ЯВНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПСЕВДООБРАТНОЙ ЛАПЛАСИАНА ДВУДОЛЬНОГО ГРАФА

Блюмин С.Л., Миловидов С.П.
(Липецкий государственный технический университет, Липецк)
slb@stu.lipetsk.ru

Получено явное выражение псевдообратной лапласиана полного невзвешенного двудольного графа, опирающееся на полученное ранее явное выражение псевдообратной матрицы инцидентности такого графа и отличающееся от известных методов псевдообращения лапласиана, использующих собственные или сингулярные числа и векторы.

Ключевые слова: двудольный граф, матрицы смежности, валентностей, инцидентности, сопротивлений, лапласиан, псевдообратная.

Введение

Графы как математические модели пространственной структуры больших дискретных распределенных систем широко используются в самых разнообразных областях, например, в теории управления организационными (активными) системами [5], в проблематике (пассивных) многоагентных систем [10] и др.; в частности, двудольные графы моделируют транспортные [1, 4] и электроэнергетические [3, 6, 8, 9] системы, используются в математической физике и химии [6, 8] и др. Графы представляются характеризующими их матрицами смежности A, валентностей V, инцидентности B и лапласианами L, связанными соотношениями [7] $L = V - A = B \cdot B^T$.

В ряде упомянутых приложений используются псевдообратные [2] некоторых из указанных матриц. Так, в [4] путём систематического использования формулы Клайна псевдообращения блочных матриц [2] получено, явное выражение псевдообратной B^+ матрицы инцидентности B полного невзвешенного двудольного графа как матрицы условий транспортной задачи (см. также [1, 2]). В [6, 8] использовано основанное на диагональном разложении [2] лапласиана L представление его псевдообратной L^+, а в [9] предложен основанный на соотношении $L = V - A$ и SVD-разложении [2] лапласиана L двудольного графа алгоритм вычисления его псевдообратной L^+. Результаты [6, 8, 9] приводят к выражениям, содержащим собственные или сингулярные числа и векторы лапласиана.

Цель данной работы: опираясь на явное выражение B^+, соотношение $L = B \cdot B^T$ и некоторые свойства псевдообратных, получить явное выражение L^+.

1. Некоторые матричные соотношения

Пусть $v = k + m$ вершин и $r = k \cdot m$ ребер полного невзвешенного двудольного графа занумерованы так, что его матрицы имеют следующую блочную структуру:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{k\times k} & J_{k\times m} \\ J_{m\times k} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} = A^T,$$

$$V = \begin{bmatrix} m \cdot I_{k\times k} & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & k \cdot I_{m\times m} \end{bmatrix} = V^T,$$

$$L = \begin{bmatrix} m \cdot I_{k\times k} & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & k \cdot I_{m\times m} \end{bmatrix} = L^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} -I_{k\times k} & -I_{k\times k} \ldots & -I_{k\times k} \\ J^{(1)}_{m\times k} & J^{(2)}_{m\times k} \ldots & J^{(m)}_{m\times k} \end{bmatrix}.$$

Здесь $0 = [0]$ и $J = [1]$ – матрицы соответствующих размеров, состоящие из нулей и единиц, I – единичные матрицы соответствующих порядков;

$J_{m\times k}^{(i)}, i=1,...,m,$ – матрицы, i-я строка которых состоит из единиц, а остальные элементы – нули, так что $\sum_{i=1}^{m} J_{m\times k}^{(i)} = J_{m\times k}$.

Далее также используются матрицы:
$J_{k\times m}^{(i)} = (J_{m\times k}^{(i)})^T$, i-й столбец которых состоит из единиц, а остальные элементы – нули, так что $\sum_{i=1}^{m} J_{k\times m}^{(i)} = J_{k\times m}$;
$P_k = P_k^T = k\cdot(J_k - v\cdot I_k)$, так что $P_k^2 = k^2\cdot(v^2\cdot I_k - (v+m)\cdot J_k)$ (здесь и далее квадратные матрицы снабжаются одним нижним индексом),

$$P_k\cdot r\cdot J_{k\times m} = -r^2\cdot J_{k\times m},\ \ r\cdot J_{m\times k}\cdot P_k = -r^2\cdot J_{m\times k};$$

$$Q_{k\times m}^{(i)} = m\cdot(v\cdot J_{k\times m}^{(i)} - J_{k\times m}), Q_{m\times k}^{(i)} = (Q_{k\times m}^{(i)})^T,$$

так что

$$\sum_{i=1}^{m} Q_{k\times m}^{(i)} = r\cdot J_{k\times m}, \sum_{i=1}^{m} Q_{m\times k}^{(i)} = r\cdot J_{m\times k},$$

$$\sum_{i=1}^{m} Q_{m\times k}^{(i)}\cdot Q_{k\times m}^{(i)} = r\cdot m\cdot(v^2\cdot I_m - (v+k)\cdot J_m).$$

2. Явное выражение псевдообратной лапласиана

Явное выражение матрицы L^+ можно получить, используя формулу Клайна псевдообращения блочных матриц [2]. Менее громоздким является его получение с использованием найденного в [4] явного выражения матрицы

$$B^+ = \frac{1}{v\cdot r}\begin{bmatrix} P_k & Q_{k\times m}^{(1)} \\ P_k & Q_{k\times m}^{(2)} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ P_k & Q_{k\times m}^{(m)} \end{bmatrix},$$

из которого, в силу свойств псевдообратных [2], следует

$$L^+ = (B \cdot B^T)^+ = (B^T)^+ \cdot B^+ = (B^+)^T \cdot B^+ =$$

$$= \frac{1}{v \cdot r}\begin{bmatrix} P_k & P_k & \dots & P_k \\ Q_{m\times k}^{(1)} & Q_{m\times k}^{(2)} & \dots & Q_{m\times k}^{(m)} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{v \cdot r}\begin{bmatrix} P_k & Q_{k\times m}^{(1)} \\ P_k & Q_{k\times m}^{(2)} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ P_k & Q_{k\times m}^{(m)} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{v^2 \cdot r^2}\begin{bmatrix} m \cdot P_k^2 & P_k \cdot (\sum_{i=1}^m Q_{k\times m}^{(i)}) \\ (\sum_{i=1}^m Q_{m\times k}^{(i)}) \cdot P_k & \sum_{i=1}^m Q_{m\times k}^{(i)} \cdot Q_{k\times m}^{(i)} \end{bmatrix}.$$

С учетом вышеуказанных соотношений между фигурирующими здесь матрицами явное выражение псевдообратной лапласиана может быть записано в виде

$$L^+ = \frac{1}{v^2 \cdot r^2}\begin{bmatrix} r \cdot k \cdot (v^2 \cdot I_k - (v+m) \cdot J_k) & -r^2 \cdot J_{k\times m} \\ -r^2 \cdot J_{m\times k} & r \cdot m \cdot (v^2 \cdot I_m - (v+k) \cdot J_m) \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяются соотношения Мура-Пенроуза [2], определяющие псевдообратную матрицу:

$$L \cdot L^+ = (L \cdot L^+)^T = L^+ \cdot L = (L^+ \cdot L)^T =$$

$$= \begin{bmatrix} m \cdot I_k & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & k \cdot I_m \end{bmatrix} \cdot L^+ =$$

$$= \frac{1}{v}\begin{bmatrix} v \cdot I_k - J_k & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & v \cdot I_m - J_m \end{bmatrix} = I - \frac{1}{v} \cdot J \ ;$$

$$L \cdot (L^+ \cdot L) =$$

$$= \begin{bmatrix} m\cdot I_k & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & k\cdot I_m \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{v} \begin{bmatrix} v\cdot I_k - J_k & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & v\cdot I_m - J_m \end{bmatrix} = L\ ;$$

$$(L^+ \cdot L)\cdot L^+ = \frac{1}{v} \begin{bmatrix} v\cdot I_k - J_k & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & v\cdot I_m - J_m \end{bmatrix} \cdot L^+ = L^+ .$$

Заключение

В качестве одного из приложений можно получить явное выражение матрицы сопротивлений R [6, 8, 9] рассмотренного графа, элементы которой определяются по формулам

$$r_{ij} = (L^+)_{ii} + (L^+)_{jj} - (L^+)_{ij} - (L^+)_{ji}, i \neq j,$$

$$r_{ii} = 0, i = 1,\dots,v,$$

так что R симметрична и имеет нулевую диагональ.

Из выражения для L^+ следует, что

- для $1 \le i, j \le k : r_{ij} = \dfrac{2}{m}$;
- для $k+1 \le i, j \le m : r_{ij} = \dfrac{2}{k}$;
- для $1 \le i \le k, k+1 \le j \le m : r_{ij} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{k\cdot m} = \dfrac{v-1}{r}$,

так что

$$R = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{m}\cdot(J_k - I_k) & \dfrac{v-1}{r}\cdot J_{k\times m} \\ \dfrac{v-1}{r}\cdot J_{m\times k} & \dfrac{2}{k}\cdot(J_m - I_m) \end{bmatrix}.$$

Предложенные в [6] явные детерминантные формулы для вычисления элементов r_{ij} матрицы сопротивлений произвольного графа,

$$r_{ij} = \det L(i, j) / \det L(i),$$

где подматрицы $L(i)$ получены из L вычеркиванием i-х строки и столбца, а $L(i, j)$ – i-х и j-х строк и столбцов, согласуются с указанными выше для случая полного невзвешенного двудольного графа.

Литература

1. БЛЮМИН С.Л., МИЛОВИДОВ С.П. *Обратные задачи динамики и динамические транспортные задачи* // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1987. № 5. С. 209 (М.: ВИНИТИ, 1985. № 7527-В85 Деп. – 56 с.).
2. БЛЮМИН С.Л., МИЛОВИДОВ С.П. *Псевдообращение.* Воронеж: ВПИ-ЛПИ, 1990. – 72 с.
3. ВЕРЕНИКОВ В.А. *Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики.* М.: ВШ, 1981. – 288 с.
4. МИЛОВИДОВ С.П. *Псевдообращение матрицы условий транспортной задачи.* М.: ВИНИТИ, 1982. № 6027-82 Деп. – 25 с.
5. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами.* М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
6. BAPAT R. *Resistance distance in graphs.* Math. Stud. 1999. № 68. – Pp. 87-98.
7. GODSIL C., ROYLE G. *Algebraic Graph Theory.* NY: Springer, 2001. – P. 439
8. GUTMAN I., XIAO W. *Generalized inverse of the Laplacian matrix and some applications.* Bull. Acad. Serbe. 2004. T. 129, № 29. – S. 15-23.
9. HO N., VAN DOOREN P. *On the pseudo-inverse of the Laplacian of a bipartite graph*. Appl. Math. Lett. 2005. Vol.18, No 8. – Pp. 917-922.
10. OLFATI-SABER R., FAX A., MURREY R. *Consensus and cooperation in networked multi-agent systems.* Proc. IEEE. 2007. Vol. 95, No 1. – Pp. 1-17.