_{x,y}(\pi)\,|\right.$ $\left.p(x)\in\mathbf{H}(S_u,\pi)\setminus\{p(k), p_1(k_1),\ldots, p_{i-1}(k_{i-1})\}, y\in\{1,\ldots,n\}\right\}$ ($\widehat{v}$ определяется из условия $p(\widehat{v})=p_i(v)$, $\widehat{w}$ – так же, как в п. **1**).

Если условие (9) не выполняется, то $|\{p(k), p_1(k_1), \ldots, p_{s-1}(k_{s-1})\}| < s$, и все сказанное сохраняет силу. •

Литература

1. КОНВЕЙ Р.В., МАКСВЕЛЛ В.Л., МИЛЛЕР Л.В. *Теория расписаний*. М.: Наука, 1975. – 360 с.
2. МИРЕЦКИЙ И. Ю., ЩЕРБАКОВ М. А. *Матричные модели*

и методы в теории расписаний: Монография. – Пенза: Изд.-во Пенз. гос. ун-та, 2003. – 260 с.

3. МИРЕЦКИЙ И. Ю. *Синтез оптимальных расписаний для систем последовательного типа* // Известия РАН. Теория и системы управления, 2002. № 1. С. 77–85.
4. GAREY M. R., JOHNSON R. S., SETHI RAVI. *The Complexity of Flow-Shop and Job-Shop Problem* // Math. Oper. Res. 1976. № 2. Pp. 117–129.
5. TAILLARD E. *Some Efficient Heuristic Methods for the Flow-Shop Sequencing Problem* // European J. Operational Research. 1990. Vol. 47. № 1. Pp. 65–74.