Оптимальные иерархии управления в экономических системах

Мишин С. П. *

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ МК-8928.2006.1,
фонда содействия отечественной науке

Аннотация

Одна из важнейших проблем экономической науки – построение эффективной иерархической структуры (иерархии), позволяющей с наименьшими затратами управлять экономической системой. В настоящей работе рассматривается математическая модель оптимизации иерархии управления. Исследуется функция затрат, заданная на множестве иерархий, включающем не только деревья, но и более сложные структуры с множественным подчинением. Решается задача об оптимальной иерархии для различных классов функции затрат, рассматриваются примеры функций затрат для нескольких видов взаимодействия начальников и подчиненных в иерархии.

1. Введение

Любая экономическая система состоит из множества организованных некоторым образом агентов (сотрудников)[1]. Благодаря организации сотрудники действуют на основе определенных процедур и правил (механизмов), что позволяет достичь цели системы.

Сотрудники организации специализированы, что повышает их эффективность по сравнению с множеством одиночных (неорганизованных) агентов. Однако взаимодействие сотрудников с различной специализацией должно быть скоординировано для достижения общей цели системы. Это фундаментальная проблема любой организации, поскольку координация требует усилий, направленных на планирование совместной работы, контроль ее результатов, согласование целей отдельных сотрудников и т.д. Для реализации управленческих функций в организации создается иерархия[2].

С одной стороны, иерархия повышает эффективность взаимодействия сотрудников, например, с помощью планирования и контроля материальных, информационных и других потоков. С другой стороны, реализация управленческих функций требует затрат. В современных экономических системах доля менеджеров, выполняющих только управленческие функции, достигает 40% (см., например, (Radner, 1992)). Поэтому одним из ключевых факторов эффективности экономической системы является оптимальность иерархии.

Построение иерархии – это один из аспектов создания экономической системы. В литературе по менеджменту процесс построения (или реорганизации) экономической системы делится на три фазы[3] (см. например (Mintzberg, 1979), (Williamson, 1975)):

I. Разработка технологии: определяется состав исполнителей, их функции и порядок взаимодействия.

II. Разработка иерархии (органиграммы): определяется количество менеджеров и состав сотрудников, которыми управляет каждый менеджер.

---

* Институт проблем управления Российской академии наук, Москва. E-mail: smishin@newmail.ru Автор благодарит Ф. Т. Алескерова, А. А. Воронина, В. И. Данилова, М. В. Губко, М. И. Левина, Д. А. Новикова, В. М. Полтеровича, К. И. Сонина, участников конференций в Венгерской академии наук («Paul Erdos and His Mathematics», Будапешт 1999), Институте проблем управления («Теория активных систем», Москва 2001, 2003), участников семинаров в Центральном экономико-математическом институте, Высшей школе экономики, Российской экономической школе за ценные замечания.

[1] Ниже термины «организация» и «экономическая система» используются как синонимы.

[2] Сотрудники на более высоких уровнях иерархии обладают бóльшими правами, чем сотрудники нижних уровней. Это позволяет системе достичь цели даже в случае конфликтов.

[3] В идеале необходимо рассматривать все три фазы совместно. Однако это крайне сложная задача. Для ее упрощения фазы рассматриваются по отдельности.

III. Разработка механизмов управления: определяются полномочия начальников по отношению к их подчиненным[4].

Разработка технологии (фаза I) обычно выполняется экспертом в соответствующей предметной области. Имеется большое количество математических моделей механизмов управления (фаза III). Детально изучены механизмы управления в двухуровневой иерархии (проблема центр-агент, см., например, (Бурков, Новиков, 1999), (Hart, Holmstrom, 1987), (Grossman, Hart, 1982, 1983)). Однако механизмы управления в многоуровневых иерархиях исследованы лишь для частных случаев (например, в работе (Melumad, Mookherjee, Reichelstein, 1995) исследован механизм делегирования полномочий в трехуровневой иерархии).

В теории иерархических игр ((Кукушкин, Морозов, 1984), (Гермейер, 1976), (Гермейер, Ерешко, 1974), (Ватель, Ерешко, 1973), (Гермейер, Ватель, Ерешко, Кононенко 1973) и др.) исследован результат взаимодействия игроков (агентов) при различном порядке выбора агентами своих действий (при различной иерархии ходов). В этих и ряде других работ ((Богданов 2002, 2004), (Михайлов, 1999, 2003), (Цвиркун, 1982), (Овсиевич, 1979)) детально исследовано взаимодействие двух агентов и некоторые иерархии в многоагентных системах. Однако исследование всего множества иерархий взаимодействия крайне затруднено, поскольку требует отдельного исследования игры для каждой иерархии (Новиков, 1999, 2003).

В данной работе рассматривается фаза II – проблема выбора оптимальной иерархии из широкого множества многоуровневых иерархий. Решению этой проблемы посвящено сравнительно небольшое количество работ. Впервые математическая модель иерархической организации описана в работе (Simon, 1957). Модель основана на следующих предположениях:

1. Все функции организации, за исключением управленческих, выполняют рядовые исполнители, находящиеся на первом (низшем) уровне иерархии. На более высоких уровнях находятся менеджеры, выполняющие только управленческие функции.

2. У каждого сотрудника только один непосредственный начальник, расположенный на следующем уровне, то есть иерархия представляет собой дерево, в котором возможны только взаимодействия сотрудников соседних уровней.

3. Норма управляемости (число непосредственных подчиненных менеджера) и ставка заработной платы одинакова на одном уровне (сотрудники одного уровня однородны).

4. Норма управляемости одинакова на различных уровнях.

5. Ставка заработной платы следующего уровня равна ставке предыдущего, умноженной на одну и ту же константу, не зависящую от уровня и вида иерархии (заданную «извне»).

На основе этой модели в работе (Williamson, 1967) определены ограничения на размер организации, вызванные потерей контроля из-за снижения эффективности работы сотрудника от уровня к уровню. При этом константа снижения эффективности считается заданной «извне» и не зависящей от параметров модели. В работе (Calvo, Wellisz, 1978) снижение эффективности сотрудника связано со степенью его контроля непосредственным начальником. Чем больше у начальника непосредственных подчиненных, тем меньше вероятность того, что подчиненный будет проконтролирован, и ниже его эффективность. С помощью этого предположения в работе (Calvo, Wellisz, 1979) построена модель максимизации прибыли – разности дохода организации (произведение числа исполнителей на их эффективность) и затрат на заработную плату сотрудников. В модели возможна различная норма управляемости и различные ставки заработной платы на разных уровнях (жесткие ограничения 4 и 5 не предполагаются выполненными). В рамках этой модели доказан ряд важных закономерностей (Calvo, Wellisz, 1979). Например, в оптимальной иерархии с ростом уровня растет эффективность сотрудника, растет ставка заработной платы на единицу эффективности.

В работе (Keren, Levhari, 1983) оптимизировано время принятия решения иерархией[5] (задержка на каждом уровне равна норме управляемости плюс константа). После оптимизации вычислялись средние затраты на одного сотрудника и обосновывались пределы роста. Этот

[4] Например, права и обязанности каждого сотрудника.

[5] Впервые модель менеджеров иерархии, вычисляющих некоторое «решение» (управляющее воздействие), предложена в работе (Marschak, Radner, 1972).

подход развит в ряде работ (см., например, (Van Zandt, 1996), (Bolton, Dewatripont, 1994), (Radner, 1993)).

Модель, предложенная в работе (Calvo, Wellisz, 1979), исследована в работе (Qian, 1994) с помощью аппарата оптимального управления. Количество сотрудников на каждом уровне предполагается континуальным, что позволяет упростить дискретную задачу, заменив ее непрерывной.[6] Если требуется, чтобы исполнители работали с максимальной эффективностью, то в модели заработная плата сотрудника зависит только от нормы управляемости его непосредственного начальника. Для максимизации прибыли остается минимизировать сумму затрат на заработную плату, поскольку эффективность сотрудников максимальна. Для этой задачи в работе (Qian, 1994) найдена оптимальная иерархия.

Как и в работе (Qian, 1994), в настоящей работе решается задача об оптимальной иерархии, которая минимизирует сумму затрат на заработную плату сотрудников. Однако, в отличие от вышеуказанной модели, мы рассматриваем функцию заработной платы, зависящую не только от нормы управляемости, но и от состава тех исполнителей, которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера, то есть от специфики и сложности решаемых управленческих задач (такая функция названа в работе «*секционной*»). Таким образом, сотрудники не предполагаются однородными. Кроме того, мы рассматриваем недревовидные иерархии и возможность взаимодействия между любыми уровнями[7]. Поэтому в отличие от всех указанных выше работ в настоящей работе не требуется выполнения предположений 2 и 3 (требуется лишь выполнение базового предположения 1). В связи с этим рассматриваемая задача становится значительно более сложной. Для ее решения мы делаем дополнительное допущение: любая иерархия обеспечивает максимальную эффективность работы сотрудников, то есть для оптимизации достаточно найти иерархию с минимальными затратами. Таким образом, не рассматриваются механизмы управления (фаза III), а считается известной (заданной «извне») функция затрат сотрудника[8] и предполагается, что для максимально эффективного выполнения им своих обязанностей достаточно обеспечить заработную плату равную затратам. В частности, в работе не анализируется «качество» управленческой деятельности менеджеров. Оптимальная иерархия зависит не от персональных качеств менеджеров, а от специфики деятельности управляемых исполнителей, которая определяет функцию затрат (издержек управления). В разделе 4 приведены примеры, обосновывающие вид функции издержек для различных видов взаимодействия сотрудников иерархии.

Секционные функции позволяют моделировать ряд важных эффектов, имеющих место на практике в реальных организациях. В частности, с помощью примера секционной функции исследована оптимальность дивизиональных, функциональных и матричных иерархий[9] и доказаны многие закономерности, которые неформально обосновываются в литературе по менеджменту, исходя из эмпирических наблюдений[10]. Таким образом, предложенная модель позволяет формально объяснить ряд практических эффектов. Класс секционных функций

---

[6] Подобный метод впервые предложен в работе (Keren, Levhari, 1979). Допустимость замены дискретной задачи непрерывной исследуется в работе (Van Zandt, 1995).

[7] Это позволяет в рамках модели найти условия оптимальности дерева, симметричного дерева, в котором возможны только взаимодействия соседних уровней, и т.п.

[8] Например, функции затрат могут определяться технологией (результатом фазы I) и возможными механизмами управления (результатом фазы III).

[9] Преимущества и недостатки этих видов иерархии рассматриваются во многих работах по менеджменту (см., например, (Mintzberg, 1979)) и некоторых математических моделях. Например, в работах (Maskin, Qian, Xu, 2000), (Qian, Roland, Xu, 1997), (Milgrom, Roberts, 1992) обосновываются преимущества дивизиональной иерархии перед функциональной.

[10] Например, при некоторых ограничениях в работе (Мишин, 2004b) доказано, что дивизиональная (Д), функциональная (Ф) или матричная (М) иерархия оптимальна для организации любого размера; М иерархия остается оптимальной при снижении стандартизации и стабильности, наоборот, Д и Ф иерархии – при росте стандартизации и стабильности; Д иерархия остается оптимальной при горизонтальной интеграции и росте объемов производства, наоборот, Ф иерархия – при вертикальной интеграции и росте интенсивности функциональных связей.

интересен и с математической точки зрения: любая функция затрат иерархии, аддитивная по добавлению менеджеров и анонимная по перестановке менеджеров, будет секционной (Воронин, Мишин, 2003).

В настоящей работе предложены методы оптимизации, которые могут быть использованы для поиска оптимальной иерархии для нескольких классов секционных функций затрат. В частности, доказаны достаточные условия оптимальности дерева, 2-иерархии[11] (возможно недревовидной!) и двухуровневой иерархии. В разделе 4 на примере проиллюстрирован поиск оптимальных r-деревьев ($2 < r < +\infty$) для более узкого класса функции затрат. Таким образом, предложенная модель позволяет развивать единые теоретические методы, которые могут быть использованы для решения различных практических задач оптимизации иерархии. То есть, на наш взгляд, достигается удачный компромисс между детальностью описания реальных эффектов и возможностью математического исследования.

В следующем разделе введены определения. В разделе 3 исследованы секционные функции общего вида и в ряде случаев найден вид оптимальной иерархии. В разделе 4 полученные результаты использованы для исследования функций затрат, соответствующих различным типам взаимодействия сотрудников. Доказательства большинства формальных утверждений вынесены в приложение.

2. Модель оптимальной иерархии

2.1. Исполнители и менеджеры. Иерархии

Пусть $N=\{w_1,\ldots,w_n\}$ – множество *исполнителей*, которые могут взаимодействовать друг с другом. Обычно исполнители будут обозначаться $w, w', w'' \in N$. В данной работе множество исполнителей N предполагается заданным и неизменным.

Обозначим через M конечное множество *менеджеров*, управляющих взаимодействием исполнителей. Обычно менеджеры будут обозначаться через $m, m', m'', m_1, m_2, \ldots \in M$. Пусть $V = N \cup M$ – множество всех *сотрудников* организации (исполнителей и менеджеров). Определим состав подчиненных менеджера. Рассмотрим множество *ребер подчиненности* $E \subseteq V \times M$. Ребро $(v,m) \in E$ означает, что сотрудник $v \in V$ является *непосредственным подчиненным* менеджера $m \in M$, а m – *непосредственным начальником* сотрудника v. Таким образом, ребро направлено от непосредственного подчиненного к его непосредственному начальнику. Сотрудник $v \in V$ является *подчиненным* менеджера $m \in M$ (m является *начальником* v), если существует цепочка ребер подчиненности из v в m. Будем также говорить, что начальник *управляет* подчиненным, или подчиненный *управляется* начальником.

Определение 1. *Ориентированный граф $H = (N \cup M, E)$ с множеством менеджеров M и множеством ребер подчиненности $E \subseteq (N \cup M) \times M$ назовем иерархией, управляющей множеством исполнителей N, если граф H ацикличен, любой менеджер имеет подчиненных и найдется менеджер, которому подчинены все исполнители. Через $\Omega(N)$ обозначим множество всех иерархий.*

Определение 1 исключает графы с циклами (любой менеджер цикла является одновременно и начальником, и подчиненным остальных менеджеров цикла, что противоречит понятию подчиненности) и «менеджеров» без подчиненных. В соответствии с определением 1 в иерархии существует менеджер, управляющий всеми исполнителями (у любых исполнителей найдется общий начальник, иерархия способна управлять любыми исполнителями).

Группой исполнителей $s \subseteq N$ назовем любое непустое подмножество множества исполнителей. По определению 1 в любой иерархии H каждый менеджер имеет, по крайней мере, одного непосредственного подчиненного. Начав с любого менеджера m, мы можем двигаться по иерархии «сверху вниз» к подчиненным менеджера m. В итоге в силу ацикличности можно определить множество исполнителей, подчиненных менеджеру m. Будем называть это

[11] Любой менеджер имеет двух непосредственных подчиненных.

множество *подчиненной группой исполнителей* и обозначать $s_H(m) \subseteq N$. Будем также говорить, что менеджер m *управляет группой исполнителей* $s_H(m)$. Ниже в обозначении группы $s_H(m)$ будем опускать нижний индекс, если ясно, о какой иерархии идет речь. Для удобства дальнейшего изложения будем считать, что в любой иерархии $H \in \Omega(N)$ любому исполнителю $w \in N$ «подчинена» простейшая группа $s_H(w)=\{w\}$, состоящая из самого исполнителя.

Лемма 1. *Для любой иерархии H и любого менеджера $m \in M$ выполнено $s_H(m) = s_H(v_1) \cup \ldots \cup s_H(v_k)$, где $v_1,\ldots,v_k$ – все непосредственные подчиненные менеджера m. Для любого подчиненного v менеджера m выполнено $s_H(v) \subseteq s_H(m)$.*

Доказательство леммы очевидно. На рисунке 1a) менеджеру m непосредственно подчинены менеджеры m_1 и m_2. Менеджеру m подчинена группа $s(m)=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$. Менеджерам m_1 и m_2 подчинены группы $s(m_1)=\{w_1,w_2\}$ и $s(m_2)=\{w_3,w_4\}$ соответственно. Таким образом, группа $s(m)$ разбивается на две подгруппы $s(m_1)$ и $s(m_2)$: $\{w_1,w_2,w_3,w_4\}=\{w_1,w_2\} \cup \{w_3,w_4\}$. В примере подгруппы не пересекаются. В общем случае (рисунок 1b) пересечения возможны.

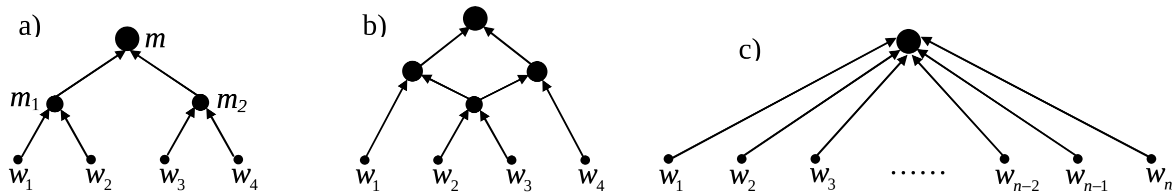

Рисунок 1. a) Пример 2-дерева, b) Пример недревовидной иерархии
c) Двухуровневая иерархия

Определение 2. *Иерархию назовем деревом, если в ней только один менеджер m не имеет начальников, а все остальные сотрудники имеют ровно одного непосредственного начальника. Менеджера m будем называть корнем дерева.*

На рисунке 1a) изображен пример дерева. Напротив, иерархия на рисунке 1b) деревом не является, так как в ней один менеджер имеет двух непосредственных начальников. Сформулируем еще одну простейшую лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма 2. *В любом дереве непосредственные подчиненные любого менеджера управляют непересекающимися группами исполнителей.*

Определение 3. *Иерархию назовем r-иерархией, если у каждого ее менеджера не более r непосредственных подчиненных, где r>1 – целое число. r-иерархию, которая является деревом, назовем r-деревом.*

В литературе по менеджменту часто используется термин «*норма управляемости*» – максимальное количество непосредственных подчиненных, которыми может управлять один менеджер. Определение r-иерархии соответствует норме управляемости, равной r. В силу леммы 2 в дереве непосредственные подчиненные менеджера управляют непересекающимися группами. То есть в дереве норма управляемости не превосходит n. Максимальную среди всех деревьев норму управляемости имеет *двухуровневая иерархия*, в которой одному менеджеру непосредственно подчинены все n исполнителей (см. рисунок 1c)).

2.2. Секционные функции затрат. Оптимальные иерархии

Определение 4. *Функцию затрат менеджера $m \in M$ в иерархии $H=(N \cup M, E) \in \Omega(N)$ назовем секционной, если она имеет вид*:

$$c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)), \tag{1}$$

где $v_1,\ldots,v_k$ – все непосредственные подчиненные менеджера m, $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$ – группы, управляемые сотрудниками $v_1,\ldots,v_k$, $c(\cdot)$ – функция, ставящая в соответствие любому набору групп неотрицательное действительное число. Затраты иерархии равны сумме затрат *всех ее менеджеров*[12]:

$$c(H) = \sum_{m \in M} c(s_H(v_1), \mathbf{K}, s_H(v_k)) \,. \tag{2}$$

Иерархию $H^* \in Arg \min_{H \in \Omega(N)} c(H)$ *с минимальными затратами назовем оптимальной иерархией.*

Оптимальных иерархий может быть несколько. В данной работе рассматривается задача поиска одной из оптимальных иерархий (*задача об оптимальной иерархии*): для заданной функции затрат[13] необходимо найти иерархию (определить количество менеджеров и их подчиненность) из $\Omega(N)$, минимизирующую затраты на управление исполнителями.

Поясним определение 4 с помощью примера иерархии, изображенной на рисунке 1а). Менеджер m управляет группой исполнителей $\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ с помощью двух непосредственно подчиненных менеджеров m_1 и m_2, управляющих группами $\{w_1,w_2\}$ и $\{w_3,w_4\}$. Предположим, что непосредственные подчиненные m_1 и m_2 справляются со своими обязанностями. В этом случае затраты менеджера m не зависят от того, как именно организованно управление группами $\{w_1,w_2\}$ и $\{w_3,w_4\}$. Например, менеджеры m_1 и m_2 могут управлять подчиненными исполнителями напрямую или с помощью подчиненных менеджеров. Это никак не отразится на затратах менеджера m, так как m управляет напрямую только менеджерами m_1 и m_2. Согласно определению 4 затраты менеджера зависят только от того, каким образом подчиненная группа исполнителей распределена между непосредственными подчиненными (в рассмотренном примере затраты менеджера m составят $c(\{w_1,w_2\},\{w_3,w_4\})$). То есть предполагается, что затраты менеджера зависят только от той «*секции*» («*отдела*», «*звена*» и т.п.), которой он управляет непосредственно. На рисунке 1а) такая секция состоит из самого менеджера m и его непосредственных подчиненных m_1 и m_2. От остальной части иерархии, индивидуальной эффективности затраты менеджера не зависят.[14]

В определении 4 среди групп $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$ могут быть группы, вложенные друг в друга. Предположим, что $s_H(v_1) \subseteq s_H(v_2)$. Это означает, что сотрудник v_1 управляет частью группы, которая подчинена сотруднику v_2. То есть один непосредственный подчиненный менеджера m лишь дублирует часть обязанностей другого непосредственного подчиненного, не имея «собственных» обязанностей. Ниже рассматриваются только функции, для которых:

$$c(s_H(v_2), \mathbf{K}, s_H(v_k)) \le c(s_H(v_1), s_H(v_2), \mathbf{K}, s_H(v_k)) \tag{3}$$

для любых групп $s_H(v_1) \subseteq s_H(v_2)$ (затраты менеджера m не снижаются при добавлении «вспомогательного» непосредственного подчиненного v_1, который может выносить на уровень менеджера m вопросы взаимодействия внутри группы $s_H(v_2)$, которые сотрудник v_2 решал самостоятельно). Таким образом, ребро подчинения (v_1,m) может быть удалено без увеличения затрат иерархии (после удаления все менеджеры управляют теми же группами).

В некоторых случаях для секционной функции вместо записи $c(s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k))$ будет использоваться упрощенная запись $c(s_1,\ldots,s_k)$ (величина $c(s_1,\ldots,s_k)$ соответствует затратам некоторого менеджера, непосредственные подчиненные которого управляют группами $s_1,\ldots,s_k$).

3. Классы секционных функций затрат и соответствующие оптимальные иерархии

3.1. Общий вид оптимальной иерархии

---

[12] Функция $c(\cdot)$ зависит именно от набора групп $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$, а не от их порядка. Некоторые группы из $s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)$ могут совпадать (множество $\{s_H(v_1),\ldots,s_H(v_k)\}$ содержит повторения). Ниже буквой $c(\cdot)$ обозначается и функция затрат иерархии, и функция затрат менеджера.

[13] Функцию затрат можно определить непосредственно (например, с помощью имеющейся информации о затратах менеджеров организации). Кроме того, функции затрат могут быть определены и из других разумных соображений (см. примеры ниже).

[14] В общем случае затраты менеджера могут зависеть от индивидуальной эффективности, уровня иерархии, начальников менеджера или даже от всей иерархии в целом. Подобные функции затрат не будут секционными и не рассматриваются в настоящей работе.

Утверждение 1. *Существует оптимальная иерархия, в которой:*

- *(i)* *все сотрудники управляют различными группами исполнителей;*
- *(ii)* *только один менеджер не имеет начальников. Этому менеджеру подчинены все остальные менеджеры и все исполнители;*
- *(iii)* *среди сотрудников, непосредственно подчиненных одному менеджеру, ни один не управляет другим.*

Условие (i) означает отсутствие полного дублирования, при котором два менеджера управляют одной и той же группой исполнителей. На рисунке 2a) приведен пример подобного дублирования. В частности, из условия (i) следует, что у любого менеджера имеется не менее двух непосредственных подчиненных (иначе в силу леммы 1 он управлял бы той же группой, что и его единственный непосредственный подчиненный).

В соответствии с условием (ii) найдется только один менеджер m, который не имеет начальников. Этому менеджеру подчинены все исполнители и все остальные менеджеры иерархии[15]. Будем называть m *высшим менеджером*. На рисунке 2b) приведен пример, в котором два менеджера не имеют начальников, то есть нарушается условие (ii).

Условие (iii) можно интерпретировать следующим образом. Пусть менеджер m_1 непосредственно подчинен менеджеру m. Тогда m непосредственно не управляет подчиненными менеджера m_1. Это соответствует «нормальному» функционированию организации, при котором менеджер управляет всеми подчиненными сотрудниками через непосредственных подчиненных, а не напрямую. На рисунке 2c) приведен пример, в котором высший менеджер m непосредственно управляет исполнителями w_2 и w_3, несмотря на то, что ими уже управляют непосредственные подчиненные m_1 и m_2 менеджера m.

Утверждение 1 позволяет упростить задачу об оптимальной иерархии, поскольку можно не рассматривать иерархии, для которых нарушается хотя бы одно из условий (i), (ii), (iii).

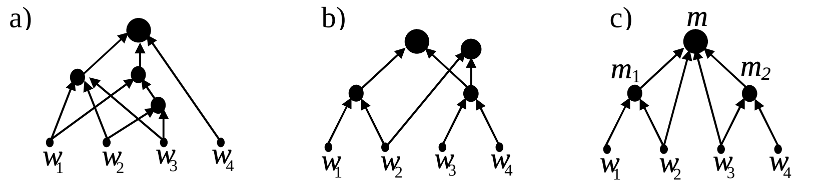

Рисунок 2. Иерархии a)-c) нарушают свойства (i)-(iii) соответственно

3.2. Оптимальность древовидной иерархии

Важным является следующий вопрос: каковы условия оптимальности древовидной иерархии? Ниже рассмотрено достаточное условие – монотонность по группам.

Определение 5. *Будем говорить, что секционная функция монотонна по группам, если затраты менеджера не убывают при расширении групп, управляемых непосредственными подчиненными, и при добавлении новых непосредственных подчиненных, то есть для любых групп $s_1,\dots,s_k$ выполнены неравенства*:

$c(s_1, s_2, \mathbf{K}, s_k) \le c(s, s_2, \mathbf{K}, s_k)$, *где группа s содержит s_1 ($s_1 \subset s$);*

$c(s_1, s_2, \mathbf{K}, s_k) \le c(s, s_1, \mathbf{K}, s_k)$, *где s – произвольная группа.*

Поясним определение 5 на примере. Любой менеджер m взаимодействует со своими непосредственными подчиненными для решения проблем их взаимодействия (соответствующие затраты могут определяться некоторой неубывающей функцией $c(\cdot)$ от количества непосредственных подчиненных). Также менеджер m может решать часть проблем внутри управляемой им группы исполнителей[16] (соответствующие затраты могут определяться некоторой

[15] Условие (ii) соответствует практике построения организаций, при которой только один высший менеджер может принимать решения, обязательные для всех сотрудников (например, может разрешить конфликт между любыми сотрудниками).

[16] Например, менеджер может затрачивать некоторые усилия при увольнении любого подчиненного

неубывающей функцией $V(|s_1 \cup \mathbf{K} \cup s_k|)$ от размера группы $s_1 \cup \mathbf{K} \cup s_k$, где $s_1,\ldots,s_k$ – группы, управляемые всеми непосредственными подчиненными менеджера). Таким образом, можно рассмотреть следующий пример секционной функции:

$$c(s_1, \mathbf{K}, s_k) = c(k) + V(|s_1 \cup \mathbf{K} \cup s_k|) \qquad (4).$$

Очевидно, что функция (4) не убывает при расширении групп $s_1,\ldots,s_k$ и при добавлении новых непосредственных подчиненных[17]. Следовательно, функция (4) представляет собой пример монотонной по группам функции затрат.

Теорема 1. *Если функция затрат монотонна по группам, то существует оптимальное дерево.*

Таким образом, достаточно проверить неравенства определения 5. При их выполнении задача об оптимальной иерархии существенно упрощается, поскольку для ее решения нужно лишь найти дерево, минимизирующее затраты. Такое дерево может быть найдено с помощью алгоритмов, описанных в работах (Воронин, Мишин, 2002b, 2003). Для произвольной секционной функции затрат точный алгоритм имеет высокую вычислительную сложность, позволяя решить задачу не более чем для 15-20 исполнителей[18]. Рассмотрим функцию затрат, которая имеет вид $c(|s_1|, \mathbf{K}, |s_k|)$.[19] В этом случае точный алгоритм позволяет найти дерево с минимальными затратами для 70-100 исполнителей[20]. Для монотонных по группам функций алгоритмы решают задачу об оптимальной иерархии. Для остальных секционных функций найденное алгоритмами дерево с минимальными затратами может не быть оптимальной иерархией. Однако оно может быть полезно, например, для сравнения затрат лучшей древовидной иерархии и той иерархии, которая реально имеется в организации на данный момент.

3.3. Оптимальность 2-иерархии и двухуровневой иерархии

Определение 6. *Секционную функцию затрат назовем сужающей, если для любого менеджера m с непосредственными подчиненными $v_1,\ldots,v_k$, $k \geq 3$ можно без увеличения затрат иерархии переподчинить нескольких сотрудников из $v_1,\ldots,v_k$ новому менеджеру m_1 и непосредственно подчинить m_1 менеджеру m. Секционную функцию затрат назовем расширяющей, если при любых вышеуказанных переподчинениях затраты иерархии не уменьшаются.*

Поясним определение 6. На рисунке 3a) изображен исходный фрагмент иерархии, в котором менеджеру m непосредственно подчинено три или более сотрудника $v_1,\ldots,v_k$. Рассмотрим сужающую функцию. Без увеличения затрат иерархии для некоторого количества $1 < j < k$ сотрудников может быть принят новый непосредственный начальник m_1, после чего менеджер m будет управлять этими сотрудниками уже не напрямую, а через своего нового непосредственного подчиненного m_1 (на рисунке 3b) переподчиняются первые j сотрудников).

исполнителя (собеседование с новым сотрудником, подписание соответствующих документов и т.п.).

[17] На практике в ряде случаев менеджер может уменьшить свои затраты за счет увеличения числа непосредственно подчиненных менеджеров («помощников»). Однако если бо́льшая часть затрат менеджера связана с координацией непосредственных подчиненных, то разумно моделировать организацию с помощью монотонной по группам функции.

[18] Имеется ввиду решение задачи персональным компьютером в течение нескольких минут.

[19] Затраты менеджера зависят только от количества непосредственных подчиненных k и от количеств $|s_1|, \mathbf{K}, |s_k|$ исполнителей в тех группах, которыми они управляют (но не от состава этих групп!).

[20] В работе (Воронин, Мишин, 2003) также показано, что в общем случае существенно снизить вычислительную сложность точных алгоритмов нельзя. В связи с этим в упомянутой работе предложен ряд эвристических алгоритмов, которые позволяют с меньшей вычислительной сложностью находить деревья, затраты которых близки к минимальным. Для функций вида $c(|s_1|, \mathbf{K}, |s_k|)$ построены эвристические алгоритмы с порядком вычислительной сложности n^2 и n^3.

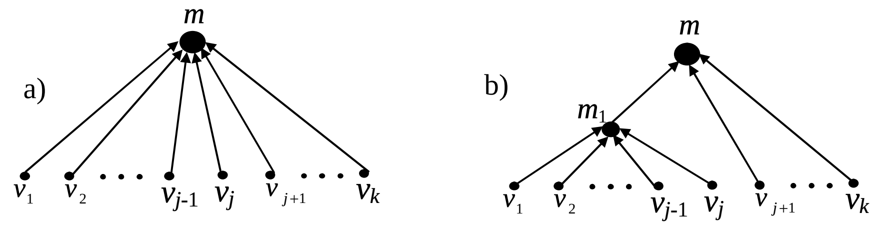

Рисунок 3. Перестроение иерархии при расширяющей и сужающей функции затрат

В общем случае могут быть переподчинены любые j сотрудников, то есть найдется некоторая перестановка ($i_1,\ldots,i_k$) чисел ($1,\ldots,k$) такая, что будут переподчинены сотрудники $v_{i_1},\mathbf{K},v_{i_j}$. При сужающей функции для любых групп $s_1 = s_H(v_1),\ldots,s_k = s_H(v_k)$, подчиненных сотрудникам $v_1,\ldots,v_k$, возможно провести описанное перестроение без увеличения затрат иерархии. Таким образом, можно записать определение сужающей функции следующим образом. Для любых групп $s_1,\ldots,s_k$, $k \ge 3$ найдется такое количество сотрудников $1 < j < k$ и перестановка ($i_1,\ldots,i_k$), для которых выполнено следующее неравенство:

$$c(s_1,\mathbf{K},s_k) \ge c(s_{i_1},\mathbf{K},s_{i_j}) + c(s_{i_1} \cup \mathbf{K} \cup s_{i_j}, s_{i_{j+1}},\ldots,s_{i_k}) . \quad (5)$$

Слева в неравенстве записаны затраты менеджера m до перестроения иерархии (см. пример на рисунке 3a)), справа – затраты менеджера m_1 и затраты менеджера m после перестроения иерархии (см. пример на рисунке 3b)). Затраты остальных менеджеров не меняются. Неравенство (5) выполнено тогда и только тогда, когда затраты иерархии не возрастают.

Содержательно неравенство (5) означает, что при сужающей функции затрат выгодно нанять для менеджера m «помощника» m_1, который возьмет на себя часть функций менеджера m. При этом у m уменьшится количество непосредственных подчиненных, то есть иерархия «сузится» (уменьшится норма управляемости). Рассмотрим расширяющую функцию затрат. Согласно определению 6 при любых вышеуказанных переподчинениях затраты иерархии не могут снизиться. То есть для любых групп $s_1,\ldots,s_k$, $k \ge 3$, любого количества сотрудников $1 < j < k$ и любой перестановки ($i_1,\ldots,i_k$) выполнено следующее неравенство:

$$c(s_1,\mathbf{K},s_k) \le c(s_{i_1},\mathbf{K},s_{i_j}) + c(s_{i_1} \cup \mathbf{K} \cup s_{i_j}, s_{i_{j+1}},\ldots,s_{i_k}) . \quad (6)$$

Неравенство (6) означает, что при расширяющей функции с помощью найма «помощника» не удастся снизить затраты иерархии, как бы мы не назначали этому помощнику подчиненных. Если неравенство (5) или (6) выполняется не на всех наборах групп $s_1,\ldots,s_k$, а лишь на наборах попарно непересекающихся групп (то есть $s_i \mathbf{I} s_j = \varnothing$ для любых $i \ne j$), то будем соответственно называть функцию затрат *сужающей на непересекающихся группах* или *расширяющей на непересекающихся группах*.

Теорема 2. *Для сужающей функции затрат существует оптимальная 2-иерархия.*

Следствие (из теорем 1 и 2). *Для сужающей на непересекающихся группах функции затрат, которая является монотонной по группам, существует оптимальное 2-дерево.*

В силу теоремы 2 на основании проверки неравенства (5) для функции затрат менеджеров можно сделать вывод о виде оптимальной иерархии в целом. При выполнении неравенства (5) функция будет сужающей, следовательно оптимальную иерархию можно искать среди 2-иерархий, в которых каждый менеджер имеет двух непосредственных подчиненных (норма управляемости минимальна). В этом случае задача об оптимальной иерархии значительно упрощается. При выполнении условия монотонности по группам достаточно проверить неравенство (5) только на непересекающихся группах $s_1,\ldots,s_k$. Если неравенство выполнено, то согласно следствию оптимальную иерархию можно искать среди 2-деревьев[21].

[21] То есть достаточно найти 2-дерево с минимальными затратами, что позволяют сделать алгоритмы, предложенные в работе (Воронин, Мишин, 2003).

Теорема 3. *Для расширяющей функции затрат оптимальна двухуровневая иерархия.*

Следствие (из теорем 1 и 3). *Для расширяющей на непересекающихся группах функции затрат, которая является монотонной по группам, оптимальна двухуровневая иерархия.*

Таким образом, если выполнено неравенство (6), то функция затрат расширяющая, и оптимальна двухуровневая иерархия, в которой норма управляемости максимальна – один менеджер управляет всеми исполнителями. При выполнении условия монотонности по группам достаточно проверить неравенство (6) только на непересекающихся группах $s_1,\ldots,s_k$.

Теоремы 2 и 3 показывают противоположность свойств сужения и расширения. Сужающая функция влечет оптимальность 2-иерархии с максимальным количеством менеджеров, каждый из которых выполняет минимум работы – управляет двумя непосредственными подчиненными. Расширяющая функция, напротив, влечет оптимальность двухуровневой иерархии с единственным менеджером, выполняющим всю работу по управлению исполнителями.

Несложно показать[22], что как монотонные по группам функции, так и функции, не являющиеся монотонными по группам, могут быть сужающими, могут быть расширяющими, могут не быть ни сужающими, ни расширяющими. Кроме того, в предельных случаях функция может быть и сужающей, и расширяющей одновременно. Соотношение классов функций изображено на рисунке 4. Для монотонных по группам функций оптимально дерево, для расширяющих функций оптимальна двухуровневая иерархия, для сужающих функций оптимальна 2-иерархия, для монотонных по группам сужающих функций оптимально 2-дерево.

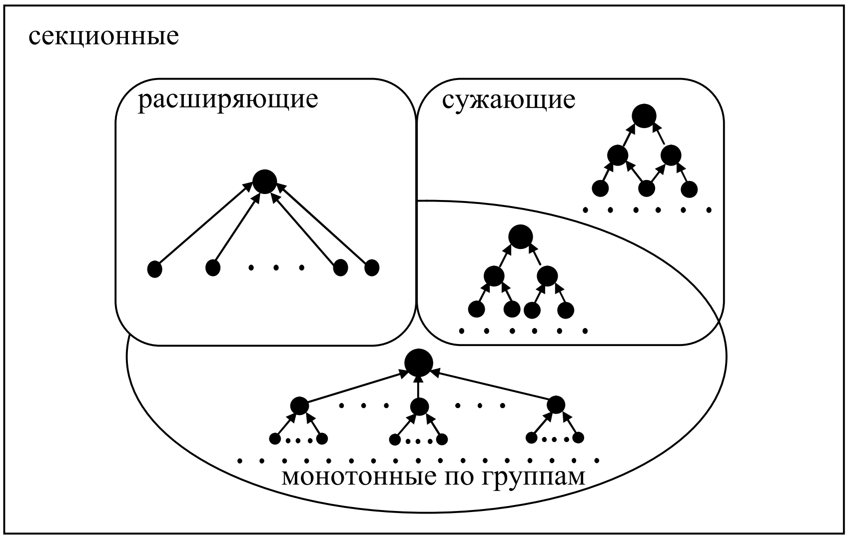

Рисунок 4. Соотношение классов монотонных по группам, сужающих и расширяющих функций

4. Примеры функций затрат для различных типов взаимодействия сотрудников

Будем считать, что для любого исполнителя $w \in N$ задано некоторое число $m(w)>0$ – *сложность исполнителя*. Сложность может соответствовать «объему работы», который выполняет этот исполнитель, его квалификации и т. п. Для произвольной группы исполнителей $s \subseteq N$ определим ее сложность как сумму сложностей входящих в нее исполнителей. *Сложность группы* $m(s) = \sum_{w \in s} m(w)$ может соответствовать, например, суммарному «объему работы», который выполняют все исполнители группы. Секционная функция затрат зависит только от групп $s_1,\ldots,s_k$, которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера. Рассмотрим несколько примеров секционной функции затрат менеджера, которая зависит только от сложностей групп:

$$c(s_1, \mathbf{K}, s_k) = [m(s_1)^a + \mathbf{K} + m(s_k)^a - \max(m(s_1)^a, \mathbf{K}, m(s_k)^a)]^b \,, \qquad \text{(I)}$$

[22] См. примеры ниже и примеры, приведенные в работе (Мишин, 2004b).

$$c(s_1,\mathbf{K},s_k)=[m(s_1)^a+\mathbf{K}+m(s_k)^a]^b\,, \tag{II}$$

$$c(s_1,\mathbf{K},s_k)=[m(s)^a/\max(m(s_1)^a,...,m(s_k)^a)-1]^b\,, \tag{III}$$

$$c(s_1,\mathbf{K},s_k)=[\sum\nolimits_{i=\overline{1,k}}(m(s)^a-m(s_i)^a)]^b\,, \tag{IV}$$

$$c(s_1,\mathbf{K},s_k)=m(s)^a/\min(m(s_1)^b,...,m(s_k)^b)\,, \tag{V}$$

где $s=s_1\cup\mathbf{K}\cup s_k$ – группа, которой управляет менеджер, $m(s_1),\mathbf{K},m(s_k),m(s)$ – сложности соответствующих групп, $a\,,b>0$ – некоторые числовые параметры функции затрат. Функции (I)-(V) затрат менеджера определяются «сложностью» (объемом работ) сотрудников «секции» (отдела, подразделения и т.п.), которая непосредственно подчинена менеджеру. В различных организациях секция может управляться с использованием различных механизмов взаимодействия между менеджером и непосредственными подчиненными (внутри секции). Ниже функции (I)-(V) интерпретируются как затраты менеджера для различных способов взаимодействия внутри секции. В менеджменте на качественном уровне рассматривается множество подобных способов взаимодействия (см., например, (Davies, Smith, Twigger, 1991), (Manz, Sims, 1987), (Peters, 1987), (Oldman, Hackman, 1981), (Jago, Vroom, 1975)).

Предположим, что среди непосредственных подчиненных менеджера имеется «*полулидер*», который полностью справляется со своими обязанностями, не требуя от непосредственного начальника затрат на управление собой. Этому случаю может соответствовать функция (I). В (I) затраты менеджера определяются сложностями групп, которые управляются всеми непосредственными подчиненными, кроме «полулидера». Под полулидером подразумевается подчиненный, который управляет группой с наибольшей сложностью.

Если среди непосредственных подчиненных менеджера *отсутствует «лидер»*, то менеджер несет затраты на управление всеми непосредственными подчиненными (функция (II)).

Предположим, что среди непосредственных подчиненных менеджера (внутри секции) имеется «*лидер*», который помогает решить проблемы взаимодействия других непосредственных подчиненных (например, с помощью своего авторитета или опыта). За счет этого снижаются затраты непосредственного начальника. Этому случаю может соответствовать функция затрат (III). Чем более сложной группой управляет подчиненный менеджеру лидер, тем выше значение «лидера», тем более снижаются затраты его начальника.

Функция (IV) может описывать затраты *в процессе индивидуальной работы менеджера с каждым непосредственным подчиненным*. Затраты определяются разностями между сложностью группы, которой управляет менеджер, и сложностями групп, которыми управляют непосредственные подчиненные[23].

Предположим, что среди непосредственных подчиненных менеджера имеется сотрудник, который управляет группой с малой сложностью. Этот сотрудник может иметь *низкую квалификацию*. Малоквалифицированный непосредственный подчиненный может значительно увеличивать затраты менеджера. Например, на управление этим подчиненным требуется слишком много усилий, которые отвлекают менеджера от решения более сложных вопросов (то есть вопросов, которые и должен решать этот менеджер). Этому случаю соответствует функция затрат (V). Чем ниже минимальная квалификация непосредственного подчиненного, тем выше затраты непосредственного начальника.

Решим задачу об оптимальной иерархии для функций (I)-(V) с помощью исследования их свойств. Очевидно, что функции (I) и (II) монотонны по группам, функции (III), (IV) и (V) не являются монотонными по группам. Несложно проверить свойства сужения и расширения (неравенства (5) и (6)) для этих функций. В результате можно доказать следующие утверждения (доказательства см. в работе (Мишин, 2004b)):

[23] Например, менеджер m, которому подчинена группа $s_H(m)$, в процессе управления непосредственным подчиненным m_1 передает ему информацию о той части группы $s_H(m)$, которой m_1 не управляет. Объем этой информации определяется разностью сложностей $m\,(s_H(m))$ и $m\,(s_H(m_1))$. Сумма объемов информации по всем непосредственным подчиненным и определяет затраты менеджера (IV).

Утверждение 2. *Функция* (I) *при* $b \le 1$ *– расширяющая, при* $b \ge 1$ *– сужающая.*

Утверждение 3. *Функция* (II) *при* $b \le 1$ *– расширяющая, при* $b > 1$ *и* $a \ge 1$ *– расширяющая на непересекающихся группах.*

Утверждение 4. *Функция* (III) *при* $b \ge 1$ *– сужающая.*

Утверждение 5. *Функция* (IV) *при* $b \ge 1$ *– сужающая.*

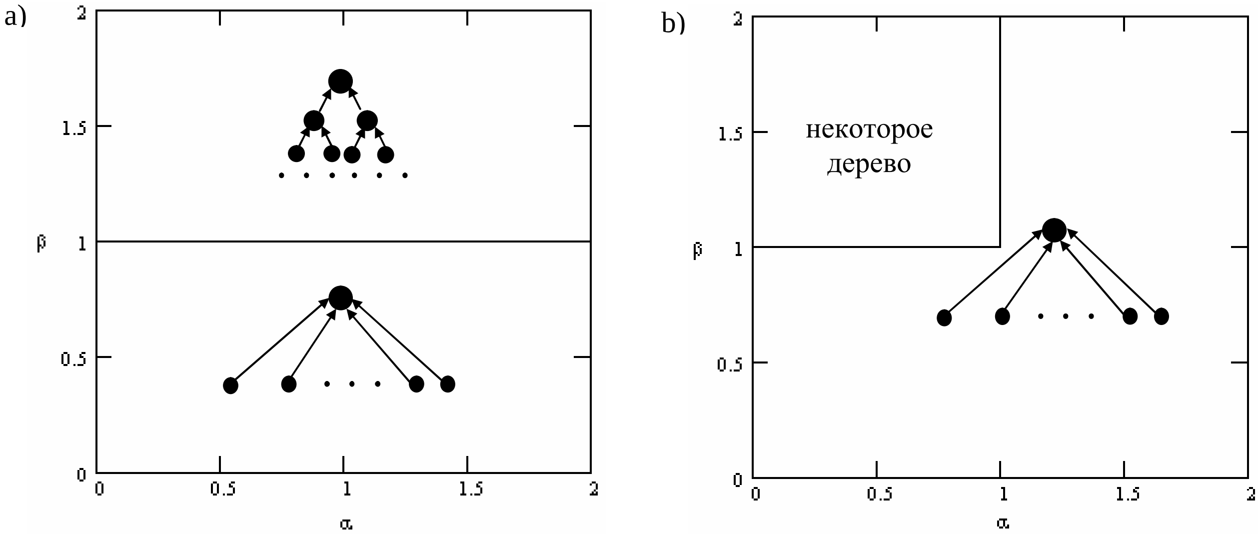

Рисунок 5. Виды оптимальной иерархии для функции (I) (рисунок a)) и функции (II) (рисунок b))

Утверждение 2 позволяет найти оптимальную иерархию для функции (I) (см. рисунок 5 а)). При $b \le 1$ оптимальна двухуровневая иерархия (см. теорему 3). При $b \ge 1$ оптимально 2-дерево, имеющее минимальные затраты (см. следствие к теоремам 1 и 2).

Утверждение 3 показывает, что для функции (II) при $b \le 1$ и при $b > 1$, $a \ge 1$ оптимальна двухуровневая иерархия (см. теорему 3 и следствие). Рисунок 5 b) иллюстрирует этот результат. В области $b > 1$ и $a < 1$ функция (II) не является ни расширяющей, ни сужающей даже на непересекающихся наборах групп (Мишин, 2004b). То есть для этого случая теоремы 2 и 3 не могут помочь в поиске оптимальной иерархии. Однако функция (II) монотонна по группам, поэтому оптимально дерево с минимальными затратами (см. теорему 1).

Утверждения 4 и 5 позволяют упростить задачу об оптимальной иерархии для функций затрат (III) и (IV) при $b \ge 1$. В этом случае оптимальна 2-иерархия, имеющая минимальные затраты (см. теорему 2).[24] Для $b < 1$ дерево с минимальными затратами можно найти с помощью алгоритмов. Однако это дерево может не быть оптимальной иерархией, поскольку функции (III) и (IV) не являются монотонными по группам. Для функций (III) и (IV) при $b < 1$ на данный момент неизвестны методы поиска оптимальной иерархии.

Расширяющие и сужающие функции затрат приводят к оптимальности крайних случаев – двухуровневой иерархии и 2-иерархии. Как правило, в реальных организациях имеет место «промежуточная» иерархия, в которой норма управляемости $2 < r < +\infty$. Поэтому, функция затрат, описывающая организацию, не будет ни расширяющей, ни сужающей. Таким образом, важна разработка методов решения задачи об оптимальной иерархии для этого случая.

Задача об оптимальной иерархии дискретна, что затрудняет поиск решения. Выходом может являться рассмотрение непрерывной задачи, в которой число исполнителей континуально. В работе (Губко, 2002) для этой задачи найдено дерево с минимальными затратами для

[24] Для функции (III) и $b \ge 1$ в работе (Воронин, Мишин, 2003) 2-иерархия с минимальными затратами найдена в явном виде.

некоторых секционных функций. В ряде случаев удается доказать, что соответствующее дерево минимизирует затраты и для дискретной задачи. Например, в работе (Мишин, 2004b) доказано следующее утверждение.

Утверждение 6. *Пусть* r_* *равно одному из двух целочисленных значений, ближайших к* $r_0=((\alpha-1)/\beta)^{1/(\alpha-\beta-1)}$ *снизу или сверху. Для функции* (V) *при* n *равном степени* r_* ($n=r_*^j$), *одинаковых сложностях исполнителей и* $\alpha-\beta>1$ *минимизирует затраты симметричное* r_**-дерево, в котором каждый менеджер имеет ровно* r_* *непосредственных подчиненных, управляющих группами равной сложности.*

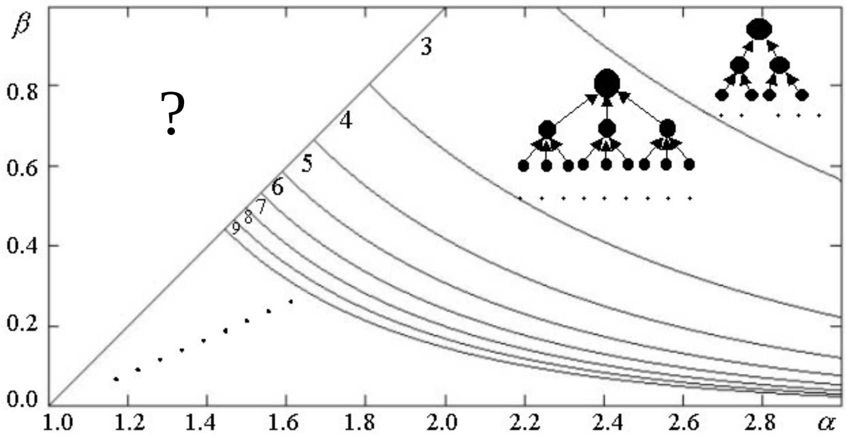

Рисунок 6. Деревья с минимальными затратами для функции (V)

На рисунке 6 изображена прямая $\beta=\alpha-1$, пространство под которой разбито на области с постоянным r_*. В этих областях оптимальная норма управляемости не меняется. Справа вверху минимизирует затраты симметричное 2-дерево. Левее и ниже минимизируют затраты симметричные 3-деревья, 4-деревья, и так далее. По мере приближения к точке (1;0) r_* неограниченно возрастает. При росте α кривые на рисунке 6 экспоненциально убывают.

Параметр β можно интерпретировать как степень отрицательного влияния низкой квалификации. При приближении β к нулю подчинение менеджеру сотрудника с малой квалификацией (управляющего группой с малой сложностью) не приводит к значительному увеличению его затрат. Поэтому при достаточно малом β оптимальная норма управляемости r_* стремится к $+\infty$, то есть затраты минимизирует двухуровневая иерархия с единственным менеджером (при β=0 функция (V) становится расширяющей).

Рисунок 6 показывает, что для любого $r \geq 2$ найдется область параметров α и β такая, что симметричное r-дерево имеет минимальные затраты. При $2 < r < +\infty$ результат соответствует большинству реальных организаций, в которых норма управляемости колеблется от нескольких непосредственных подчиненных до нескольких сотен (Mintzberg, 1979).

Приложение

Доказательство утверждения 1: Рассмотрим оптимальную иерархию $H \in \Omega(N)$. Пусть два сотрудника v_1 и v_2 управляют в H одной и той же группой $s_H(v_1) = s_H(v_2)$. В силу ацикличности v_1 и v_2 не могут быть одновременно подчинены друг другу. Не ограничивая общности, считаем, что v_2 не подчинен v_1. Рассмотрим непосредственного начальника m_1 сотрудника v_2. Если v_1 также непосредственно подчинен m_1, то можно удалить ребро (v_2,m_1) без увеличения затрат иерархии (см. неравенство (3)). Если v_1 не является непосредственным подчиненным m_1, то ребро (v_2,m_1) можно заменить на (v_1,m_1). В силу $s_H(v_1) = s_H(v_2)$ затраты менеджера m_1 не изменятся, то есть не изменятся затраты иерархии. Итак, в обоих случаях ребро (v_2,m_1) может быть удалено. Действуя аналогичным образом, можно удалить все ребра, выходящие из v_2. После этого у сотрудника v_2 не будет начальников и его можно удалить без увеличения затрат иерархии[25]. Если в полученной иерархии снова имеются сотрудники, управляющие одинаковыми группами, то можно повторить описанное выше удаление. В итоге получим оптимальную иерархию H', для которой выполнено условие (i).

Если в H' некоторый менеджер m_2 не имеет начальников и управляет группой $s_{H'}(m_2) \neq N$, то этого менеджера можно удалить без увеличения затрат иерархии. Продолжая аналогичные действия, придем к иерархии H'', в которой менеджеры, не имеющие начальников, управляют группой N. В силу определения 1 и условия (i) [26] в иерархии H'' ровно один такой менеджер m.[27] Из любой вершины $v \neq m$ иерархии H'' выходит хотя бы одно ребро. Таким образом, из v можно построить путь, который в силу ацикличности иерархии закончится в m. Следовательно, все сотрудники организации подчинены m. То есть получена оптимальная иерархия H'', для которой выполнены условия (i) и (ii).

Предположим, что в иерархии H'' сотрудники v_3 и v_4 непосредственно подчинены одному менеджеру m_3, и сотрудник v_3 подчинен сотруднику v_4. Тогда $s_{H''}(v_3) \subseteq s_{H''}(v_4)$ (см. лемму 1) и на основании неравенства (3) можно удалить ребро (v_3,m_3), не увеличивая затраты менеджера m_3 и затраты всей иерархии. У сотрудника v_3 при этом останется хотя бы один начальник, так как v_3 подчинен v_4. Продолжая подобные действия, получим в итоге оптимальную иерархию H^*, удовлетворяющую условию (iii). Проведенные удаления ребер не изменили групп, которые подчинены менеджерам. Высший менеджер m по-прежнему является единственным менеджером без начальников. В оптимальной иерархии H^* выполнены условия (i), (ii), (iii). ■

Доказательство теоремы 1. В силу утверждения 1 найдется оптимальная иерархия $H = (N \cup M, E) \in \Omega(N)$, удовлетворяющая условиям (i)-(iii). Если у всех сотрудников, кроме высшего менеджера, ровно один непосредственный начальник, то H – искомое оптимальное дерево (см. определение 2). В противном случае найдется сотрудник $v \in N \cup M$, у которого два или более непосредственных начальника. Если таких сотрудников несколько, то в качестве v рассмотрим сотрудника, который имеет наивысший уровень. То есть все начальники v, кроме высшего менеджера, имеют ровно одного непосредственного начальника.

Обозначим двух непосредственных начальников v через v_1 и u_1 (если таких начальников больше, чем два, то выберем любую пару). В силу условия (ii) утверждения 1 сотрудники v_1 и u_1 подчинены высшему менеджеру m. То есть существует путь из v_1 в m и путь из u_1 в m.[28] Следовательно, из v существуют два различных пути в m. Эти пути выходят из v в две разные вершины и затем сходятся в некоторой вершине (в m или в одном из подчиненных m). Обозначим участки путей до первого пересечения через $v - v_1 -\ldots- v_{n_1}$ и $v - u_1 -\ldots- u_{n_2}$. У этих участков общее начало v, общий конец $v_{n_1} = u_{n_2}$ и различные промежуточные вершины. В силу выбора v у каждого из менеджеров $v_1,\ldots,v_{n_1-1}$ ровно один непосредственный начальник – следующая вершина пути. То же верно и для менеджеров $u_1,\ldots,u_{n_2-1}$. Соответствующий фрагмент иерархии изображен на рисунке 7.

Начальная иерархия H удовлетворяет условиям (i)-(iii) утверждения 1. Ниже описано перестроение, не увеличивающее затраты иерархии. При этом иерархию, получающуюся после каждого перестроения, также будем обозначать через H. Перестроенные иерархии будут удовлетворять условию (ii) утверждения 1. То есть в них все сотрудники будут подчинены высшему менеджеру m. Поэтому пути, выходящие из v, будут пересекаться, и фрагмент иерархии будет выглядеть так, как показано на рисунке 7. На каждом шаге возможен один из двух вариантов перестроения иерархии H (рисунок 7 поясняет эти варианты).

[25] Определение 1 будет выполнено, так как максимальная группа N будет управляться некоторым менеджером (если v_2 управлял группой N, то после удаления группой N будет управлять сотрудник v_1).
[26] Очевидно, что проведенные удаления менеджеров не нарушили условия (i).
[27] Удалить этого менеджера мы не можем, так как это нарушит определение 1 и граф перестанет быть иерархией, управляющей множеством исполнителей N.
[28] Один из этих путей может состоять из одной вершины (в случае v_1=m или u_1=m).

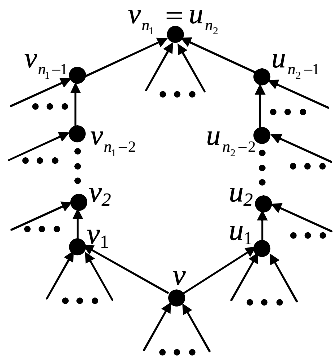

Рисунок 7. Перестроение в случае монотонной по группам функции затрат

a) Пусть выполнено $s_H(v)=s_H(v_1)$, то есть сотрудники v и v_1 управляют одной и той же группой[29]. Удалим менеджера v_1. Если v не был подчинен менеджеру v_2, то подчиним ему сотрудника v вместо v_1. При этом не изменятся группы, подчиненные всем менеджерам, оставшимся в иерархии. То есть могли измениться лишь затраты менеджера v_2. Затраты v_2 не возросли, поскольку функция монотонна по группам. Следовательно, полученная иерархия оптимальна.

После удаления v_1 некоторые сотрудники могут остаться без начальников. Такие сотрудники не могут быть исполнителями, так как высший менеджер иерархии управляет всеми исполнителями. То есть после удаления v_1 могут появиться менеджеры без начальников, отличные от высшего менеджера. Такие менеджеры могут быть удалены, при этом граф останется оптимальной иерархией. После удаления могут появиться новые менеджеры без начальников, отличные от высшего менеджера, которых также можно удалить. Продолжим подобные действия. В итоге придем к оптимальной иерархии, в которой только высший менеджер не имеет начальников. То есть выполнено условие (ii) утверждения 1.

b) Пусть выполнено $s_H(v) \neq s_H(v_1)$. То есть v_1 управляет более широкой группой, чем v: $s_H(v) \subset s_H(v_1)$. Следовательно, кроме v у v_1 имеется по крайней мере еще один непосредственный подчиненный. Удалим ребро (v,v_1). При этом у менеджера v_1 все еще останутся подчиненные. Группа $s_1=s_H(v_1)$, которой управлял менеджер v_1, изменится на новую группу s_1', поскольку менеджер v_1 теперь уже может не управлять некоторыми исполнителями из группы $s_H(v)$. Однако v_1 продолжит управлять теми исполнителями группы s_1, которые не входят в $s_H(v)$. То есть выполнено $s_1' \subseteq s_1$, $(s_1 \setminus s_1') \subseteq s_H(v)$. Из v_1 выходит только одно ребро (v_1,v_2). Изменение группы $s_1=s_H(v_1)$ на s_1' может привести к изменению группы $s_2=s_H(v_2)$, которой управляет менеджер v_2. Обозначим измененную группу через s_2'. Как указано выше, из s_1 могли быть исключены только исполнители группы $s_H(v)$. Поэтому только эти исполнители могут быть исключены и из s_2. То есть выполнено $s_2' \subseteq s_2$, $(s_2 \setminus s_2') \subseteq s_H(v)$. Аналогично, для всех $i = \overline{3, n_1 - 1}$ группа $s_i=s_H(v_i)$, подчиненная менеджеру v_i, изменится на группу s_i'. Причем выполнено $s_i' \subseteq s_i$, $(s_i \setminus s_i') \subseteq s_H(v)$.

Рассмотрим группу $s_H(v_{n_1})$. Она равна объединению групп, которыми управляют все непосредственные подчиненные менеджера v_{n_1} (см. лемму 1). Среди этих групп в результате удаления ребра (v,v_1) может измениться только группа s_{n_1-1}, которой управляет менеджер v_{n_1-1}.[30] Причем в силу $(s_{n_1-1} \setminus s_{n_1-1}') \subseteq s_H(v)$ из этой группы могут быть исключены лишь исполнители, принадлежащие $s_H(v)$. Однако эти исполнители входят в группу $s_H(u_{n_2-1})$. Поэтому группа

---

[29] В некоторых случаях перестроенные иерархии могут не удовлетворять условию (i) утверждения 1. То есть равенство $s_H(v)=s_H(v_1)$ может быть выполнено.

[30] Среди непосредственных подчиненных менеджера v_{n_1} только v_{n_1-1} управляет менеджерами $v_1, \ldots, v_{n_1-2}$, поскольку у каждого из них ровно один непосредственный начальник.

$s_H(v_{n_1})$ не изменится. Следовательно, не изменятся и группы, которыми управляют начальники менеджера v_{n_1}.

Таким образом, удаление ребра (v,v_1) могло повлиять только на группы $s_H(v_1),...,s_H(v_{n_1-1})$. То есть высший менеджер по-прежнему управляет всеми исполнителями, у каждого менеджера имеются подчиненные, граф остался ацикличным (удаление ребра не могло привести к циклам). Следовательно, полученный граф удовлетворяет всем условиям определения 1, то есть представляет собой иерархию. Кроме того, у каждого сотрудника, кроме высшего менеджера, имеется хотя бы один непосредственный начальник. Поэтому в силу ацикличности все сотрудники подчинены высшему менеджеру. То есть выполнено условие (ii) утверждения 1.

Число непосредственных подчиненных менеджера v_1 уменьшилось на единицу. Число непосредственных подчиненных менеджеров $v_2,\mathbf{K},v_{n_1}$ осталось прежним, однако могла сократиться группа, которой управляет один из непосредственных подчиненных менеджера v_i, $i=\overline{2,n_1}$. Затраты менеджеров $v_1,\mathbf{K},v_{n_1}$ не возросли, поскольку функция затрат монотонна по группам. Следовательно, полученная иерархия оптимальна.

Как в случае a), так и в случае b) получена оптимальная иерархия, удовлетворяющая условию (ii) утверждения 1. Это позволяет повторять перестроение a) или b), пока в полученной иерархии имеется сотрудник с двумя или более непосредственными начальниками. При каждом перестроении число ребер иерархии сокращается как минимум на единицу. В силу конечности множества ребер перестроения закончатся через конечное число шагов. В полученной оптимальной иерархии H^* только топ менеджер не имеет начальников, все остальные сотрудники имеют ровно одного непосредственного начальника. Следовательно, H^* – оптимальное дерево. ■

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим некоторую оптимальную иерархию $H\in\Omega(N)$. Обозначим максимальное число непосредственных подчиненных одного менеджера через k. Если k=2, то H – искомая 2-иерархия. Если k>2, то рассмотрим некоторого менеджера m, который имеет k непосредственных подчиненных $v_1,\ldots,v_k$. Обозначим управляемые ими группы через $s_1=s_H(v_1),\ldots,s_k=s_H(v_k)$. Поскольку функция затрат сужающая, найдется некоторое количество сотрудников $1<j<k$ и некоторая перестановка $(i_1,\ldots,i_k)$, для которых выполнено неравенство (5). Перестроим иерархию H. Наймем нового менеджера m_1. Сотрудников $v_{i_1},\mathbf{K},v_{i_j}$ непосредственно подчиним менеджеру m_1 вместо менеджера m. Самого менеджера m_1 непосредственно подчиним менеджеру m (см. пример на рисунке 3). В силу неравенства (5) затраты не возрастут, то есть полученная иерархия оптимальна. В результате менеджер m_1 имеет $j<k$ непосредственных подчиненных. Менеджер m имеет $k-j+1<k$ непосредственных подчиненных. Таким образом, в новой иерархии число менеджеров с k непосредственными подчиненными уменьшилось на единицу. Продолжая аналогичные перестроения, придем к оптимальной иерархии, в которой максимальное число непосредственных подчиненных одного менеджера равно $k'<k$. Если $k'>2$, то можно снова проделать аналогичные действия. В результате получим оптимальную 2-иерархию. ■

Доказательство следствия (из теорем 1 и 2). По теореме 1 для монотонной по группам функции затрат найдется оптимальное дерево. В доказательстве теоремы 2 в качестве начальной иерархии H можно рассмотреть это дерево. По лемме 2 в дереве не пересекаются группы, управляемые непосредственными подчиненными одного менеджера. Поэтому среди групп $s_1,\ldots,s_k$ в доказательстве теоремы 2 нет пересекающихся. То есть для перестроения достаточно, чтобы функция затрат была сужающей на непересекающихся группах. После перестроения, описанного в доказательстве теоремы 2, также получим дерево (добавленный менеджер и все остальные сотрудники, кроме высшего менеджера, имеют ровно одного непосредственного начальника). После аналогичных перестроений получим оптимальное 2-дерево. ■

Доказательство теоремы 3. Согласно утверждению 1 найдется оптимальная иерархия $H \in \Omega(N)$, удовлетворяющая условиям (i)-(iii) утверждения. Согласно условию (ii) в ней имеется высший менеджер m, которому подчинены все остальные сотрудники. Если m – единственный менеджер, то H – оптимальная двухуровневая иерархия. В противном случае найдется менеджер m_1, непосредственно подчиненный менеджеру m. Обозначим всех непосредственных подчиненных менеджера m_1 через $v_1,\ldots,v_j$. Группы, которыми управляют эти сотрудники, обозначим через $s_1=s_H(v_1),\ldots,s_j=s_H(v_j)$. Поскольку иерархия удовлетворяет условию (i) утверждения 1, у каждого менеджера не менее двух непосредственно подчиненных сотрудников. То есть $j>1$ и у менеджера m, кроме m_1, имеются другие непосредственные подчиненные. Обозначим их через $v_{j+1},\ldots,v_k$, $k \geq 3$. Группы, которыми управляют эти сотрудники, обозначим через $s_{j+1}=s_H(v_{j+1}),\ldots,s_k=s_H(v_k)$.

Предположим, что у менеджера m_1 кроме m имеется еще один непосредственный начальник m'. То есть имеется два пути из m_1 в m: первый путь идет непосредственно из m_1 в m, второй идет через менеджера m'. Помимо m_1 второй путь проходит через одного из непосредственных подчиненных менеджера m, а именно через одного из сотрудников $v_{j+1},\ldots,v_k$. Таким образом, этот сотрудник управляет менеджером m_1. Это противоречит условию (iii) утверждения 1, согласно которому ни один непосредственный подчиненный не управляет другим. Поэтому, у менеджера m_1 имеется только один начальник – высший менеджер m.

Согласно условию (iii) утверждения 1 среди сотрудников $v_1,\ldots,v_j$ не может быть непосредственных подчиненных менеджера m, поскольку иначе один непосредственный подчиненный (менеджер m_1) управлял бы другим. Поэтому среди $v_{j+1},\ldots,v_k$ и $v_1,\ldots,v_j$ нет одних и тех же сотрудников. Следовательно, верхняя часть иерархии выглядит так, как показано на рисунке 3b).

Поскольку функция затрат расширяющая, для любых групп $s_1,\ldots,s_k$, $k \geq 3$, любого $1 < j < k$ и любой перестановки $(i_1,\ldots,i_k)$ выполнено неравенство (6). При $(i_1,\ldots,i_k)=(1,\ldots,k)$ из неравенства (6) следует:

$$c(s_1,\mathbf{K},s_k) \leq c(s_1,\mathbf{K},s_j) + c(s_1 \cup \mathbf{K} \cup s_j, s_{j+1},\ldots,s_k). \qquad (*)$$

Перестроим иерархию. Непосредственно подчиним сотрудников $v_1,\ldots,v_j$ менеджеру m вместо менеджера m_1. Менеджера m_1 удалим. Перестроенный фрагмент графа выглядит так, как показано на рисунке 3a). Менеджер m по-прежнему управляет всеми исполнителями. Таким образом, в результате получили иерархию. Группы, подчиненные остальным менеджерам, также не изменились. В построенной иерархии затраты менеджера m (левая часть неравенства (*)) не превышают затрат менеджеров m и m_1 в исходной иерархии (правая часть неравенства (*)). Следовательно, построенная иерархия оптимальна и удовлетворяет условиям (i) и (ii) утверждения 1. Однако условие (iii) может нарушиться, так как некоторые из сотрудников $v_1,\ldots,v_j$ могут быть подчинены некоторым из сотрудников $v_{j+1},\ldots,v_k$. Предположим, что сотрудник v_{j_1} подчинен сотруднику v_{j_2}, $1 \leq j_1 \leq j$, $j+1 \leq j_2 \leq k$. Тогда в силу леммы 1 выполнено $s_{j_1} \subseteq s_{j_2}$. В силу неравенства (3) можно удалить «лишнее» ребро (v_{j_1},m) без увеличения затрат иерархии. Сотрудник v_{j_1} при этом будет подчинен высшему менеджеру, но не непосредственно, а через сотрудника v_{j_2}. Продолжая подобные удаления, получим оптимальную иерархию, удовлетворяющую условиям (i), (ii) и (iii) утверждения 1.

Полученная оптимальная иерархия содержит на одного менеджера меньше, чем исходная иерархия, поскольку менеджер m_1 был удален. Продолжая аналогичные действия, придем к оптимальной двухуровневой иерархии с единственным менеджером m. ■

Доказательство следствия (из теорем 1 и 3). По теореме 1 для монотонной по группам функции затрат найдется оптимальное дерево. В доказательстве теоремы 3 в качестве начальной иерархии H можно рассмотреть это дерево. По лемме 2 в дереве не пересекаются группы, управляемые непосредственными подчиненными одного менеджера. Поэтому среди групп $s_1,\ldots,s_k$ в доказательстве теоремы 3 нет пересекающихся. То есть для перестроения иерархии, описанного в доказательстве теоремы 3, достаточно, чтобы функция затрат была расширяющей на непересекающихся группах. После перестроения получим дерево, поскольку у всех сотрудников, кроме высшего менеджера, ровно один непосредственный начальник. После всех перестроений придем к оптимальной двухуровневой иерархии. ■

Литература

Богданов А.А. (2002, 2004): Принятие управленческих решений в управленческих иерархиях.

Бурков В.Н., Новиков Д.А. (1999): Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ.

Ватель И.А., Ерешко Ф.И. (1973): Математика конфликта и сотрудничества. М.: Знание. Серия: Математика, кибернетика.

Воронин А.А., Мишин С.П. (2002a): Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы // *Автоматика и телемеханика*. 8, с. 136–150.

Воронин А.А., Мишин С.П. (2002b): Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы // *Автоматика и телемеханика*. 5, с. 120–132.

Воронин А.А., Мишин С.П. (2003): Оптимальные иерархические структуры. М.: Институт проблем управления РАН.

Гермейер Ю.Б. (1976): Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука.

Гермейер Ю.Б., Ватель И.А., Ерешко Ф.И., Кононенко А.Ф. (1973): Игры с непротивоположными интересами / Труды Всесоюзной школы-семинара по управлению большими системами. Тбилиси: Мецниереба, с. 34–37.

Гермейер Ю.Б., Ерешко Ф.И. (1974): Побочные платежи в играх с фиксированной последовательностью ходов // *ЖВМ и МФ*. 14, с. 1437–1450.

Губко М.В. (2002): Структура оптимальной организации континуума исполнителей // *Автоматика и телемеханика*. 12, с. 116–130.

Кукушкин Н.С., Морозов В.В. (1984): Теория неантагонистических игр. М.: МГУ.

Михайлов А.П. (1999): Модель коррумпированных властных иерархий // *Математические модели и вычислительный эксперимент*. Том 11, №№ 1, 3.

Михайлов А.П. (2003): Моделирование системы «власть-общество». М.: Физматлит.

Мишин С.П. (2004a): Оптимальное стимулирование в многоуровневых иерархических структурах // *Автоматика и телемеханика*. 5, с. 96–119.

Мишин С.П. (2004b): Оптимальные иерархии управления в экономических системах. М.: Институт проблем управления РАН.

Новиков Д.А. (1999): Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления».

Новиков Д.А. (2003): Сетевые структуры и организационные системы. М.: Институт проблем управления РАН.

Овсиевич Б.И. (1979): Модели формирования организационных структур. Л.: Наука.

Цвиркун А.Д. (1982): Основы синтеза структуры сложных систем. М.: Наука.

Bolton P., Dewatripont M. (1994): The firm as a communication network // *Quarterly Journal of Economics*. CIX, 809-839.

Calvo G., Wellisz S. (1978): Supervision, loss of control and the optimal size of the firm // *Journal of Political Economy*. 86, 943-952.

Calvo G., Wellisz S. (1979): Hierarchy, ability and income distribution // *Journal of Political Economy*. 87, 991-1010.

Davies G., Smith M., Twigger W. (1991): Leading people: a model of choice and fate for leadership development // *Leadership & Organization Development*. 12, 7-11.

Grossman S., Hart O. (1982): Implicit contracts under asymmetric information // *Quarterly Journal of Economics*. 1, 110-124.

Grossman S., Hart O. (1983): An analysis of the principal-agent problem // *Econometrica*. 51, 7-45.

Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. (1934): Inequalities. London: Cambridge University Press.

Hart O.D., Holmstrom B. (1987): Theory of contracts. Advances in economic theory. Proceedings of 5-th World Congress. Cambridge: Cambridge University Press, 71-155.

Jago A.G., Vroom V.H. (1975): Perceptions of leadership style: superior and subordinate descriptions of decision-making behavior. In: Hunt, J.G, Larson, L.L., (Eds.), Leadership Frontiers. Carbondale: Southern Illinois University Press, pp. 103-120.

Keren M., Levhari D. (1979): The optimal span of control in a pure hierarchy // *Management Science*. 25, 1162-1172.

Keren M., Levhari D. (1983): The internal organization of the firm and the shape of average costs // *Bell Journal of Economics*. 14, 474-486.

Marschak T.A., Radner R. (1972): Economic theory of teams. New Haven, CT: Yale University Press.

Maskin E., Qian Y., Xu C. (2000): Incentives, information and organizational form // *Review of Economic Studies*. 67, 359-378.

Melumad D.N., Mookherjee D., Reichelstein S. (1995): Hierarchical decentralization of incentive contracts // *The Rand Journal of Economics*. 26, 654-672.

Milgrom P., Roberts J. (1992): Economics, organization and management. Prentice-Hall.

Mintzberg H. (1979): The structuring of organizations. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Peters T. (1987): Thriving on chaos. New York: Knopf.

Qian Y. (1994): Incentives and loss of control in an optimal hierarchy // *The Review of Economic Studies*. 61, 527-544.

Qian Y., Roland G., Xu C. (1997): Coordinating changes in M-form and U-form organizations. Stanford University: Mimeo.

Radner R. (1992): Hierarchy: The economics of managing // *Journal of Economic Literature*. 30, 1382-1415.

Radner R. (1993): The organization of decentralized information processing // *Econometrica*. 61, 1109-1146.

Simon H.A. (1957): The compensation of executives // *Sociometry*. 20, 32-35.

Van Zandt T. (1995): Continuous approximation in the study of hierarchies // *The Rand Journal of Economics*. 26, 575-590.

Van Zandt T. (1996): Organizations with an endogenous number of information processing agents. Organizations with Incomplete Information. Cambridge: Cambridge University Press.

Williamson O. (1967): Hierarchical control and optimal firm size // *Journal of Political Economy*. 75, 123-138.

Williamson O. (1975): Markets and hierarchies. New York: Free Press.