Балансировка сборочной линии и задачи поиска оптимальных иерархий[1]

Губко М.В.
ИПУ РАН, Москва

Введение

В последние годы в Институте проблем управления РАН ведутся активные исследования по разработке математических моделей оптимизации иерархических структур (см. [5-7]). К поиску оптимальных иерархий сводятся задачи, многих областей науки и практики – от формирования организационной структуры до разработки структуры систем передачи информации и проблем организации производства. Разработанные математические модели и полученные в их рамках теоретические результаты имеют широкую область применения.

В настоящей статье рассматривается одна из известных задач организации производства – задача балансировки сборочной линии. Показывается, что она сводится к надстройке иерархии сборочных постов над сетью элементарных работ и к поиску иерархии, минимизирующей себестоимость производства единицы продукции. Рассматриваются возможные обобщения задачи, показывается, что минимизируемая функция затрат относится к сравнительно хорошо исследованному классу т.н. секционных функций [5]. Намечаются перспективные направления решения модифицированной задачи балансировки.

1. Задача балансировки сборочной линии

Одним из этапов проектирования сборочного производства является разработка технологии сборки исходя из конструктивных особенностей собираемого изделия и требуемых объемов производства. При решении этой задачи в числе прочего необходимо определить структуру сборочной линии – количество сборочных постов и распределение технологических операций между ними. В литературе эта проблема известна как задача балансировки сборочной линии [2, 3]. Одна из ее модификаций – задача минимизации себестоимости [1] – формулируется следующим образом.

Процесс сборки разбивается на технологически неделимые элементарные операции – работы – и моделируется сетью [4], вершины которой – это элементарные работы, а дуги определяют причинно-следственные связи (работа не может быть начата, если не завершены все ее предшественники). Каждой работе ставятся в соответствие две числовые характеристики – нормативное время выполнения и ставка оплаты труда (в рублях в час).

---

[1] Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда экономических исследований академика Н.П.Федоренко.

Выполнение нескольких работ может поручаться одному исполнителю (осуществляться в рамках одного рабочего места). При этом суммарное время выполнения этих работ равно сумме их времен. Ставка оплаты исполнителя считается равной максимальной из ставок порученных ему работ (предполагается, что бо́льшая ставка соответствует большей квалификации исполнителя). Задача состоит в том, чтобы при заданном темпе выпуска t, определяющем верхнее ограничение на суммарное время работ исполнителя, распределить работы между исполнителями с целью минимизации суммарных расходов на оплату труда. Назначение также должно быть совместимым с причинно-следственными связями между работами.

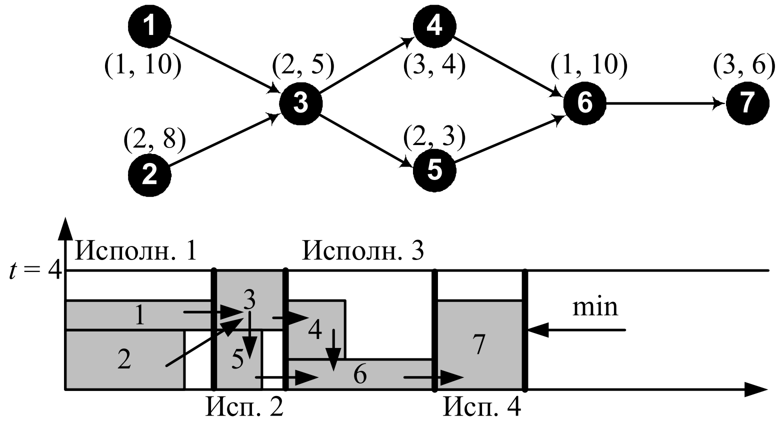

Рис. 1. Задача балансировки сборочной линии

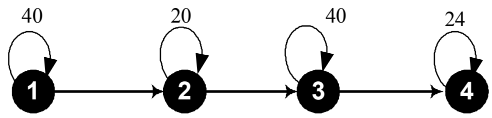

Рис. 2. Пример сборочной линии

Графически задачу можно проиллюстрировать следующим образом. Пусть работа представляется прямоугольником, длина которого равна ставке оплаты, а высота – времени выполнения. Работы, назначенные одному исполнителю, изображаются прямоугольниками, «поставленными» друг на друга, при этом работы разных исполнителей разделяются вертикальными «перегородками». На рис. 1 изображена технологическая сеть, каждой задаче которой соответствует пара «время, ставка оплаты». Задача состоит в упаковке работ в «полосу» высоты t для минимизации длины получающейся фигуры. Связи между работами изображаются стрелками между прямоугольниками, и ограничение причинности приводит к тому, что при допустимом разбиении все стрелки идут слева направо.

В результате исполнители выстраиваются последовательно в цепочку, формируя сборочную линию, конвейер (см. рис. 2). Число напротив каждого исполнителя на рисунке соответствует сумме оплаты его труда на единицу произведенной продукции (при темпе выпуска $t = 4$).

Задача балансировки сборочной линии является обобщением известной

NP-полной задачи о ранце. Для ее решения разработаны многочисленные точные и эвристические алгоритмы (см. обзоры в [1-3]).

2. Оптимальное дерево сборки

Получающуюся при решении задачи балансировки конвейерную линию можно представить в виде древовидной иерархии исполнителей, надстроенной над множеством элементарных работ технологической сети (см. рис. 3). Листьями этого дерева являются элементарные работы, а остальные вершины соответствуют исполнителям (рабочим местам). Дуги от работ к исполнителю определяют множество работ, выполнение которых ему поручено. Дуги между исполнителями (изображенные пунктиром) определяют порядок вхождения исполнителей в сборочную линию.

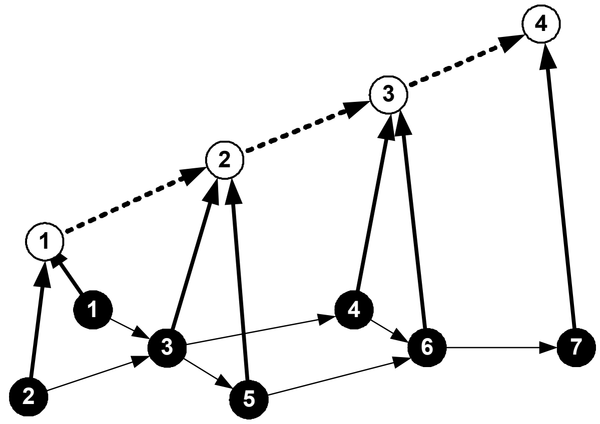

Рис. 3. Сборочная линия как древовидная иерархия

Исполнители в иерархии образуют цепочку, соответствующую конвейеру. Так, если сеть работ описывает процесс сборки автомобиля, то такой конвейер предполагает огромную сборочную линию, на входы которой подаются элементарные детали, а на выходе – готовое изделие.

Однако, вообще говоря, «линейный» конвейер вовсе не обязан быть оптимальной формой организации производства. Иногда более рациональным является объединение нескольких конвейерных линий, собирающих отдельные узлы изделия, и главного конвейера, на котором осуществляется узловая сборка. Такая форма организации характерна для сборки сложных изделий, и ее моделирование в рамках классической задачи балансировки невозможно. В то же время, поскольку вспомогательные конвейеры могут сильно сократить себестоимость производства, важной представляется разработка математических моделей для обоснования необходимости таких конвейерных линий и для нахождения их рациональной структуры.

Модель удобнее формулировать не в терминах сети элементарных работ, а непосредственно на базе конструкторской документации, чертежей. На основе чертежа собираемого изделия можно построить т.н. *граф соединений* $<N, E>$ вершинами которого являются отдельные детали (множество деталей обозначается через N), а ненаправленные ребра (их множество обозначается через $E \subseteq N \times N$) показывают соединения между ними.

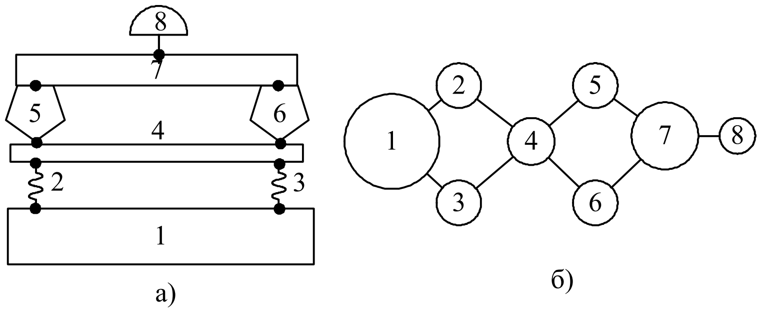

Рис. 4. Чертеж изделия и соответствующий ему граф связей деталей

Так, для «изделия», изображенного на рис. 4а (точками показаны связи между деталями, например, сварочные швы), соответствующий граф связей изображен на рис. 4б. Для сборочного производства логично считать, что элементарная работа по сборке изделия состоит в присоединении детали или узла[2] к другой детали или узлу. В этом случае на основе графа связей довольно просто строится описанная выше сеть элементарных сборочных работ. Пусть мы решили, что сборка должна начинаться с детали 1 (основания). Тогда первыми операциями сборки может быть присоединение к основанию либо детали 2, либо детали 3. После завершения обоих этих работ к получившемуся узлу $\{1, 2, 3\}$ может быть присоединена деталь 4. Несмотря на то, что деталь 4 имеет два соединения с узлом $\{1, 2, 3\}$, выполнение обоих этих соединений входит в одну элементарную работу, поскольку иначе узел $\{1, 2, 3, 4\}$ не будет монолитным. Продолжая подобным образом, можно построить сеть работ, изображенную на рис. 1.

Несмотря на описанную аналогию, моделирование изделия графом связей имеет ряд преимуществ по сравнению с моделированием через элементарные сборочные работы. Так, глядя на граф связей на рисунке 4б, легко видеть, что сборка не обязана начинаться с детали 1. Можно, например, реализовать другую схему сборки, независимо собрав узлы $\{5, 6, 7, 8\}$ и $\{2, 3, 4\}$, а затем соединив их между собой и с основанием (деталью 1), получая в результате готовое изделие.

---

[2] Узлом (сборочной единицей) называется сборный элемент конструкции, состоящий из нескольких монолитных или сборных элементов, соединяемых друг с другом в процессе сборки [8]. Для конкретного изделия узел однозначно определяется подмножеством составляющих этот узел деталей. Так, для «изделия» на рис. 4а можно говорить об узле $\{1, 2, 3\}$, состоящем из трех первых деталей, или об узле $\{7, 8\}$. Все детали узла, однако, должны быть соединены между собой. Так, группа деталей $\{1, 4\}$ узлом не является, так как эти детали разрознены (между ними нет соединений). Ниже будет удобным также считать узлом отдельную деталь.

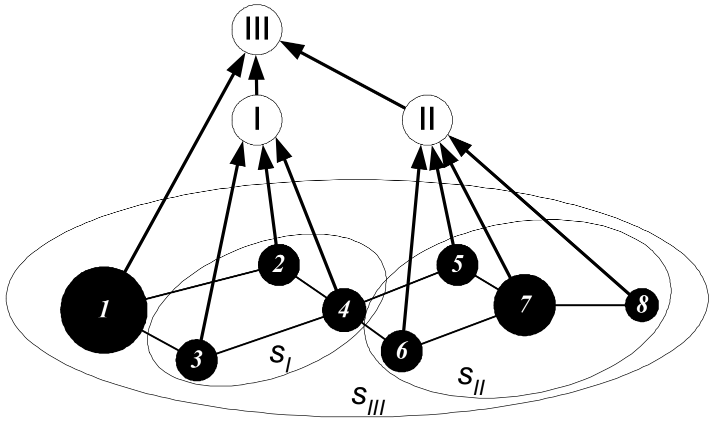

Рис. 5. Пример технологической схемы сборки

Произвольную технологическую схему сборки тогда можно изобразить в виде ориентированного дерева, надстроенного над графом связей деталей. Листьями этого дерева будут детали из множества N, а остальные вершины интерпретируются одновременно и как сборочные посты, и как узлы собираемого изделия. При этом дуги дерева, входящие в вершину - сборочный узел, показывают, из каких узлов и деталей данный узел собирается на данном сборочном посту. Например, описанная в предыдущем абзаце схема сборки изображена на рис. 5. Она состоит из трех сборочных постов: I, II и III. На посту I из деталей 2, 3 и 4 собирается узел $\{2, 3, 4\}$, на посту II – из деталей 5-8 собирается узел $\{5, 6, 7, 8\}$, а на посту III – из узлов I, II и детали 1 собирается готовое изделие.

Приведем формальную постановку задачи поиска оптимальной технологической схемы сборки. В рамках фиксированной схемы сборки H каждому ее сборочному посту m соответствует группа деталей $s \subseteq N$ – множество деталей, непосредственно или опосредовано подчиненных данному посту в схеме сборки H. Например, на рис. 5 овалами изображены группы s_{I}-s_{III}, соответствующие постам I-III соответственно. Схема сборки называется допустимой, если группа деталей s_m, соответствующая каждому ее сборочному посту m, является узлом (связанной группой деталей). Корневой вершине схемы сборки всегда соответствует узел N – готовое изделие.

Для каждого сборочного поста m допустимой схемы сборки H можно определить затраты $c(m, H)$ этого узла на единицу продукции, складывающиеся из расходов на содержание персонала и оборудования поста, энергозатрат и т.п. Затраты $c(m, H)$ представляют собой часть себестоимости изделия, относящуюся к данному сборочному посту, и совокупная себестоимость изделия $C(H)$ для фиксированной схемы сборки H представляет собой сумму затрат $c(m, H)$ по всем постам m, входящим в схему сборки H.

Тогда задача определения оптимальной технологической схемы состоит в поиске допустимой схемы сборки H, имеющей минимальную себестоимость $C(H)$ производства единицы продукции.

3. Пример построения функций затрат сборочного поста

Затраты сборочного поста m полностью определяются тем, какой узел s и из каких узлов $s_1, \ldots, s_k$ собирается на данном посту[3], а также внешними параметрами, например, требуемым темпом производства t. Будем считать внешние параметры фиксированными. Поскольку узел s всегда равен $s_1 \cup \ldots \cup s_k$, затраты $c(m, H)$ сборочного поста m можно записать как функцию узлов подчиненных сборочных постов: $c(m, H) = c(s_1, \ldots, s_k)$.

Такие функции затрат называются секционными (см. общее определение в [7]). Задачи поиска оптимальных иерархий для секционных функций затрат рассматривались в [5-7]. В числе прочего для таких функций были получены аналитические условия оптимальности веерной иерархии (с единственным сборочным постом), 2-иерархии (на каждом посту собирается ровно по два узла), последовательной (конвейерной) иерархии (см. [6, 7]). Кроме того, в [5] были предложены общие точные и эвристические алгоритмы поиска оптимального дерева для секционных функций. Непосредственное применение этих алгоритмов к задаче поиска оптимальной схемы сборки, однако, затрудняется их высокой вычислительной сложностью[4]. Поэтому имеет смысл рассматривать частные случаи функций затрат и строить для них эффективные точные и приближенные алгоритмы.

Рассмотрим пример построения функции затрат сборочного поста. Каждой связи $ij \in E$ в графе связей деталей изделия поставим в соответствие пару чисел – время t_{ij} на выполнение этого соединения и ставку c_{ij} оплаты труда исполнителя. Каждому собираемому узлу s соответствует множество связей $E(s) := \{ij \in E \colon i, j \in s\}$ между деталями этого узла. Тогда если на сборочном посту m из узлов $s_1, \ldots, s_k$ собирается узел s, то на этом посту выполняются соединения из множества $L(m) := E(s) \backslash E(s_1) \backslash \ldots \backslash E(s_k)$. Определим тогда затраты $c(m, H)$ узла как максимальную ставку c_{ij} по всем связям $ij \in L_m$, умноженную на требуемый темп производства t: $c(m,H) := t \cdot \max_{ij \in L(m)} c_{ij}$. Суммарное время $t(m) := \sum_{ij \in L(m)} t_{ij}$ выполнения соединений на сборочном посту m не должно превышать темпа сборки t, поэтому положим $c(m, H) = +\infty$ в случае если $t < t(m)$. Легко проверить, что построенная таким образом функция затрат зависит только от узлов $s_1, \ldots, s_k$, то есть является секционной.

Полученная функция затрат сборочного поста легко обобщается. Например, мы можем включить в нее транспортные расходы $c_T(s)$ на переме-

---

[3] Узлы $s_1, \ldots, s_k$ соответствуют сборочным постам (или отдельным деталям), из которых в технологической схеме H идут дуги в сборочный пост m. Так, сборочный пост III на рис. 5 имеет три подчиненных узла: $s_1 = \{2, 3, 4\}$, $s_2 = \{5, 6, 7, 8\}$, $s_3 = \{1\}$, на посту III собирается узел $s = N$.

[4] Как показано в [5], даже для задачи поиска оптимальной последовательной 2-иерархии точный алгоритм имеет экспоненциальную сложность.

щение собранного узла *s* на следующий сборочный пост. В общем случае оптимальная схема сборки уже не будет линейным конвейером, как в классической задаче балансировки, а будет представлять собой объединение нескольких сборочных линий.

Простая модель оптимального проектирования такого «сложного конвейера» описана в разделе 4.1 монографии [6]. Показывается, что с ростом транспортных расходов оптимальной становится объединение в схеме сборки большего числа конвейерных линий, каждая из которых имеет меньшую длину.

4. Выводы и перспективы

В статье описана задача построения оптимальной технологической схемы сборки, являющаяся обобщением задачи балансировки сборочной линии. Показано, что построение схемы сборки сводится к надстройке оптимальной иерархии сборочных постов над графом связей деталей собираемого изделия. В роли минимизируемого выбором иерархии критерия выступает себестоимость единицы продукции, в общем случае описываемая секционной функцией затрат. Предлагаемая модель, в числе прочего, позволяет моделировать разветвленную структуру вспомогательных конвейеров, характерную для сборки сложных изделий. В заключение приведен пример построения функции затрат сборочного поста, основанный на подходе модели балансировки сборочной линии. Перспективы исследования связаны с разработкой численных и аналитических методов решения поставленной задачи об оптимальной схеме сборки.

Литература

1. AMEN M. *An exact method for of cost-oriented assembly line balancing*, International Journal of Production Economics, 64, 2000. pp. 187-195.
2. BAYBARS I. *A survey of exact algorithms for the simple assembly line balancing problem*, Management Science, 32, 1986. pp. 909-932.
3. BECKER C., SCHOLL A. *A survey on problems and methods in generalized assembly line balancing*, mimeo, 2003.
4. БУРКОВ В.Н., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., НОВИКОВ Д.А. *Теория графов в управлении организационными системами*. – М.: Синтег, 2001.
5. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Оптимальные иерархические структуры*. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 214 с.
6. ГУБКО М.В. *Математические модели оптимизации иерархических структур*. - М.: ЛЕНАНД, 2006. - 264 с.
7. МИШИН С.П. *Оптимальные иерархии управления в экономических системах*. М.: ПМСОФТ, 2004. – 213 с.
8. *Технология сборки в машиностроении.* Машиностроение. Энциклопедия. Т. III-5. М.: Машиностроение. 2001. – 640 с.