УДК 519.5+681.3

МУЛЬТИАГЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ: ПРОБЛЕМЫ И ПРОТОКОЛЫ СОГЛАСИЯ, ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ ЛАПЛАСИАНОВ ГРАФОВ

С.Л. Блюмин

Рассмотрены простейшие возможности построения протоколов согласия в мультиагентных системах, возникающие еще до учета структуры связей между агентами и специфики их поведения, в терминах теории множеств и отображений и алгебры векторов и матриц. Получено явное выражение псевдообратной лапласиана графа, описывающего структуру связей между агентами, в случае полного невзвешенного двудольного графа.

Введение

Мультиагентные системы (МАС) играют все более заметную роль в проблематике искусственного интеллекта и компьютерных наук. Они состоят из некоторого числа агентов, взаимодействующих между собой и с окружающей средой в течение некоторого числа шагов. Поведение МАС естественно изучать в соответствии с современными концепциями и подходами к моделированию различных классов дискретных распределенных пространственно-временных систем, актуальных как для технических, технологических, экологических, так и для социально-экономических, организационных, управленческих, интеллектуальных приложений [1].

Актуальными примерами МАС являются организационные системы [2], распределенные системы искусственного интеллекта [3], коллективы роботов [4], электроэнергетические [5] и транспортные [6] системы, распределенные информационно-вычислительные сети [7] и др. Кроме того, популярными примерами МАС являются системы частиц [8], рои, стада, стаи насекомых, зверей, птиц, рыб [9], сеть Интернет [10] и др. Перечисление примеров подобного рода могло бы быть продолжено.

Исследуются сетевые [11-14], иерархические [15,10], динамические [16,17,13,14] и другие МАС. Для описания структуры связей между агентами используется теория графов [2], особенно алгебраическая [18], и принятая в ней их характеризация матрицами смежности, валентностей, инцидентности и лапласианами.

Проблемы согласия в МАС (agreement or consensus problems in multi-agent systems) в настоящее время привлекают внимание значительного числа исследователей; см., например, обзоры [12,19], а также работы [13,14,17, 20,21], в которых содержатся дальнейшие ссылки.

Согласие обычно понимается как достижение состояниями агентов единого для всех них значения (его роль часто играет среднее значение состояний агентов, average consensus, [21]; следует отметить, что усреднение широко используется при моделировании разнообразных процессов [22]). Поведение МАС или воздействие на нее, обеспечивающие достижение согласия, определяются как протоколы согласия (consensus protocols). Согласие может достигаться асимптотически или за конечное число шагов (finite-time consensus, [14]). Классическое понятие устойчивости динамической системы соответствует согласию, при котором все компоненты ее вектора состояния достигают единого для всех них нулевого значения.

В данной работе рассмотрены простейшие возможности построения протоколов согласия в мультиагентных системах, возникающие еще до учета структуры связей между агентами и специфики их поведения, в терминах теории множеств и отображений и алгебры векторов и матриц. Получено явное выражение псевдообратной лапласиана графа, описывающего структуру связей между агентами, в случае полного невзвешенного двудольного графа.

Проблемы согласия в терминах множеств и отображений

Пусть $A=\{a\}$ – множество агентов, $X=\{x\}$ – общее для всех них множество состояний, $X^A=\{\xi{:}A\to X\}$ (еан по терминологии [23], то есть множество отображений A в X [24]) – множество состояний многоагентной системы **A**, состоящей из агентов $a\in A$, так что семейство $\xi=(\xi_a)_{a\in A}$ состояний $\xi_a\in X$ агентов $a\in A$ представляет состояние системы **A**. Пусть, для $k\in X$ и $a\in A$, $\zeta^{(k)}{:}a\to k$ – постоянные отображения A в X, принимающие для всех $a\in A$ одно и то же значение $k\in X$; их подмножество $\Delta=\{(\zeta^{(k)})_{k\in X}\}\subset X^A$ образует диагональ еана X^A; каноническое диагональное отображение [24] $d{:}X\leftrightarrow\Delta$ является взаимно-однозначным.

Рассматривается автономная (не подверженная внешним воздействиям) и имеющая вырожденную структуру (отсутствуют какие-либо связи между агентами) МАС. В такой максимально упрощенной ситуации проблема согласия в вышеуказанном понимании формулируется так: систему, находящуюся в некотором состоянии $\xi\in X^A$, привести в некоторое состояние $\zeta^{(k)}\in\Delta$; иначе говоря, агентов, находящихся в (вообще говоря, различных) состояниях $\xi_a\in X$, привести в одно и тоже состояние $k\in X$.

Один из простейших путей построения протокола согласия – способа C функционирования МАС для решения такой проблемы согласия – может заключаться в задании некоторого отображения свертки $c{:}X^A\to X$, то есть $c{:}\xi\to x_\xi$, состояний $\xi\in X^A$ системы в некоторые (зависящие от них) элементы $c(\xi)=x_\xi\in X$, и его композиции с каноническим диагональным отображением $d:X\to\Delta$:

$$C = c \circ d : X^A\to\Delta\ ,\ C:(\xi\to c(\xi))\circ(c(\xi)\to\zeta^{c(\xi)})=\xi\to d(c(\xi))=\zeta^{c(\xi)}.$$

Обычно, однако, способ $F:X^A\to X^A$ функционирования МАС задан из каких-либо соображений, априори не направленных на решение именно проблемы согласия, так что $F\neq C$, то есть его применение не решает поставленную задачу. В этом случае возможны различные варианты трактовки проблем согласия.

Может оказаться, что, хотя однократное применение F не решает проблему согласия, тем не менее многократное (потенциально – бесконечное число раз) его применение, то есть итерации $F^{(p)}$ – композиции $F\circ\ldots\circ F(\circ\ldots)$ – могут ее решить; возникает вопрос о характеризации таких F, что

$F\neq C$, $F^{(p)}=C$ (соответственно $\lim_{p\to\infty} F^{(p)}=C$),

то есть решающих задачу за конечное число шагов (соответственно асимптотически). В такой постановке проблемы согласия способы функционирования системы на различных шагах могут различаться; в этом случае $F\circ\ldots\circ F(\circ\ldots)$ заменяется на $F_1\circ\ldots\circ F_p\ (\circ\ldots)$.

Выше речь шла о глобальном решении проблемы согласия – протокол согласия C отображал всё X^A в Δ . Может ставиться вопрос о локальном решении этой проблемы – построении, для некоторого (возможно, одноэлементного) подмножества $\Xi\subseteq X^A$, протокола C_Ξ такого, что $C_\Xi:\Xi\to\Delta$. С другой стороны, для заданного способа F функционирования системы, $F\neq C$, может ставиться вопрос об отыскании такого (возможно, одноэлементного) подмножества $(X^A)_F\subseteq X^A$, что $F: (X^A)_F\to\Delta$. Некоторые из этих вариантов трактовки проблем согласия рассмотрены ниже в терминах векторов и матриц.

В заключение данного раздела следует отметить, что в теории множеств и отображений [24] определена каноническая связь (отличного от использованного выше) диагонального отображения с произвольным отображением F. А именно, отображение $F:X^A\to X^A$ может быть канонически представлено как семейство отображений $(F_a)_{a\in A}$, $F_a:X^A\to X$, $a\in A$; для этого семейства определено каноническое распространение FF на произведения, в данном случае записываемое в виде $(FF_a)_{a\in A}$, $FF_a:(X^A)^A\to X^A$, $a\in A$; пусть $dd:X^A\leftrightarrow\Delta\Delta\subset(X^A)^A$ – каноническое диагональное отображение множества X^A на диагональ $\Delta\Delta$ множества $(X^A)^A$; тогда справедлива каноническая композиция $F=dd\circ FF$. Данная композиция отлична от использованной выше и не связана с проблемами согласия. Замечание подобного рода по другому поводу содержится в [23]. Цель таких замечаний – показать, что решение актуальных прикладных проблем не всегда содержится в результатах фундаментальной математики, несмотря на кажущуюся взаимосвязь между ними.

Проблемы согласия в терминах векторов и матриц

Реальная МАС состоит из конечного числа n агентов, $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$, общее множество X состояний которых обычно формализуется векторным пространством $\mathbf{R}^m$ над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел; далее, во избежание громоздких выражений, m=1. В этом случае $X^A=\mathbf{R}^n$, состояние ξ_{ai} агента a_i может быть обозначено через x_i , а состояние ξ системы описано вектором $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$. Диагональ $\Delta\subset\mathbf{R}^n$ образована векторами $\mathbf{k}^{(n)}=(k,\ldots,k)=k\mathbf{1}$, $k\in\mathbf{R}$, где $\mathbf{1}=(1,\ldots,1)$ – вектор, состоящий из единиц, а диагональное отображение $d:\mathbf{R}\to\Delta$ определяется в виде $d:k\to k\mathbf{1}$.

Свертка $c:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ может быть определена многими различными способами в зависимости от конкретной прикладной задачи. Это может быть та или иная норма $||x||$ вектора $\mathbf{x}$, например, l_p-норма $||\mathbf{x}||_p=(\Sigma_{i=1}^n|x_i|^p)^{1/p}$, $1\le p<\infty$, l_∞-норма $||\mathbf{x}||_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$, и т.п. В проблемах согласия часто используются (см., например, [13,14,21] и др.) max-consensus-свертка $\max_{1\le i\le n}(x_i)$, min-consensus-свертка $\min_{1\le i\le n}(x_i)$, а особенно часто – average-consensus-свертка $\mathrm{ave}(\mathbf{x})=(\Sigma_{i=1}^n x_i)/n$ и weight-average-consensus-свертка $\mathrm{wave}(\mathbf{x})=(\Sigma_{i=1}^n w_i x_i)/(\Sigma_{i=1}^n w_i)$. В проблемах устойчивости, если трактовать их как частный случай проблем согласия, обычно используется 0-свертка $0(\mathbf{x})=0$.

Простейший протокол согласия C, в зависимости от используемой свертки, записывается в соответствующем виде, например: $C_{ave}(\mathbf{x})=\mathrm{ave}(\mathbf{x})\mathbf{1}$.

Следует отметить, что в данном случае отображение $C_{ave}:\mathbf{R}^n\to\Delta$ является линейным – оно задается матрицей $J/n=\mathbf{1}\mathbf{1}^+$, где псевдообратная $\mathbf{1}^+=\mathbf{1}^T/n$, а J – матрица, состоящая из единиц, так что $C_{ave}(\mathbf{x})=J\mathbf{x}/n$; при этом $\mathrm{ave}(\mathbf{x})=\mathbf{1}^+\mathbf{x}$ (по поводу псевдообращения см., например, [25]).

Способ $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ функционирования МАС обычно также задается в зависимости от конкретной прикладной задачи (в отображении F уже могут учитываться, более или менее явно, как внешние воздействия на систему, так и ее структура связей). В качестве одного из примеров рассмотрим возможность локального решения проблемы согласия, то есть отыскания множества согласия, в отсутствии внешних воздействий и при заданной свертке c, для линейного отображения F, задаваемого (обозначаемой так же) матрицей F, отражающей структуру системы, то есть связанной с матрицами смежности, инциденций и лапласианом графа связей [18]. Задача сводится к уравнению $F\mathbf{x}=c(\mathbf{x})\mathbf{1}$, исследование и решение которого может быть выполнено с использованием псевдообращения [25]. Критерий разрешимости уравнения $FF^+c(\mathbf{x})\mathbf{1}=c(\mathbf{x})\mathbf{1}$, в предположении $c(\mathbf{x})\neq0$, сводится к $FF^+\mathbf{1}=\mathbf{1}$, что выполняется, если матрица FF^+ является стохастической (подобное предположение характерно для многих прикладных задач). Множество согласия описывается выражением $\mathbf{x}=c(\mathbf{x})F^+\mathbf{1}+(I-F^+F)\mathbf{y}$, где $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$ –

произвольный вектор, I – единичная матрица. Если, в частности, $c(\mathbf{x})=\mathrm{ave}(\mathbf{x})=\mathbf{1}^+\mathbf{x}$, то $\mathbf{x}=F^+J\mathbf{x}/n+(I-F^+F)\mathbf{y}$; в этом случае возможно и иное описание: уравнение $F\mathbf{x}=\mathrm{ave}(\mathbf{x})\mathbf{1}=J\mathbf{x}/n$ или $(F-J/n)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, как однородное, разрешимо при любой F, и $\mathbf{x}=(I-(F-J/n)^+(F-J/n))\mathbf{y}$.

Для глобального решения проблемы согласия в описанной ситуации, предполагающего выполнение последовательности шагов, целесообразно задать МАС как динамическую с дискретным временем, допуская и изменение структуры связей на каждом шаге (см., например, [17]), что можно описать уравнением

$$\mathbf{x}[t+1]=F[t]\mathbf{x}[t],\ t=0,1,\ldots,\ \mathbf{x}[t]\in\mathbf{R}^n,\ F[t]\in\mathbf{R}^{n\times n}.$$

Вопрос сводится к характеризации такой последовательности матриц $(F[t])_{t=0,1,\ldots}$, что

$$F[T]F[T-1]\ldots F[1]F[0]\mathbf{x}[0]=c(\mathbf{x}[0])\mathbf{1}\ \text{при некотором } T$$

или

$$\lim_{T\to\infty} F[T]F[T-1]\ldots F[1]F[0]\mathbf{x}[0]=c(\mathbf{x}[0])\mathbf{1}.$$

В ряде цитированных выше работ приведены различные характеризации такого рода в терминах собственных чисел, рангов и других характеристик матриц $(F[t])_{t=0,1,\ldots}$. В случае $F[t]\equiv F$, $c(\mathbf{x}[0])=0$ они сводятся к критерию устойчивости $|\lambda_i(F)|<1$ дискретной системы $\mathbf{x}[t+1]=F\mathbf{x}[t]$.

Явное выражение псевдообратной лапласиана

Как уже отмечалось, для описания структуры связей между агентами в МАС используются графы и характеризующие их матрицы смежности A, инцидентности B, степеней вершин D и лапласианы L, связанные соотношениями $L=D-A=B\cdot B^T$. Как указано, например, в [12-14], особо важную роль при исследовании проблем согласия играет лапласиан. В ряде приложений (транспортные задачи [6,26], электрические сети [5,27-29 и др.) используются двудольные графы и псевдообратные некоторых из характеризующих их матриц; так, в [26] получено, путем систематического использования формулы Клайна псевдообращения блочных матриц [25], явное выражение псевдообратной B^+ матрицы инцидентности B двудольного графа; в [27] предложен основанный на соотношении L=D-A и SVD-разложении алгоритм вычисления псевдообратной L^+ лапласиана L двудольного графа. Опираясь на явное выражение B^+, соотношение $L=B\cdot B^T$ и некоторые свойства псевдообратных , можно получить и явное выражение L^+.

Пусть $v=k+m$ вершин и $r=k\cdot m$ ребер полного двудольного графа занумерованы так, что его матрицы имеют следующую блочную структуру:

$$A=\begin{bmatrix} 0_{k\times k} & J_{k\times m} \\ J_{m\times k} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}=A^T,$$

$$D=\begin{bmatrix} m\cdot I_{k\times k} & 0_{k\times m} \\ 0_{m\times k} & k\cdot I_{m\times m}\end{bmatrix}=D^T,$$

$$L=\begin{bmatrix} m\cdot I_{k\times k} & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & k\cdot I_{m\times m}\end{bmatrix}=L^T,$$

$$B=\begin{bmatrix} -I_{k\times k} & -I_{k\times k} \dots & -I_{k\times k} \\ J^{(1)}_{m\times k} & J^{(2)}_{m\times k} \dots & J^{(m)}_{m\times k}\end{bmatrix}.$$

Здесь 0=[0] и J=[1] – матрицы соответствующих размеров, состоящие из нулей и единиц, I – единичные матрицы соответствующих порядков, $J^{(i)}_{m\times k}$, i=1,…,m, - матрицы, i-я строка которых состоит из единиц, а остальные элементы – нули, так что $\sum_{i=1}^{m} J^{(i)}_{m\times k} = J_{m\times k}$. Далее используются матрицы $J^{(i)}_{k\times m}=(J^{(i)}_{m\times k})^T$, i-й столбец которых состоит из единиц, а остальные элементы – нули, так что $\sum_{i=1}^{m} J^{(i)}_{k\times m} = J_{k\times m}$; квадратные матрицы снабжаются одним нижним индексом; $P_k=P_k^T=k\cdot(J_k-v\cdot I_k)$, так что $P_k^2=k^2\cdot(v^2\cdot I_k-(v+m)\cdot J_k)$; $Q_{k\times m}^{(i)}=m\cdot(v\cdot J_{k\times m}^{(i)}-J_{k\times m})$, $(Q_{k\times m}^{(i)})^T= Q_{m\times k}^{(i)}$, так что $\sum_{i=1}^{m} Q^{(i)}_{k\times m} = m\cdot k\cdot J_{k\times m}$, $\sum_{i=1}^{m} Q^{(i)}_{m\times k} = m\cdot k\cdot J_{m\times k}$, $\sum_{i=1}^{m} Q^{(i)}_{m\times k}\cdot Q^{(i)}_{k\times m} = r\cdot m\cdot (v^2\cdot I_m-(v+k)\cdot J_m)$, $P_k\cdot m\cdot k\cdot J_{k\times m} = -r^2\cdot J_{k\times m}$, $m\cdot k\cdot J_{m\times k}\cdot P_k = -r^2\cdot J_{m\times k}$.

Явное выражение матрицы L^+ можно получить, используя формулу Клайна псевдообращения блочных матриц. Менее громоздким является его получение с использованием найденного в [26] явного выражения матрицы

$$B^+=\frac{1}{v\cdot r}\begin{bmatrix} P_k & Q^{(1)}_{k\times m} \\ P_k & Q^{(2)}_{k\times m} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ P_k & Q^{(m)}_{k\times m}\end{bmatrix},$$

откуда

$L^+=(B\cdot B^T)^+=(B^T)^+\cdot B^+=(B^+)^T\cdot B^+=$

$$\frac{1}{v\cdot r}\begin{bmatrix} P_k & P_k \dots & P_k \\ Q^{(1)}_{m\times k} & Q^{(2)}_{m\times k} \dots & Q^{(m)}_{m\times k}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{v\cdot r}\begin{bmatrix} P_k & Q^{(1)}_{k\times m} \\ P_k & Q^{(2)}_{k\times m} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ P_k & Q^{(m)}_{k\times m}\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{v^2\cdot r^2}\begin{bmatrix} m\cdot P_k^2 & P_k\cdot(\sum_{i=1}^{m} Q^{(i)}_{k\times m}) \\ (\sum_{i=1}^{m} Q^{(i)}_{m\times k})\cdot P_k & \sum_{i=1}^{m} Q^{(i)}_{m\times k}\cdot Q^{(i)}_{k\times m}\end{bmatrix}.$$

С учетом вышеуказанных соотношений между фигурирующими здесь матрицами явное выражение псевдообратной лапласиана может быть записано в виде

$$L^{+}=\frac{1}{v^2\cdot r^2}\begin{bmatrix} r\cdot k\cdot(v^2\cdot I_k-(v+m)\cdot J_k) & -r^2\cdot J_{k\times m} \\ -r^2\cdot J_{m\times k} & r\cdot m\cdot(v^2\cdot I_m-(v+k)\cdot J_m) \end{bmatrix}$$

Непосредственно проверяются соотношения Мура-Пенроуза, определяющие псевдообратную матрицу:

$$L\cdot L^{+}=(L\cdot L^{+})^{T}=L^{+}\cdot L=(L^{+}\cdot L)^{T}=$$

$$\begin{bmatrix} m\cdot I_{k\times k} & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & k\cdot I_{m\times m} \end{bmatrix}\cdot L^{+}=$$

$$\frac{1}{v}\begin{bmatrix} v\cdot I_k-J_k & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & v\cdot I_m-J_m \end{bmatrix};$$

$$L\cdot(L^{+}\cdot L)=$$

$$\begin{bmatrix} m\cdot I_{k\times k} & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & k\cdot I_{m\times m} \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{v}\begin{bmatrix} v\cdot I_k-J_k & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & v\cdot I_m-J_m \end{bmatrix}=L;$$

$$(L^{+}\cdot L)\cdot L^{+}=$$

$$\frac{1}{v}\begin{bmatrix} v\cdot I_k-J_k & -J_{k\times m} \\ -J_{m\times k} & v\cdot I_m-J_m \end{bmatrix}\cdot L^{+}=L^{+}.$$

В качестве одного из приложений можно получить явное выражение матрицы сопротивлений R [28-29] рассмотренного графа, элементы которой определяются по формулам

$$r_{ij}=(L^{+})_{ii}+(L^{+})_{jj}-(L^{+})_{ij}-(L^{+})_{ji},\, i\neq j,$$

$$r_{ii}=0,\, i=1,\ldots,v,$$

так что R симметрична и имеет нулевую диагональ.

Из выражения для L^{+} следует, что

- для $1\le i,j\le k: r_{ij}=\frac{2}{m};$

- для $k+1\le i,j\le m: r_{ij}=\frac{2}{k};$

- для $1\le i\le k, k+1\le j\le m: r_{ij}=\frac{1}{k}+\frac{1}{m}-\frac{1}{k\cdot m}=\frac{v-1}{r},$

так что

$$R=\begin{bmatrix} \frac{2}{m}\cdot(J_k-I_k) & \frac{v-1}{r}\cdot J_{k\times m} \\ \frac{v-1}{r}\cdot J_{m\times k} & \frac{2}{k}\cdot(J_m-I_m) \end{bmatrix}.$$

Предложенные в [29] явные детерминантные формулы для вычисления элементов r_{ij} матрицы сопротивлений произвольного графа,

$r_{ij} = \det L(i, j)/\det L(i)$,

где подматрицы L(i) получены из L вычеркиванием i-х строки и столбца, а L(i,j) – i-х и j-х строк и столбцов, согласуются с указанными выше для случая полного невзвешенного двудольного графа.

Заключение

Некоторые прикладные задачи допускают трактовку как проблемы согласия в рассмотренном выше простейшем виде. В качестве примера можно указать работу [30], где обсуждаются некоторые локальные механизмы перераспределения прибылей в группе Г взаимодействующих экономических партнеров r_i , i=1,…,n, причем механизмы опираются на взаимную договоренность партнеров об установлении цен на товары и их последовательном изменении с целью достижения равной выгоды партнеров, трактуемой следующим образом. Каждый партнер r_i характеризуется величинами K_i его актива и $\Pi_i(0)$ его первоначальной прибыли, которыми, в свою очередь, определяется величина $P_i(0)=\Pi_i(0)/K_i$ первоначальной рентабельности его актива. Условие равной выгоды партнеров предполагает установление таких цен на товары (цен равновесия), при которых достигается равенство рентабельностей их активов некоторой целевой, единой для них всех, величине $P^*=P_i^*$, i=1,…,n. Отвечающие этому условию целевые прибыли Π_i^* определяются соотношением $\Pi_i^*=P^*K_i$. Именно на их последовательное достижение направлены алгоритмы перераспределения прибылей. На каждом шаге взаимодействия партнеров соблюдается баланс сумм их прибылей до и после взаимодействия. Целесообразность механизма перераспределения трактуется как приближение прибылей к целевым в процессе взаимодействия, реализуемого в дискретные моменты времени t=1,2,… путем порождения тем или иным алгоритмом текущих прибылей $\Pi_i[t]$. В качестве экономически целесообразных предложены пропорциональные алгоритмы перераспределения прибылей, определяемые выделением на каждом шаге t части Г[t] партнеров группы Г, взаимодействие между которыми осуществляется по правилам $\Pi_i[t]=\Pi_i[t-1]$, $r_i \notin \Gamma[t]$, $\Pi_i[t]=K_i\{(\Sigma_{1\le j\le n[t]}\ \Pi_j[t-1])/(\Sigma_{1\le j\le n[t]}\ K_j)\}$, $r_i \in \Gamma[t]$, где $2\le n[t]\le n$ – количество партнеров в группе Г[t].

В некоторых случаях проблемы согласия не формулируются непосредственно в том простейшем виде, который рассмотрен выше. Так, механизм согласия экспертов с несовпадающими точками зрения [2] не приводит к одинаковому распределению финансирования между агентами. Надлежащей переформулировкой подобных проблем их можно привести к рассмотренному простейшему виду.

Список использованных источников

1. Блюмин С.Л. Дискретность против непрерывности при системном моделировании во времени и/или пространстве // Системы управления и информационные технологии. – 2004. – № 1(13). – С. 4-9.
2. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
3. Ferber J. Multi-Agent Systems. An Introduction to Distributed Artificial Intelligence. – London: Addison Wesley, 1999. – 509 p.
4. Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г. Распределенные системы планирования действий коллективов роботов. – М.: Янус-К, 2002. – 292 с.
5. Веренико в В.А. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики. – М.: ВШ, 1981. – 288 с.
6. Блюмин С.Л., Миловидов С.П. Обратные задачи динамики и динамические транспортные задачи // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. – 1987. - № 5. – С. 209 (М.: ВИНИТИ, 1985. – № 7527-В85 Деп. – 56 с.).
7. Кравец О.Я., Моисеев Т.Н. Оптимизация управления распределенными информационно-вычислительными сетями на основе мультиагентных технологий. - Воронеж: Научная книга, 2007. – 287 с.
8. Vicsek T., Czirok A., Ben-Jacob E., Cohen I., Schochet O. Novel type of phase-transition in a system of self-driven particles // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 95, No 6. – P. 1226-1229.
9. Toner J., Tu Y. Flocks, herds, and schools: a quantitative theory of flocking. – arXiv:cond-mat/9804180. – 16 Apr 1998. – 89 p.
10. Fu F., Liu L., Wang L. Information propagation in a novel hierarchical networks. – arXiv:math.DS/0605293. – 11 May 2006. – 11 p.
11. Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 102 с.
12. Olfati-Saber R., Fax A., Murrey R. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems // Proc. IEEE. – 2007. – Vol. 95, No 1. – P. 1-17.
13. Wang L., Shi H., Xiao F., Wang A. Algebraic characterizations of consensus problems for networked dynamic systems. – arXiv:math.ST/0502339. – 16 Feb 2005. – 18 p.
14. Wang L., Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. – arXiv:math.DS/0701724. – 25 Jan 2007. – 38 p.
15. Губко М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур. – М.: ИПУ РАН, 2006. – 264 с.
16. Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. – М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.

17. Ren W., Beard R. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies // IEEE Trans. – 2005. – Vol. AC-50, No 5. – P. 655-661.
18. Godsil C., Royle G. Algebraic Graph Theory. – NY: Springer, 2001. – 439 p.
19. Ren W., Beard R., Atkins E. A survey of consensus problems in multi-agent coordination // Proc. ACC. – 2005. – P. 1859-1864.
20. Jadbabaie A., Lin J., Morse A. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // IEEE Trans. – 2003. – Vol. AC-48, No 6. – P. 988-1001.
21. Xiao L., Boyd S., Kim S.-J. Distributed average consensus with least-mean-square deviation // J. Parall. Distrib. Comput. – 2007. – Vol. 67, No 1. – P. 33-46.
22. Блюмин С.Л. Законы усреднения в моделировании экопроцессов // Экология ЦЧО РФ. – 2006. – № 2(17). – С. 25-27.
23. Блюмин С.Л. Математические проблемы искусственного интеллекта: еаны, оиды, потенты // Системы управления и информационные технологии. – 2006. – № 2(24). – С. 4-8.
24. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
25. Блюмин С.Л., Миловидов С.П. Псевдообращение. – Воронеж: ВПИ-ЛПИ, 1990. – 72 с.
26. Миловидов С.П. Псевдообращение матрицы условий транспортной задачи. – М.: ВИНИТИ, 1982. – № 6027-82 Деп. – 25 с.
27. Ho N.-D., Van Dooren P. On the pseudo-inverse of the Laplacian of a bipartite graph // Appl. Math. Lett. – 2005. – Vol.18, No 8. – P. 917-922.
28. Gutman I., Xiao W. Generalized inverse of the Laplacian matrix and some applications // Bull. Acad. Serbe. – 2004. – T. 129, № 29. – S. 15-23.
29. Bapat R. Resistance distance in graphs // Math. Stud. – 1999. – № 68. – P. 87-98.
30. Блюмин С.Л., Суханов В.Ф., Яриков А.В. Пропорциональные алгоритмы перераспределения прибылей экономически целесообразны // Наука и технология в России. – 1994. – № 3(5). – С. 12-13.

Липецкий государственный технический университет, Липецк