# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С АЦИКЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

**Кочкаров А.А., Салпагаров М.Б., Кочкаров Р.А.**
(*Институт прикладной математики им М.В. Келдыша РАН, Москва*)
azret_kochkarov@mail.ru

*Исследуются явления разрушения сложных информационных, электроэнергетических, транспортных и коммуникационных систем, как правило, имеющих древовидную структуру. В рамках исследования предложена теоретико-графовая (дискретная) модель структурного разрушения. Предложены различные критерии отказа (выхода из строя) системы при структурном разрушении.*

Ключевые слова: структурное разрушение, критерии разрушения (отказа, выходы из строя), структурная динамика, теоретико-графовое моделирование.

## *Введение*

Структурные изменения в сложных системах могут иметь как позитивный характер, когда в системе появляются новые элементы, улучшающие ее функционирование, так и негативный характер, когда из строя по различным причинам выходят элементы системы, что существенно ухудшает или останавливает работу системы.

Существует ряд моделей и задач, для описания которых используются потоки в сетях и на графах [2]. Потоками в сетях моделируют потоки транспорта в сети автодорог, перевозку товаров по железным дорогам, перекачку жидкости и газа по сети трубопроводов от источника до пункта потребления и т.д. Но все эти модели и задачи не учитывают возможность прекращения функционирования узловых элементов сетей, а это часто приводит к нештатным ситуациям в описываемых этими моделями системах. Нередко отказ одного узлового элемента системы приводит к череде отказов в системе (каскадному отключению), в следствие чего из строя выходит вся система.

В настоящей работе предложена *математическая модель структурного разрушения сложной системы.*

## *1. Математическая модель структурного разрушения*

Обозначим через $G = (V, E)$ – граф, соответствующий структуре исследуемой системы, $V$ – множество вершин, $E$ – множество ребер графа $G$. Каждой вершине $v \in V$ припишем веса $w(v)$ и $\overline{w}(v)$, отражающие *текущую загрузку и предельную загрузку* элемента системы. В случае, когда текущая загрузка $w(v)$ элемента системы достигает предельного значения $\overline{w}(v)$, то элемент системы выходит из строя, а проходящие через него потоки перераспределяются по «соседним» элементам системы. Выход из строя элемента системы в теоретико-графовой терминологии соответствует удалению из графа системы вершины с инцидентными ей ребрами. А перераспределение весов в тривиальном случае соответствует равному разделению веса $\overline{w}(v)$ удаленной вершины по вершинам, смежным с удаляемой.

При выходе из строя одного или нескольких элементов сети возможны несколько сценариев дальнейшего развития событий. Один из них, если система функционирует в предельном состоянии, т.е. загрузка элементов близка к предельному значению, то возможен “быстрый” переход системы в критическое состояние, когда система не может выполнять возложенные на нее функции.

Структурное разрушение, вообще говоря, процесс динамический. Не нарушая общности, будем считать, что $w_t(v)$ – текущая загрузка вершины $v \in V$ в момент времени $t = 1,2,3,\ldots,T,\ldots$

Если через $\tilde{V}_t = \{\tilde{v}_j^t\} \subseteq V$, $j = 1,2,3,...,\left|\tilde{V}_t\right|$, обозначить множество вершин, вышедших из строя в момент времени $t$, т.е. тех, у которых $w_t(v_j) \geq \overline{w}(v_j)$, а через $\xi(\tilde{v}_j^t) = \{v_i^j\}$ – *окружение вершины* $\tilde{v}_j^t$ (или множество вершин, смежных с вершиной $\tilde{v}_j^t$), $\left|\xi(\tilde{v}_j^t)\right| = \deg \tilde{v}_j^t$, $i = 1,2,3,...,\left|\xi(\tilde{v}_j^t)\right|$, то процесс структурного разрушения формально будет выглядеть следующим образом.

В момент времени $t = 0$ необходимо произвести проверку по всем вершинам $v \in V$, и сформировать множество $\tilde{V}_1$ из вершин, для которых справедливо $w_0(\tilde{v}_j) \geq \overline{w}(\tilde{v}_j)$. Во все последующие моменты времени $t = 1,2,3,...,T,...$ следует воспользоваться правилом

$$w_{t+1}(v_i^j) = w_t(v_i^j) + \varepsilon_j \cdot \overline{w}(\tilde{v}_j),\ i = 1,2,3,...,\left|\xi(\tilde{v}_j^t)\right|,\ j = 1,2,3,...,\left|\tilde{V}_t\right|.$$

Если $w_{t+1}(v_i^j) \geq \overline{w}(v_i^j)$, то вершина $v_i^j$ удаляется из графа $G$ и $\tilde{V}_{t+1} + v_i^j$.

Коэффициент $\varepsilon_j$ – *параметр распределения загрузки*. Параметр распределения загрузки может зависеть от различных факторов, в простейшем случае он равномерно распределяет предельную загрузку удаляемой вершины по соседним, т.е. на для каждой вершины $\tilde{v}_j$ вычисляется как $\varepsilon_j = \dfrac{1}{\deg \tilde{v}_j^t}$. Структурное разрушение при параметре распределения загрузки $\varepsilon_j = \dfrac{1}{\deg \tilde{v}_j^t}$ будем назвать *равномерным.*

Процесс структурного разрушения следует продолжать до тех пор, пока система не перейдет в *критическое состояние* $\Im$, т.е., когда перестанет выполнять возложенные на нее функции.

Критическое состояние $\Im$ определяется, исходя из особенностей моделируемой системы. Например, система может считаться пребывающей в критическом состоянии, если из ее структуры удален хотя бы один элемент (вершина), или система может считаться функционирующей, если ее структура после удаления элементов все еще остается связной. В настоящей работе будут рассмотрены различные *критерии отказа* системы (перехода в состояние отказа системы) или, иначе, *критерии разрушения*.

## *2. Характеристики и особенности структурного разрушения сложной системы*

Основная задача моделирования структурного разрушения системы – выяснить, при каких условиях система может перейти в критическое состояние (начальные причины повреждения системы могут быт как внутренними, так и внешними) Переход системы в критическое состояние означает, что в системе начался процесс структурного разрушения, но это не значит, что система окончательно прекратила функционировать. Систему можно считать вышедшей из строя только в том случае, когда изменения, произошедшие в структуре системы, будут соответствовать критериям отказа. Поэтому одной из основных характеристик в модели структурного разрушения будет служить *время* $T_{cr}$ *структурного разрушения*, отражающее длительность самого процесса структурного разрушения.

Нельзя утверждать, что система, перейдя в критическое состояние, когда из ее структуры удаляются элементы (начало процесса структурного разрушения), непременно выйдет из строя (перейдет и в состояние отказа системы). Время $T_{cr}$ структурного разрушения системы соответствует продолжительности процесса структурного разрушения от момента первого удаления (выхода из строя) элемента системы до момента остановки процесса разрушения или отказа самой системы.

Поскольку построенная модель структурного разрушения системы непосредственно связана с типом структуры самой системы, важно исследовать системы с различными типами структур, найти связь между типом структуры системы и временем структурного разрушения при переходе системы в критическое состояние.

Нельзя подменять два представления о *сложности систем*. Сложность системы может заключаться и в сложности ее динамического поведения (самоорганизация, динамический хаос, бифуркации, случайное поведение и т.п.) и в сложности структуры связей между ее элементами. Часто системы совмещают в себе эти оба представления о сложности, хотя не всегда исследователям удается жестко определить понятия о сложности системы в поведении и в структуре. Нетривиален этот вопрос и для исследуемого в настоящей работе процесса структурного разрушения системы.

Простыми структурами в контексте настоящей работы следует считать регулярные [1], периодические [1], симметричные [1], автоморфные графы и деревья. Именно с исследования таких структур начнется исследование процесса структурного разрушения систем, но нельзя при этом считать, что сам процесс будет также “простым”.

Для исследования процесса структурного разрушения систем с “простой” структурой целесообразно использовать следующие критерии отказа.

1. *Критерий полного разрушения* $\sigma_0(k)$. Система считается вышедшей из строя, если в системе выйдут из строя все элементы (будут удалены все вершины графа – структуры системы). Критерий связности $\sigma_0(k)$ зависит от одного параметра: $k$ – числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения.

2. *Критерий связности* $\sigma_1(k)$. Система считается вышедшей из строя, если нарушенная связность ее структуры при удалении вершин. Критерий связности $\sigma_1(k)$ зависит от одного параметра: $k$ – числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения.

3. *Компонентный критерий* $\sigma_2(k,m)$. Система считается вышедшей из строя, если число компонент в структуре системы

при ее разрушении станет больше заданного числа $m$. Компонентный критерий $\sigma_2(k,m)$ выхода системы из строя зависит от двух параметров: от $k$ – числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения, и $(m-1)$ – максимально допустимого числа компонент структуры при ее разрушении.

4. *Диаметральный критерий* $\sigma_3(k,D)$. Система считается вышедшей из строя, если диаметр хотя бы одной из компонент структуры системы в процессе разрушения окажется меньше заданного числа $D$. Диаметральный критерий $\sigma_3(k,D)$ выхода системы из строя зависит от двух параметров: от $k$ – числа удаленных вершин в начальный момент времени структурного разрушения и $D$ – минимально допустимого диаметра компонент структуры при ее разрушении.

По мере необходимости в дальнейшем будут вводиться и другие критерии отказа систем при их структурном разрушении.

Множество $\Phi(G)$ элементов вышедших из строя (удаленных из структуры) в момент времени $t=1$ будем называть *эпицентрами структурного разрушения*. В критериях $\sigma_0(k)$, $\sigma_1(k)$, $\sigma_2(k,m)$, $\sigma_3(k,D)$, число $k$ соответствует количеству эпицентров структурного разрушения системы.

Настоящая работа посвящена структурному разрушению ациклических графов (цепе и деревьев) *с равными значениями начальных загрузок* $w_0(v)$ *и равными значениями предельных загрузок* $\overline{w}(v)$ *для всех их вершин*

## *3. Структурное разрушение графов-цепей*

### *3.1. СТРУКТУРНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ГРАФОВ-ЦЕПЕЙ ПО КРИТЕРИЮ СВЯЗНОСТИ*

Всякий связный ациклический граф $G=(V,E)$ называется *деревом*. Частным случаем дерева $G$ является граф-цепь $C=(V_C,E_C)$. Множество вершин $V_C$ графа-цепи $C$ состоит из двух висячих вершин – концов цепи со степенями, равными единице, и внутренних вершин со степенями, равными двум.

Рассмотрим граф-цепь $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, с равными для всех его вершин $v\in V_C$ весами $w_0(v)$, $\overline{w}(v)$.

Ввиду того, что всякий граф-цепь утратит связность при удалении хотя бы одной невисячей (внутренней) вершины.

Лемма 1. *Всякий граф-цепь* $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_1(k)$, *где* $1\le k\le n-2$, *при удалении хотя бы одной невисячей вершины.* ◄[1]

## *3.2. СТРУКТУРНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ГРАФОВ-ЦЕПЕЙ ПО КОМПОНЕНТНОМУ КРИТЕРИЮ*

Лемма 2. *Всякий граф-цепь* $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, $n\ge 3$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_2(k,m)$, *где* $2\le m\le (n+1)/2$ *при нечетном* $n$ *и* $2\le m\le n/2$ *при четном* $n$, *если количество попарно несмежных внутренних вершин-эпицентров равно* $k=m-1$.

Доказательство. Удаление одной невисячей вершины графа-цепи $C=(V_C,E_C)$ непременно приведет к распадению его на две компоненты $C'=(V_{C'},E_{C'})$ и $C''=(V_{C''},E_{C''})$. «Простейшей» компонентой в таком случае может быть граф-вершина. Всякий граф-цепь $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, $n\ge 3$, имеет $(n-1)/2$ попарно несмежных внутренних вершин, если $n$ – нечетное, и $n/2-1$, если $n$ – четное. Удаление из графа-цепи $C=(V_C,E_C)$ всех попарно несмежных внутренних вершин приведет к появлению $(n+1)/2$ компонент в первом случае и $n/2$ – во втором, причем каждая компонента будет представлять собой граф-вершину. ◄

---

[1] *Здесь и далее символом "◄" будем обозначать окончание алгоритмов, доказательств лемм, теорем, утверждений, примечаний и т.п..*

ПРИМЕЧАНИЕ 1. *Для всякого графа-цепи* $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, $n\geq 3$, *структурное разрушение по критерию* $\sigma_2(k,m)$ *в зависимости от соотношения параметров* $k$ *и* $m$ *может произойти различными способами.* ◄

### *3.3. СТРУКТУРНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ГРАФОВ-ЦЕПЕЙ ПО ДИАМЕТРАЛЬНОМУ КРИТЕРИЮ*

Пусть $H=(W, Q)$ есть $n$-вершинный связный граф [2]. Длина кратчайшей цепи, соединяющей пару вершин $w,v\in W$, называется расстоянием между вершинами $w$ и $v$ [2] и обозначается через $\rho(w,v)$. Заметим, что введенное таким образом расстояние удовлетворяет известным аксиомам Евклидовой метрики.

Для фиксированной вершины $w\in W$ величина $\varepsilon(w)=\max\limits_{v\in W}\rho(w,v)$ называется *эксцентриситетом* вершины $w\in W$. Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин графа $H=(W,Q)$ называется *диаметром* графа $H$ и обозначается через $d(H)$, т.е. $d(H)=\max\limits_{w\in W}\varepsilon(w)$. Если пара вершин $u,w\in W$ соединяется кратчайшей цепью длины $\rho(u,w)=d(H)$, то эта цепь называется *диаметральной*. Вершина $w$ называется *периферийной*, если $\varepsilon(w)=d(H)$. *Радиус* графа $H$ обозначается через $r(H)$ и вычисляется по формуле $r(H)=\min\limits_{w\in W}\varepsilon(w)$. Вершина $w$ называется *центральной*, если $\varepsilon(w)=r(H)$. *Центром* графа $H$ называется множество центральных вершин.

ЛЕММА 3. *Всякий граф-цепь* $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, $n\geq 3$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_3(1,r(C))$ *при удалении центральной вершины (т.е. когда эпицентром является центральная вершина). Причем диаметры появившихся в результате структурного разрушения компонент будут равны* $r(C)-1$ и $d(C)-r(C)-1$.

Доказательство. Для графа-цепи $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, расстояние между двумя его висячими вершинами $v_1$ и $v_2$ совпадает с диаметром и длиной графа цепи $\rho(v_1,v_2)=d(C)=n-1$, а сами вершины $v_1$ и $v_2$ являются периферийными.

Всякий граф-цепь $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, имеет центр, состоящий из двух вершин, если число вершин цепи $|V_C|=n$ – четное, и состоящий из одной вершины, если число вершин $|V_C|=n$ – нечетное. В первом случае $r(C)=n/2$, во втором $r(C)=(n-1)/2$. Удаление центральной вершины графа-цепи $C=(V_C,E_C)$ приведет к распадению его на две цепи $C_1=(V_{C_1},E_{C_1})$ и $C_2=(V_{C_2},E_{C_2})$, с соответствующими диаметрами $d(C_1)=r(C)-1$ и $d(C_2)=d(C)-r(C)-1$ (см. рис. 1). Очевидно, что при нечетном $n$ диаметры компонент $C_1=(V_{C_1},E_{C_1})$ и $C_2=(V_{C_2},E_{C_2})$ будут равны $d(C_1)=d(C_2)$, а при четном $n$ – $d(C_1)>d(C_2)$. ◄

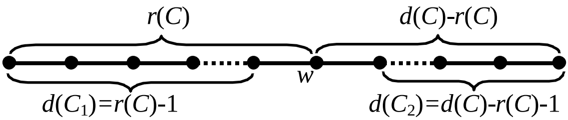


*Рис. 1. Граф-цепь $C=(V_C,E_C)$ и диаметры компонент при удалении центральной вершины w.*

Следствие 3.1. *Всякий граф-цепь $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, $n\ge 3$, будет разрушен по критерию $\sigma_3(1,d(C)-r(C))$ при удалении центральной вершины (т.е. когда эпицентром является центральная вершина). Причем диаметры появившихся* *в результате структурного разрушения компонент будут равны* $r(C)-1$ и $d(C)-r(C)-1$. ◄

Для эксцентриситета всякой внутренней вершины $v \in V_C$ графа-цепи $C=(V_C, E_C)$ справедливо неравенство $r(C) \le \varepsilon(v) < d(C)$. Так же, как и в случае с удалением из графа-цепи центральной вершины, удаление любой внутренней вершины приведет к распадению графа-цепи $C=(V_C, E_C)$ на две компоненты $C_1=(V_{C_1}, E_{C_1})$ и $C_2=(V_{C_2}, E_{C_2})$, с соответствующими диаметрами $d(C_1)=\varepsilon(v)-1$ и $d(C_2)=d(C)-\varepsilon(v)-1$ (см. рис. 2). Поэтому из леммы 3 очевидным образом вытекает следующая

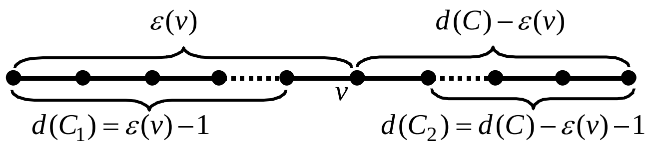


*Рис. 2. Граф-цепь $C=(V_C, E_C)$ и диаметры компонент при удалении внутренней вершины v.*

Лемма 4. *Всякий граф-цепь* $C=(V_C, E_C)$, $|V_C|=n$, $n \ge 3$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_3(1, \varepsilon(v))$ *при удалении внутренней вершины* $v \in V_C$ *(т.е. когда эпицентром является внутренняя вершина* $v \in V_C$*). Причем диаметры появившихся в результате структурного разрушения компонент будут равны* $\varepsilon(v)-1$ и $d(C)-\varepsilon(v)-1$. ◄

Следствие 4.1. *Всякий граф-цепь* $C=(V_C, E_C)$, $|V_C|=n$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_3(1, d(C)-\varepsilon(v))$ *при удалении внутренней вершины* $v \in V_C$ *(т.е. когда эпицентром является внутренняя вершина* $v \in V_C$*). Причем диаметры появившихся* *в результате структурного разрушения компонент будут равны* $\varepsilon(v)-1$ и $d(C)-\varepsilon(v)-1$. ◀

ПРИМЕЧАНИЕ 2. *В леммах 2 – 4 отражены случаи разрушения графа-цепи* $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, $n\geq 3$, *по критериям* $\sigma_1(k)$, $\sigma_2(k,m)$, *и* $\sigma_3(k,D)$. *Во всех исследованных случаях предполагалось, что все вершины графа-цепи* $C=(V_C,E_C)$ *имеют равные значения текущих (начальных) загрузок* $w_0(v)$ *и равные значения предельных загрузок* $\overline{w}(v)$. *Структурное разрушения во всех этих случаях происходит на первом шаге процесса, т.е. время процесса структурного разрушения равно* $T_{cr}=1$. ◀

## *3.4. СТРУКТУРНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ГРАФОВ-ЦЕПЕЙ ПО КРИТЕРИЮ ПОЛНОГО РАЗРУШЕНИЯ*

Прежде чем перейти к исследованию структурного разрушения по критерию $\sigma_0(k)$, рассмотрим вопрос о разности начальной (текущей) $w_0(v)$ и предельной загрузки $\overline{w}(v)$ элементов графа-цепи $C=(V_C,E_C)$.

Предположим, что эпицентром на графе-цепи $C=(V_C,E_C)$ является одна из его внутренних вершин $v^*\in V_C$. Пусть также $\overline{w}(v^*)-w_0(v^*)>\overline{w}(v^*)/2$, тогда после удаления эпицентра $v^*\in V_C$ текущая загрузка смежных ему вершин $v',v''\in V_C$ станет равной

$$\overline{w}_1(v')=\overline{w}_1(v'')=w_0(v')+\overline{w}(v^*)/2=w_0(v^*)+\overline{w}(v^*)/2<\overline{w}(v^*).$$

Поэтому процесс структурного разрушения прекратится, а его длительность его будет равна $T_{cr}=1$.

В другом случае, когда $\overline{w}(v^*)-w_0(v^*)\leq\overline{w}(v^*)/2$, длительность процесса структурного разрушения $T_{cr}>1$, если система не выйдет из строя при достижении установленного критерия разрушения.

Иная ситуация складывается, когда эпицентром является одна из висячих вершин $v_1, v_2 \in V_C$ графа-цепи $C=(V_C, E_C)$. В таком случае $\overline{w}(v_1)-w_0(v_1)<\overline{w}(v_1)$, поэтому для смежной эпицентру вершине $v''' \in V_C$ будет справедливо выражение $w_1(v''')=w_0(v''')+\overline{w}(v_1)>\overline{w}(v''')$. А это значит, что вершина $v''' \in V_C$ выйдет из строя (будет удалена) в следующий момент времени $t=2$. Причем вершина $v'''$ окажется висячей для цепи $C/v_1$, что приведет к удалению смежной ей вершине в момент времени $t=3$. Этот процесс будет продолжаться до пор, пока не будут удалены все вершины графа-цепи $C=(V_C, E_C)$, т.е. будет достигнут критерий разрушения $\sigma_0(1)$. Из проделанных рассуждений вытекаю следующая лемма.

Лемма 5. *Всякий граф-цепь* $C=(V_C, E_C)$, $|V_C|=n$, $n \ge 3$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_0(1)$ *при удалении одной из висячих вершин за время* $T_{cr}=n$. ◄

Лемма 6. *Всякий граф-цепь* $C=(V_C, E_C)$, $|V_C|=n$, $n \ge 3$, *с равными значениями начальных загрузок* $w_0(v)$ *и равные значения предельных загрузок* $\overline{w}(v)$ *для всех его вершин такими, что* $\overline{w}(v)-w_0(v) \le \overline{w}(v)/2$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_0(1)$ *при удалении одной из внутренних вершин* $v \in V_C$ *за время* $T_{cr}=\varepsilon(v)+1$, *где* $\varepsilon(v)$ *– эксцентриситет вершины* $v \in V_C$. ◄

Доказательство. После удаления внутренней вершины $v \in V_C$ граф-цепь $C=(V_C, E_C)$ в момент времени $t=1$ распадется на две компоненты, у каждой из которых эпицентрами окажутся по одной висячей вершине. Это, впоследствии, согласно лемме 5, приведет к разрушению обеих компонент по критерию $\sigma_0(1)$. Время разрушения каждой компоненты в таком случае совпадает с числом вершин в них, для большей компоненты – это $\varepsilon(v)$, а для меньшей – $d(C)-\varepsilon(v)$. А поскольку процесс структурного разрушения графа-цепи $C=(V_C,E_C)$ начался с удаления внутренней вершины $\hat{v}\in V_C$, то его время $T_{cr}=\varepsilon(v)+1$. ◄

Следствие 6.1. *Всякий граф-цепь* $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, $n\geq 3$, *с равными значениями начальных загрузок* $w_0(v)$ *и равными значениями предельных загрузок* $\overline{w}(v)$ *для всех его вершин такими, что* $\overline{w}(v)-w_0(v)\leq\overline{w}(v)/2$, *будет разрушен по критерию* $\sigma_0(1)$ *при удалении центральной вершины за время* $T_{cr}=r(C)+1$, *где* $r(C)$ *– радиус графа-цепи* $C=(V_C,E_C)$. ◄ *Фраза «Всякий граф-цепь* $C=(V_C,E_C)$, $|V_C|=n$, $n\geq 3$, *с равными значениями начальных загрузок* $w_0(v)$ *и равными значениями предельных загрузок* $\overline{w}(v)$» повторяется почти во всех формулировках. Лучше оговорить это в самом начале и не дублировать.

## 4. Структурное разрушение деревьев

### *4.1. СТРУКТУРНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ ПО КРИТЕРИЮ СВЯЗНОСТИ*

У деревьев $T=(V_T,E_T)$, как и у графов-цепей $C=(V_C,E_C)$, центр может состоять либо из одной, либо из двух вершин. Если диаметральная цепь дерева $T=(V_T,E_T)$ имеет четную длину, т.е. диаметр $d(T)$ четный, то центр дерева состоит из одной вершины, и из двух в противном случае, т.е. когда диаметр $d(T)$ нечетный. У всякого дерева $T=(V_T,E_T)$ не менее чем две висячие вершины. Все остальные, как в случае с графами-цепями, будем называть внутренними.

Поскольку всякое дерево утратит связность при удалении хотя бы одной невисячей (внутренней) вершины, то справедлива

Лемма 7. *Всякое дерево* $T=(V_T,E_T)$, $|V_T|=n$, *будет разрушено по критерию* $\sigma_1(k)$, *где* $1\leq k\leq n_T$, $n_T$ *– количество* *висячих вершин, при удалении хотя бы одной внутренней вершины за время $T_{cr} = 1$.* ◄

## *4.2. СТРУКТУРНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ ПО КОМПОНЕНТНОМУ КРИТЕРИЮ*

ЛЕММА 8. *Всякое дерево $T = (V_T, E_T)$, $|V_T| = n$, будет разрушено по критерию $\sigma_2(1,m)$ при удалении одной внутренней вершины $v \in V_T$ за время $T_{cr} = 1$, причем $m = \deg(v)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При удаление из дерева $T = (V_T, E_T)$ хотя бы одной внутренней вершины приведет к распадению его на компоненты, причем число компонент будет зависеть от степени удаляемой вершины. ◄

ЛЕММА 9. *Всякое дерево $T = (V_T, E_T)$, $|V_T| = n$, будет разрушено по критерию $\sigma_2(k,m)$ при удалении $k$ попарно несмежных внутренних вершин $v_i \in V_T$ за время $T_{cr} = 1$, причем*

$$m = \sum_{i=1}^{k} (\deg(v_i) - 1) + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удаление из дерева $T = (V_T, E_T)$ всех $k$ внутренних вершин $v_i \in V_T$ проведем последовательно вопреки основным правилам, определяющим процесс структурного разрушения. Это позволит подсчитать количество полученных в результате структурного разрушения компонент, и никак не повлияет на общую картину их межэлементных связей.

После удаления первой вершины $v_1 \in V_T$ дерево распадется на $\deg(v_1)$ компонент. Поскольку эпицентры являются попарно несмежными и невисячими вершинами дерева $T = (V_T, E_T)$, то вершина $v_2 \in V_T$ принадлежащая какой-то из полученных при удалении вершины $v_1$ компонент также не будет являться для свой компоненты висячей вершиной. Поэтому при удалении вершины $v_2$, компонента, которой она принадлежит, распадется на $\deg(v_2)$ компонент. А общее количество компонент, на которое распадется само дерево $T=(V_T, E_T)$, после удаления вершин $v_1$ и $v_2$ станет равным

$$\deg(v_1)+\deg(v_2)-1=(\deg(v_1)-1)+(\deg(v_2)-1)+1.$$

И далее, каждое удаление одной из вершин $v_i \in V_T$, $i=3,4,\ldots,k$, будет увеличивать число количество компонент на число $\deg(v_i)-1$. А это значит, что при одновременном удалении всех эпицентров соответствующих условиям теоремы дерево $T=(V_T, E_T)$ распадется на $m=\sum_{i=1}^{k}(\deg(v_i)-1)+1$ компонент. Длительность процесса структурного разрушения составит $T_{cr}=1$. ◄

### *4.3. СТРУКТУРНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ ПО ДИАМЕТРАЛЬНОМУ КРИТЕРИЮ*

Уточним, что центральные вершины дерева $T=(V_T, E_T)$ – это те вершины, для которых расстояние до любой другой вершины дерева не больше чем радиус дерева $r(T)$, т.е. расстояние от центральной вершины до самой удаленной от нее вершины дерева равно радиусу $r(T)$. Говоря иначе, расстояние от центральной вершины до концов любой проходящей через центральную вершину цепи будет не больше радиуса $r(T)$, т.е. после удаление центральной вершины эта цепь распадется на цепи с диаметром, меньшим чем $r(T)$. Это говорит о справедливости следующей .

Лемма 10. *Всякое дерево $T=(V_T, E_T)$ будет разрушено по критерию $\sigma_3(k, r(T))$ при удалении центральной (центральных вершин) вершины, т.е. когда эпицентром (эпицентрами) являются центральная (центральные вершины) вершина, $k=1$ ($k=2$), за время $T_{cr}=1$.* ◄

Лемма 11. *Всякое дерево $T=(V_T, E_T)$ будет разрушено по критерию $\sigma_3(k, 2(\varepsilon(v)-r(T)-1)+1)$ при удалении всех k вершин*

$v_i \in V_T$, $i = \overline{1,k}$, *с эксцентриситетами* $\varepsilon(v)$, *т.е. когда эпицентрами являются все вершины с эксцентриситетом* $\varepsilon(v)$, *за время* $T_{cr} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эксцентриситет любой из удаляемой вершины $v_i \in V_T$, $i = \overline{1,k}$, удовлетворяет неравенству $r(T) \le \varepsilon(v) \le d(T)$. Если $\varepsilon(v) = r(T)$, то доказательство Теоремы 12 сводится к доказательству Теоремы 11. Если же эксцентриситет $\varepsilon(v) = d(T)$, то, из дерева удаляются все периферийные вершины, что приводит к уменьшению диаметра. Диаметр, получившегося таким образом дерева $T'$, будет равен $d(T') = d(T) - 2$.

В общем случае следует рассмотреть два типа дерева – *одноцентровое* и *двуцентровое.*

Всякое дерево, центр которого состоит из одной вершины, будем называть *одноцентровым* (или *однокорневым*) и *двуцентровым* (или *двукорневым*), если центр дерева состоит из двух смежных вершин.

У всякого однокорневого дерева каждая смежная с центральной вершиной вершина $v \in V_T$ имеют эксцентриситет равный $\varepsilon(v) = r(T) + 1$. Вершины $u \in V_T$, расстояние от которых до центральной равно 2, имеют эксцентриситет, равный $\varepsilon(u) = r(T) + 1$ и т.д. Наконец, вершины $w \in V_T$, расстояние от которых до центральной равно $l$, имеют эксцентриситет равный $\varepsilon(u) = r(T) + l$. Так, расстояние между любой периферийной и центральной вершинами равно $d(T) - r(T)$.

Обозначим через $v' \in V_T$ центральную вершину дерева $T = (V_T, E_T)$, а через $T' = (V_{T'}, E_{T'})$ – ту компоненту, которой будет принадлежать вершина $v'$ после удаления из дерева $T = (V_T, E_T)$ всех вершин с эксцентриситетами $\varepsilon(v)$, $r(T) < \varepsilon(v) < d(T)$. Вершины $u' \in V_T$, смежные удаляемым $v_i \in V_T$ из дерева $T = (V_T, E_T)$, окажутся висячими для дерева

$T'$. Расстояние от этих вершин $u' \in V_{T'}$ до вершины $v' \in V_{T'}$ останется неизменным $\rho(u',v') = \varepsilon(v) - r(T) - 1$. Все остальные вершины дерева $T'$ находятся на таком же или меньшем расстоянии от вершины $v' \in V_{T'}$, поскольку в дереве $T = (V_T, E_T)$ они имели меньший эксцентриситет, чем удаленные вершины $v_i \in V_T$. По этой причине вершина $v' \in V_{T'}$ останется центральной и для дерева $T'$, причем его радиус будет равен $r(T') = \varepsilon(v) - r(T) - 1$. У всякого одноцентрового дерева радиус ровно в два раза больше диаметра, что справедливо и для дерева $T'$: $d(T') = 2r(T') = 2(\varepsilon(v) - r(T) - 1)$. Это удовлетворяет диаметральному критерию разрушения $\sigma_3(k, 2(\varepsilon(v) - r(T) - 1) + 1)$ одноценрового дерева, когда эпицентрами являются все $k$ вершин с эксцентриситетом $\varepsilon(v)$ (см. следствие 11.1).

В случае двукорневого дерева $T$, после удаления всех $k$ вершин $v_i \in V_T$, дерево $T'$ также будет иметь две смежных центральных вершины. Поэтому его диаметр будет отличаться от однокорневого на единицу – $d(T') = 2(\varepsilon(v) - r(T) - 1) + 1$. ◄

СЛЕДСТВИЕ 11.1. *Всякое одноцентровое дерево* $T = (V_T, E_T)$ *будет разрушено по критерию* $\sigma_3(k, 2(\varepsilon(v) - r(T) - 1))$ *при удалении всех* $k$ *вершин* $v_i \in V_T$, $i = \overline{1,k}$, *с эксцентриситетами* $\varepsilon(v)$, *т.е. когда эпицентрами являются все вершины с эксцентриситетом* $\varepsilon(v)$, *за время* $T_{cr} = 1$. ◄

## Заключение

В настоящей работе предложена теоретико-графовая модель разрушения сложных систем с ациклической структурой. Построенная простая модель не претендует на полноту описания процесса структурного разрушения систем, но позволяет выявить ряд важных топологических свойств и характеристик этого процесса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 04-01-00510) и РГНФ (проект № 05-03-03188).

## *Литература*


1. ЕМЕЛИЧЕВ В.А., МЕЛЬНИКОВ О.И., САРВАНОВ В.И., ТЫШКЕВИЧ Р.И. *Лекции по теории графов.* – М.: Наука, 1990.
2. ФОРД Л.Р., ФАЛКЕРСОН Д.Р. *Потоки в сетях.* – М.: Мир, 1966.