ОДИН ИЗ МЕТОДОВ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШЕНИЯ ПРИ ЧЕТКИХ И НЕЧЕТКИХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Долгов А. И., Короченцев Д. А.
(Ростовский Военный Институт Ракетных Войск)
den_dd_80@mail.ru

В терминах вариационного исчисления описан метод сравнительной оценки прогнозируемой эффективности решения с использованием четких, но недостоверных данных об обстановке (без получения дополнительной информации) и с использованием нечетких, но достоверных данных (с получением дополнительной информации). Показано, что переход от четких, но недостоверных к нечетким, но достоверным данным приводит к приросту прогнозируемой эффективности решения на 10-30%.

Ключевые слова: четкие данные, нечеткие данные, эффективность решения.

Введение

При всем обилии научных работ [1, 3, 4], посвященных принятию управленческих решений в условиях нечетких данных, вопросы оценки эффективности получаемых решений практически не проработаны, в связи с чем исследование таких вопросов представляет актуальное научное направление. В первую очередь требуется сравнение эффективности решений при четких, но недостоверных исходных данных и нечетких, но достоверных исходных данных.

Под эффективностью решения понимается степень выполнения поставленной задачи, оцениваемая с учетом ресурсных (временных, материальных и др.) затрат.

Результаты анализа процессов выработки и реализации решений при различных видах исходных данных приводят к выводу о том, что общая модель сравнительной оценки эффективности решения при четких и нечетких исходных данных должна включать следующие частные модели:

1) модель исходных данных, используемых при принятии решения;
2) модель оценки эффективности решения при использовании четких, но недостоверных значений показателей;
3) модель получения дополнительной информации;
4) модель снижения эффективности решения за счет ресурсных затрат на получение дополнительной информации;
5) модель оценки эффективности решения при использовании нечетких, но достоверных значений показателей;
6) модель сравнительной оценки эффективности решений при использовании четких, но недостоверных и нечетких, но достоверных значений показателей.

Частные модели 1 и 2 в совокупности описывают эффективность решения при использовании четких, но недостоверных значений показателей.

Частные модели 1, 3, 4 и 5 в совокупности описывают эффективность решения при использовании нечетких, но достоверных значений показателей

1. Модель исходных данных, используемых для принятия решения

Будем исходить из того, что лицо, принимающее решение (ЛПР), получает информацию об обстановке, необходимую для принятия решения, в виде предъявляемого ему значения интегрального показателя, формируемого на основе некоторого множества частных показателей, представляющих исходные данные об обстановке.

Для любого из показателей, используемых при принятии решения, будем рассматривать три вида значений:

- истинное значение;
- четкое, но недостоверное значение;
- нечеткое, но достоверное значение.

Под истинным значением показателя понимается его значение, соответствующее объективной реальности.

При сборе информации сведения об истинном значении показателей обычно представляются субъективно в виде четких, но недостоверных значений либо нечетких, но достоверных значений.

Будем в дальнейшем считать, что нечеткие, но достоверные значения показателя C представляются в виде нечетких нормально-распределенных чисел $\widetilde{C}_{p,i}$ вида:

$$(1)\quad \widetilde{C}_{p,i} = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\left(x - C_{p,i}\right)^2}{2\sigma_i^2} \right)$$

где: $\widetilde{C}_{p,i}$ – нечеткое нормально-распределенное число, определяемое при i-ом получении информации об исходных данных;
$C_{p,i}$ – среднее значение нечеткого нормально-распределенного числа $\widetilde{C}_{p,i}$;
σ_i – величина, характеризующая степень размытости нечеткого нормально-распределенного числа $\widetilde{C}_{p,i}$.

Значение нечеткого показателя является достоверным в том смысле, что величина C принадлежит интервалу размытости, определяемого значением $3\sigma_i$, т. е.

$$C_{p,i} - 3\sigma_i \le C \le C_{p,i} + 3\sigma_i .$$

В общем случае представления нечеткого нормально-распределенного числа $\widetilde{C}_{p,i}$ имеет место абсолютная ошибка

$\Delta C_{абс.i}$ определения среднего значения $C_{p,i}$ относительно истинного значения C, такая что $\Delta C_{абс.i} = C_{p,i} - C$ (рис. 1).

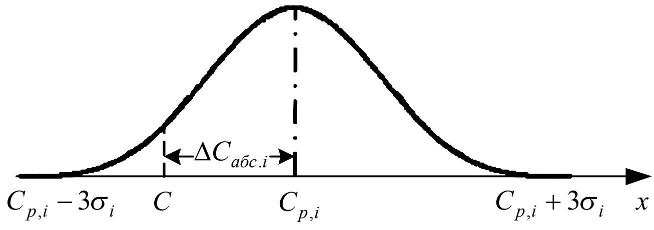

Рис. 1 Нечеткое нормально-распределенное число $\widetilde{C}_{p,i}$

В дальнейшем будем рассматривать относительные ошибки $\Delta C_i = \dfrac{\Delta C_{абс.i}}{C}$, полагая, что $\Delta C_i \in [-1,1]$ (ошибками, превышающими истинное значение величины C, как весьма маловероятными пренебрегаем), при этом за 0 принимается отсутствие ошибки, за $|1|$ принимается величина ошибки, равная значению самого числа C.

Ошибка определения значения интегрального показателя зависит от ошибок определения значений исходных данных, на основе которых рассчитывается этот показатель. При этом ошибка интегрального показателя оказывает значительное влияние на эффективность принимаемого решения, в отличие от ошибок в значениях исходных данных, каждое из которых обычно не оказывает существенного влияния на эффективность решения.

Альтернативными по отношению к нечетким, но достоверным данным являются четкие, но недостоверные данные, чаще всего используемые на практике [1]. Четкое, но недостоверное значение показателя C получается, когда при сборе и анализе информации сознательно (или бессознательно) игнорируется неполная достоверность данных, проявляющаяся в наличии относительной ошибки ΔC, при этом в качестве значения для показателя C используют величину, соответствующую среднему прогнозируемому значению.

2. Модель оценки эффективности решения при использовании четких, но недостоверных значений показателей

Естественно исходить из того, что эффективность решения, принимаемого на основе интегрального показателя, должна описываться функциями, монотонно убывающими с увеличением ошибки определения значения показателя относительно его истинного значения. Если рассматривать функции с нормированными значениями от 0 до 1 (при этом значение эффективности, равное 1 соответствует отсутствию ошибки, а минимальное значение эффективности соответствует максимальной ошибке), то практически всеохватывающее их множество может быть представлено семейством функций

$$(2)\quad Э_ч(\Delta C) = \gamma + \exp\left(-\frac{9 \cdot \Delta C^{K_{эфф}}}{2}\right) \cdot (1-\gamma),$$

где $Э_ч(\Delta C)$ – эффективность решения при наличии ошибки ΔC без проведения мероприятий по дополнительному сбору информации;

$K_{эфф}$ – коэффициент кривизны выбираемой функции, характеризующей эффективность при использовании четких, но недостоверных значений интегрального показателя;

γ – минимальное рассматриваемое значение эффективности решения, соответствующее максимально возможной рассматриваемой относительной ошибке интегрального показателя.

Исследуемые области определения и значений функций эффективности решения в случае использования четкого, но недостоверного значения интегрального показателя, ограничиваемые функциями с максимальными и минимальными значениями $K_{эфф}$ и γ, содержат достаточно большое множество функций различной кривизны с возможными различными минимальными значениями, что иллюстрируется рис. 2.

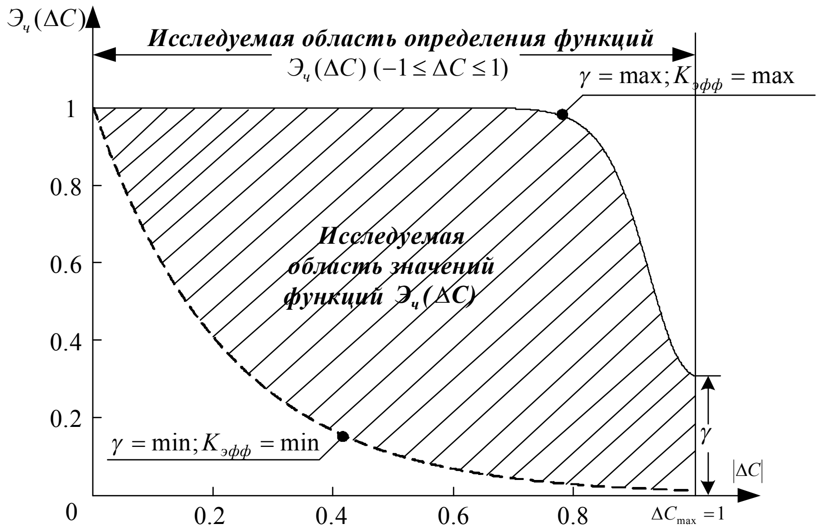

Рис. 2 Исследуемые области определения и значений функций $Э_ч(\Delta C)$

Если в дальнейшем считать, что ошибка, заключающаяся в отклонении интегрального показателя от его истинного значения как в отрицательную, так и в положительную стороны, влияет на эффективность решения одинаково, то, откладывая на оси абсцисс абсолютное значение относительной ошибки $|\Delta C|$, можно сократить вдвое исследуемую область определения функций эффективности ($-1 \le \Delta C \le 1$) (см. рис. 2.).

Руководствуясь здравым смыслом, для используемых в рассматриваемой частной модели значений коэффициентов выберем следующие конкретные интервалы:

1) $1 \le K_{эфф} \le 20$. Различным значениям $K_{эфф}$ соответствуют различные рассматриваемые функции. Нижнее значение

$K_{эфф} = 1$ соответствует вогнутой функции $Э_ч(\Delta C)$, когда относительная ошибка ΔC определения истинного значения показателя C в области её малых значений оказывает наиболее существенное влияние на эффективность принимаемого решения. Верхнее значение $K_{эфф} = 20$ соответствует выпуклой функции $Э_ч(\Delta C)$, для которой ошибка ΔC определения истинного значения показателя C в области её малых значений не оказывает существенного влияния на эффективность принимаемого решения.

2) $0 \le \gamma \le 0.3$. Выбранный интервал соответствует функциям $Э_ч(\Delta C)$, на которые относительная ошибка определения значения показателя в области её больших значений оказывает сильное влияние. Выбор значения $\gamma = 0$ соответствует функциям с максимальным влиянием ошибки в области больших значений на эффективность решения. Увеличение коэффициента γ выше значения 0.3 соответствует ослаблению влияния ошибки интегрального показателя на эффективность решения, а значение $\gamma = 1$ – отсутствию такого влияния.

3. Модель получения дополнительной информации

Рассмотрим значение показателя C_i с истинным значением C и относительной ошибкой ΔC_i (см. рис. 3, верхний график).

Для уменьшения ошибки ΔC_i проводятся мероприятия по получению дополнительной информации, например путем доразведки, и после реализации мероприятий используется для принятия решения уточненное значение $C_{p,i+1}$ рассматриваемого показателя (см. рис. 3, средний график).

Результатом проведения мероприятий по получению дополнительной информации в зависимости от затрачиваемых ресурсов будут все более уточняемые нормально-распределенные числа $\widetilde{C}^{p}_{i+j}$ (при $j = 1, \ldots, n$) (см. рис. 3, нижний график). В дальнейшем предполагается, что за счет проведения мероприятий по сбору дополнительной информации величина интервала размытости b_i изменяется пропорционально уменьшению ошибки (см. рис. 3), т. е.

$$\frac{b_i}{b_{i+j}} = \frac{C_{p,i+j} - \Delta C_{i+j}}{C_{p,i} - \Delta C_i}.$$

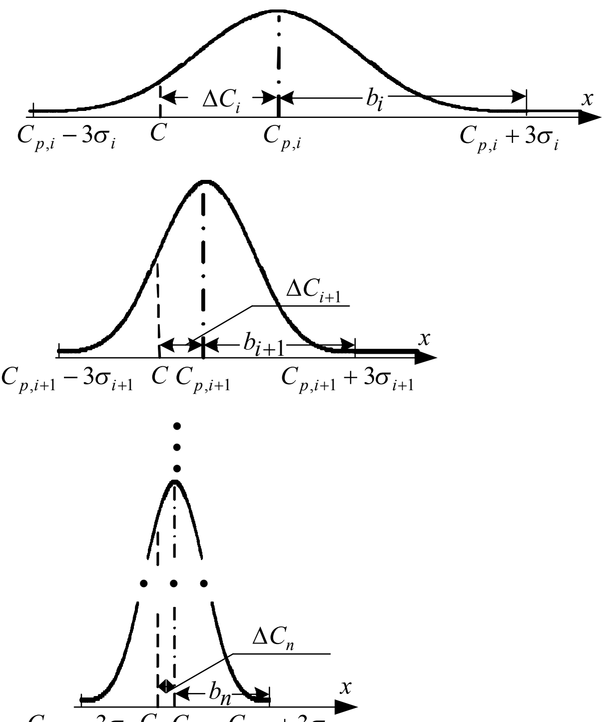

Рис. 3 Модель получения дополнительной информации

4. Модель снижения эффективности решения за счет ресурсных затрат на получение дополнительной информации

Получение дополнительной информации с целью уточнения значения рассматриваемого интегрального показателя требует затрат ресурсов (временных, людских, финансовых и т.д.), что приводит к снижению эффективности решения.

Функцию, описывающую снижение эффективности решения за счет ресурсных затрат на получение дополнительной информации, вполне естественно выбирать из семейства функций, монотонно-возрастающих с затратами на уменьшение ошибки. Далее исследуется семейство функций, описываемых соотношением

$$(3) \quad Э_{си}(\Delta C) = \frac{K_{п.эфф}}{\Delta C} - \frac{K_{п.эфф}}{\Delta C_{исх.}},$$

где: $Э_{си}(\Delta C)$ – оценка снижения эффективности решения за счет ресурсных затрат на получение дополнительной информации;

$K_{п.эфф}$ – коэффициент, определяющий кривизну выбираемой функции снижения эффективности решения за счет ресурсных затрат на получение дополнительной информации;

$\Delta C_{исх.}$ – значение рассматриваемой относительной ошибки, уменьшаемое за счет получения дополнительной информации до значения $\Delta C \le \Delta C_{исх.}$.

В ресурсных затратах, определяющих эффективность решения, доля затрат на сбор информации обычно оказывается существенно меньше затрат на то, ради чего осуществляется сбор информации. К тому же, на момент признания необходимости получения дополнительной информации система сбора информации уже создала инфраструктуру, соответствующую рассматриваемой обстановке, т.е. часть ресурсных затрат на получение новой информации не требуется в качестве дополнительных. В соответствии с этим, введем ограничения на ресурсные затраты, обусловленные сбором дополнительной информации.

Рассмотрим уменьшение относительной ошибки от значения, равного 1, до значения $1/3$, характеризующего ту часть области значений выбранной функции эффективности $Э_ч(\Delta C) < Э_ч(1/3)$, которая является предпочтительной. Будем исходить из того, что понижение эффективности решения за счет ресурсных затрат на получение дополнительной информации при рассматриваемом уменьшении ошибки пропорционально величине $Э_ч(1/3)$, т.е. равно $\alpha \cdot Э_ч(1/3)$.

С учетом таких допущений значение коэффициента $K_{п.эфф}$ может быть определено исходя из следующего соотношения

$$\left.\frac{K_{п.эфф}}{\Delta C} - \frac{K_{п.эфф}}{\Delta C_{исх.}}\right|_{\Delta C=\frac{1}{3}} = \alpha \cdot Э_ч(\frac{1}{3}) = \alpha \cdot \left(\gamma + \exp\left(-\frac{9 \cdot 0.333^{K_{эфф}}}{2}\right) \cdot (1-\gamma)\right)$$

Произведя преобразования и упрощения, приходим к соотношению

$$K_{п.эфф} = \alpha \cdot \frac{\left(\gamma + \exp\left(-\frac{9 \cdot 0.333^{K_{эфф}}}{2}\right) \cdot (1-\gamma)\right)}{2}$$

Многие эксперты считают, что можно принять $\alpha = 0.1$ с учетом того, что уменьшение α приводит к улучшению получаемых оценок. Впрочем, анализ, далее производимый для $\alpha = 0.1$, не исключает возможности исследований при значениях $\alpha \geq 0.1$.

Графически область значений функций $Э_{си}(\Delta C)$ при значениях $K_{\min} \leq K_{эфф} \leq K_{\max}$ и $0.5 \leq \Delta C_{исх.} \leq 1$ представлена на рис. 4. при этом область определения функции $Э_{си}(\Delta C)$, как и ранее, $-1 \leq \Delta C \leq 1$.

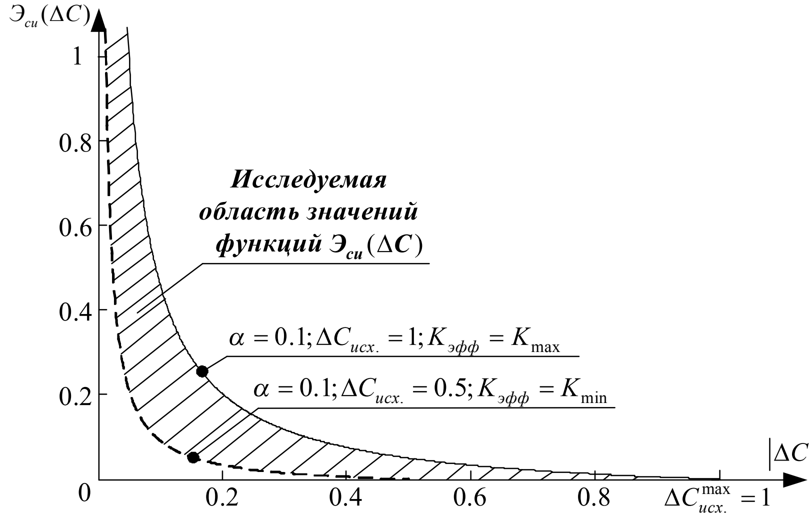

Рис. 4 Исследуемая область значений функций $Э_{cu}(\Delta C)$

5. Модель оценки эффективности решения при использовании нечетких, но достоверных значений показателей

Функция эффективности решения при использовании нечетких, но достоверных значений показателей может быть определена как разница между эффективностью решения при использовании четких, но недостоверных значений показателей и функцией, описывающей снижение эффективности решения за счет ресурсных затрат на получение дополнительной информации. Каждая получаемая таким образом функция является монотонной, имеющей точку экстремума, а семейство исследуемых функций может быть описано с помощью функционала

$$Э_{нч}(\Delta C) = Э_{ч}(\Delta C) - Э_{cu}(\Delta C) =$$

$$\left(\gamma + \exp\left(-\frac{9 \cdot \Delta C^{K_{эфф}}}{2}\right) \cdot (1-\gamma)\right) - \left(\frac{K_{п.эфф}}{\Delta C} - \frac{K_{п.эфф}}{\Delta C_{исх.}}\right) \quad (4)$$

Фактически функционал $Э_{нч}(\Delta C)$ представляет собой функцию, аргументами которой являются функции $Э_{ч}(\Delta C)$ и $Э_{си}(\Delta C)$. Точки экстремумов семейства исследуемых функций $Э_{нч}(\Delta C)$ представляет собой значения функции, называемой в вариационном исчислении экстремалью функционала.

Графически области значений семейства функций $Э_{нч}(\Delta C)$ при $1 \le K_{эфф} \le 20$ и $0 \le \gamma \le 0.3$ представлены рис. 5 (область определения функций $Э_{ч}(\Delta C)$ и $Э_{си}(\Delta C)$, как и ранее, $-1 \le \Delta C \le 1$).

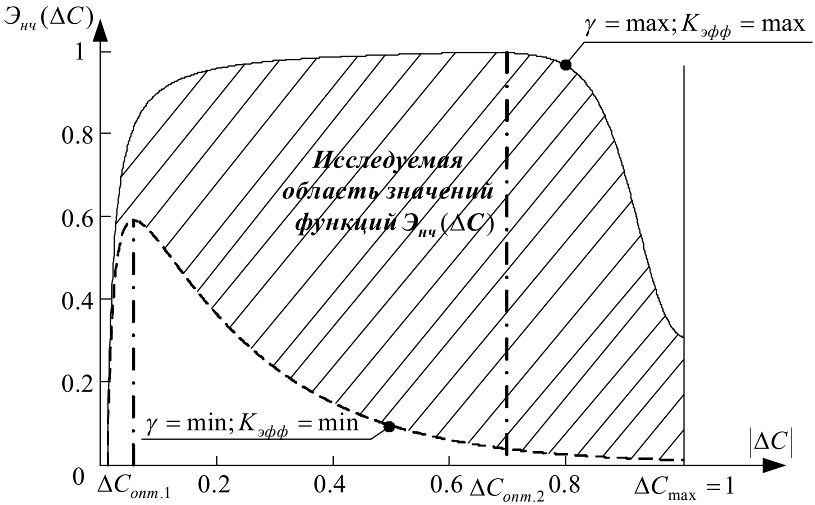

Рис. 5 Исследуемая область значений функций $Э_{нч}(\Delta C)$

Анализ соотношения (4), описывающего функцию $Э_{нч}(\Delta C)$, показывает, что получение выражения для экстремали и для экстремумов исследуемых функций аналитическими методами не представляется возможным, поэтому прибегнем к методам дискретных вычислений. Для нахождения точки экстремума воспользуемся функцией Maximize (f(x),x), встроенной в пакет

MathCAD 11. Выражение для нахождения точки экстремума при конкретном значении коэффициента $K_{эфф}$ может быть представлено в виде:

$$\Delta C = 0.1$$
$$Maximize(Э_{нч}(\Delta C), \Delta C)$$
$$\Delta C_i = \Delta C_{опт.i}$$

В этом выражении ΔC представляет собой точку начального приближения. Ниже в качестве примера представлен фрагмент программы с использованием функции Maximize (f(x),x), определяющей частные значения $\Delta C_{опт.1}$ и $\Delta C_{опт.2}$ точек экстремума при конкретных значениях $K_{эфф}$ и γ (см. рис. 5).

$K_{эфф} = 1 \quad \gamma = 0$	$K_{эфф} = 20 \quad \gamma = 0$
$\Delta C = 0.1$	$\Delta C = 0.1$
$Maximize(Э_{нч}(\Delta C), \Delta C)$	$Maximize(Э_{нч}(\Delta C), \Delta C)$
$\Delta C_{опт.1} = 0.057$	$\Delta C_{опт.2} = 0.7$

6. Модель сравнительной оценки эффективности решений при переходе от четких, но недостоверных к нечетким, но достоверным значениям показателей

Формульное соотношение, определяющее прирост эффективности решения при переходе от четких, но недостоверных к нечетким, но достоверным значениям показателей с конкретной относительной ошибкой ΔC_i имеет следующий вид:

$$\Delta Э_{\Delta C_i} = \left(\left(\gamma + \exp\left(-\frac{9\cdot(\Delta C_i)^{K_{эфф}}}{2}\right)\cdot(1-\gamma)\right) - \left(\frac{K_{п.эфф}}{\Delta C_i} - \frac{K_{п.эфф}}{\Delta C_{исх.i}}\right)\right) - \left(\gamma + \exp\left(-\frac{9\cdot(\Delta C_{исх.i})^{K_{эфф}}}{2}\right)\cdot(1-\gamma)\right)\cdot 100\% \quad (5)$$

Подставляя в выражение (5) вместо значения ΔC_i ранее полученное значение $\Delta C_{опт.,i}$, получим выражение вида:

$$\Delta Э_{\Delta C_{опт.,i}} = \left(\left(\gamma + \exp\left(-\frac{9 \cdot \left(\Delta C_{опт.,i}\right)^{K_{эфф}}}{2} \right) \cdot (1-\gamma) \right) - \left(\frac{K_{п.эфф}}{\Delta C_{опт.,i}} - \frac{K_{п.эфф}}{\Delta C_{исх.i}} \right) \right) -$$

$$- \left(\gamma + \exp\left(-\frac{9 \cdot \left(\Delta C_{исх.i}\right)^{K_{эфф}}}{2} \right) \cdot (1-\gamma) \right) \cdot 100\%$$

При расчете прироста эффективности следует отметить, что различные значения ошибок, влияющих на эффективность решения, в реальной жизни возникают с различной частотой. Так, например, максимальная ошибка, значение которой принимается равным единице, возникает крайне редко, тогда как ошибки с меньшими значениями встречаются чаще. Поэтому для описания плотности распределения ошибок, учитываемых в модели, воспользуемся нормальным законом [2] с плотностью распределения вида

(6) $$f(\Delta C_{исх.}) = \frac{1}{\sigma_{\Delta C_{исх.}} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\Delta C_{исх.} - m_{\Delta C_{исх.}})^2}{2\sigma^2_{\Delta C_{исх.}}} \right)$$

где $\sigma_{\Delta C_{исх.}}$ – среднеквадратическое отклонение ошибки $\Delta C_{исх.}$;

$m_{\Delta C_{исх.}}$ – математическое ожидание ошибки $\Delta C_{исх.}$.

Ошибки, рассматриваемые в модели, находятся в интервале $-1 \le \Delta C \le 1$, поэтому единица может быть принята за $3\sigma_{\Delta C_{исх.}}$, т.е. $\sigma_{\Delta C_{исх.}} = 1/3$, а значение математического ожидания принято равным нулю. Так как нормальное распределение является симметричным, для удобства дальнейших исследований ограничимся рассмотрением только «правой части» закона распределения величины ошибок, что графически иллюстрируется рис. 6.

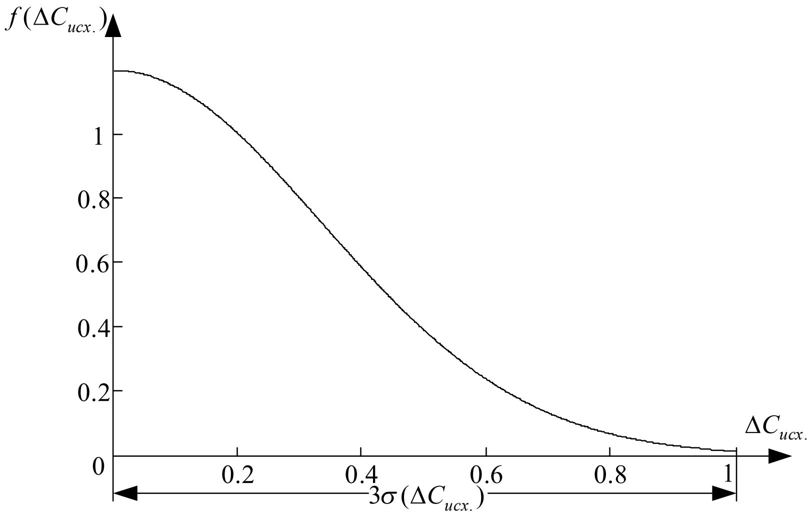

Рис. 6 Кривая распределения ошибок

Средний прирост эффективности при переходе от четких, но недостоверных к нечетким, но достоверным значениям показателей, определяемый на ограниченном интервале распределения ошибок $(\Delta C_{опт.} \le \Delta C_{исх.} \le 1)$, может быть записан следующим выражением:

$$(7) \quad \Delta Э_{ср.} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \Delta Э_{\Delta C_{опт.,i}} \cdot f(\Delta C_{исх.i})}{\sum_{i=0}^{n} f(\Delta C_{исх.i})},$$

где n - шаг дискретизации.

Результаты исследований зависимости среднего прироста эффективности при различных значениях $K_{эфф}$ и γ представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты исследований зависимости среднего прироста эффективности

$K_{эфф}$	$\Delta_{ср.}$					
	1	5	9	11	19	20
$\gamma = 0$	29.54 %	15.56 %	13.16 %	12.95 %	13.56 %	13.68 %
$\gamma = 0.1$	22.72 %	14.09 %	12.06 %	11.89 %	12.47 %	12.59 %
$\gamma = 0.2$	16.14 %	12.6%	10.94 %	10.81 %	11.36 %	11.46 %
$\gamma = 0.3$	11.06 %	11.09 %	9.78%	9.7%	10.21 %	10.3%

Из анализа таблицы 1 следует, что эффективность решения при переходе от четких, но недостоверных к нечетким, но достоверным значениям показателей повышается на 10-30%. Получение прироста эффективности 30% возможно в случае, когда относительная ошибка рассматриваемого показателя оказывает значительное влияние на эффективность решения (при $K_{эфф} = 1, \gamma = 0)$. С уменьшением влияния ошибки показателя на эффективность решения прирост эффективности решения снижается, и в конечном итоге становится равным 10% (при $K_{эфф} = 20, \gamma = 0.3)$. Снижение прироста эффективности обусловлено тем, что при уменьшении влияния ошибки показателя на эффективность решения затраты на получение его уточненных значений за счет сбора дополнительной информации возрастают.

По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1) Сравнительная оценка эффективности решения при использовании четких, но недостоверных и нечетких, но достоверных данных об обстановке осуществима на основе построения

модели в терминах вариационного исчисления, описывающей эффективность решения без получения дополнительной информации и понижение эффективности за счет ресурсных затрат на получение дополнительной информации.

2) Для широкого класса функций, описывающих зависимость эффективности решения от величины ошибки интегрального показателя, на основе которого это решения принимается, переход от использования четких, но недостоверных к нечетким, но достоверным значениям показателя обеспечивает прирост эффективности решения на 10-30%.

Литература

1. АЛТУНИН А.Е., СЕМУХИН М.В. *Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях.* – Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2000. – 352 с.
2. ВЕНТЦЕЛЬ Е. С. *Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 5-е изд. стер.* – М.: Высш. шк., 1998. – 576 с.
3. ДЮБУА Д., ПРАД А. *Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике.*- М: Радио и связь. 1990. – 288 с.
4. ОРЛОВСКИЙ С. А. *Проблемы принятия решений при нечеткой информации.*- М.: Наука, 1981. – 206 с.