О ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ

Ашимов А.А., Сагадиев К.А., Боровский Ю.В., Искаков Н.А., Ашимов Ас.А.

(Институт проблем информатики и управления НАН Республики Казахстан, г. Алматы)

ashimov@ipic.kz

В работе предлагается теория параметрического регулирования развития рыночной экономики. Предлагаемая теория состоит из таких разделов, как формирование библиотеки математических моделей экономических систем; методы исследования грубости (структурной устойчивости) и контролирования (подавления) потери грубости математических моделей; методы разработки законов параметрического регулирования; методы нахождения точек бифуркации экстремалей одного класса задач вариационного исчисления и др. В работе представлены некоторые результаты по созданию рассматриваемой теории.

Ключевые слова: экономическая система, математическая модель, грубость (структурная устойчивость), параметрическое регулирование, задача вариационного исчисления, экстремаль, функционал, бифуркация.

I. Введение

Многие динамические системы [11], в том числе математические модели экономических систем стран [16, 19], после некоторых преобразований могут быть представлены системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

(1) $$\frac{dx}{dt} = f(x,u,l),\ x(t_0) = x_0 .$$

Здесь $x = (x^1, x^2, ..., x^n) \in X \subset R^n$ - вектор состояния системы; $u = (u^1, u^2, ..., u^l) \in W \subset R^l$ - вектор управляемых (регулируемых) параметров; W, X – компактные множества с непустыми внутренностями - $Int(W)$ и $Int(X)$ соответственно; $l = \left(l^1, l^2, ..., l^m\right) \in \Lambda \subset R^m$ - вектор неуправляемых параметров; Λ - открытое связное множество; отображения $f(x, u, l): X \times W \times \Lambda \to R^n$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ непрерывны в $X \times W \times \Lambda$; $[t_0, t_0 + T]$ - фиксированный промежуток (времени).

Как известно [20], решение (эволюция) рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений зависит как от вектора начальных значений $x_0 \in Int(X)$, так от значений векторов управляемых (u) и неуправляемых (l) параметров. Поэтому результат эволюции (развития) нелинейной динамической системы при заданном векторе начальных значений x_0 определяется значениями векторов как управляемых, так и неуправляемых параметров.

В последние годы ведутся активные исследования динамики изменения таких регулируемых параметров, при проведении бюджетно-налоговой и денежно-кредитной политики [10], как различные налоговые ставки, государственный расход, учетная ставка, норма резервирования, валютный курс и другие. Исследуется также влияние указанных параметров на эволюцию экономических процессов. Так, в [26] эконометрические методы применяются для моделирования динамических рядов и статистического прогнозирования налоговых доходов. В [8] эконометрические методы используются для анализа зависимостей между параметрами денежно-кредитной политики (ставка рефинансирования, норма резервирования) и показателями экономического развития (показателями инвестиционной активности в реальном секторе и др.). В [19] на основе предложенной авторами математической модели, после решения задачи параметрической идентификации, исследуется влияние доли государственных расходов во внутреннем валовом продукте и процента по государственным займам на средние реальные доходы трудящихся, средние государственные расходы в постоянных ценах и на средний внутренний валовой продукт.

В настоящее время, благодаря развитию теории динамических систем [1, 2, 13-15], параметрическое воздействие начало находить применение в регулировании экономических систем. Динамика этих экономических систем, по мнению многих экспертов, описывается нелинейными моделями [32], которые могут обладать хаотическим поведением. Так, в [27] параметрическое воздействие, определяемое методом Отто-Грегори-Йорке [33], было использовано для стабилизации неустойчивых решений в моделях неоклассической теории оптимального роста.

В ряде работ [4, 5, 21, 28, 29, 31] параметрические воздействия стали предлагаться для эффективного регулирования развития рыночной экономики в заданном диапазоне изменения основных эндогенных показателей экономической системы и подавления её выхода из заданного диапазона. Предлагаемые параметрические воздействия являются экстремалями соответствующих задач вариационного исчисления по выбору оптимальных законов параметрического регулирования в среде заданного конечного набора алгоритмов. В указанных задачах вариационного исчисления функционалы выражают некоторые (глобальные, промежуточные или тактические) цели экономического развития. Фазовые ограничения и ограничения в разрешенной форме представлены математическими моделями экономических систем из [19]. Математические модели работы [19] содержат также ряд коэффициентов, изменение каждого из которых в определенном интервале приводит к деформации (возмущению) рассмотренных задач вариационного исчисления.

В настоящее время широко исследуются параметрические возмущения задач вариационного исчисления. Так, в [12] параметрическое возмущение используется для получения достаточных условий экстремума путем построения соответствующих S-функций и использования принципа снятия ограничений. В [25] ставится вопрос об условиях устойчивости решений задач вариационного исчисления (проблема Улама). Исследования этой проблемы сводятся к нахождению условий регулярности, при которых у функционала возмущенной задачи есть точка минимума близкая к точке минимума функционала невозмущенной задачи. В [9] доказана теорема об условиях существования точки бифуркации для задачи вариационного исчисления, функционал который рассматривается на пространстве Соболева $\overset{0}{W}{}_p^m(\Omega)$ $(2 \le p < \infty)$ и зависит от скалярного параметра $l \in [0;1]$. Таким образом, можно отметить, что в известной литературе ранее отсутствовали условия существования решений задач вариационного исчисления по выбору оптимальных законов параметрического регулирования в среде заданного конечного набора алгоритмов. Отсутствовали, также, исследования влияния параметрических возмущений на решения указанных задач.

Существование решений задач вариационного исчисления по выбору оптимальных законов параметрического регулирования в среде заданного конечного набора алгоритмов исследуются в [6, 7, 30]. В этих работах также исследуется влияние параметрического возмущения (изменения неуправляемых параметров) на результаты решения рассматриваемых задач, т.е., в частности, исследуются бифуркации экстремалей указанных задач при параметрических возмущениях.

Предложенные подходы [4, 5, 21, 28, 29, 31] и полученные результаты исследования в [6, 7, 30] можно рассматривать в качестве соответствующих составляющих разрабатываемой авторами теории параметрического регулирования развития рыночной экономики.

2. Составляющие теории параметрического регулирования развития рыночной экономики

В целом теорию параметрического регулирования развития рыночной экономики в первой версии можно представить с помощью следующих ее составляющих.

1. Методы формирования набора (библиотеки) макроэкономических математических моделей. Эти методы ориентиро-

ваны на описание различных конкретных социально-экономических ситуаций с учетом условий экологической безопасности.

2. Методы оценки условий грубости (структурной устойчивости) математических моделей экономической системы страны из библиотеки без параметрического регулирования. При этом проверяются условия принадлежности рассматриваемых математических моделей к классу систем Морса – Смейла [23] или к Ω-грубым системам [17] или к системам равномерной грубости [18] или к классу *У*-систем [3].

3. Методы контролирования или подавления негрубости (структурной неустойчивости) математических моделей экономической системы. Выбор (синтез) алгоритмов контролирования или подавления структурной неустойчивости соответствующей математической модели экономической системы страны [21].

4. Методы выбора и синтеза законов параметрического регулирования механизмов рыночной экономики на базе математических моделей экономической системы страны [5, 28, 29, 31].

5. Методы оценки условий грубости (структурной устойчивости), математических моделей экономической системы страны из библиотеки с параметрическим регулированием. При этом проверяются условия принадлежности рассматриваемых математических моделей с параметрическим регулированием к классу систем Морса-Смейла или к Ω-грубым системам или к системам равномерной грубости или к классу *У*-систем.

6. Методы уточнения ограничений на параметрическое регулирование механизмов рыночной экономики в случае структурной неустойчивости математических моделей экономической системы страны с параметрическим регулированием. Уточнение ограничений на параметрическое регулирование механизмов рыночной экономики.

7. Методы исследования и исследование бифуркаций экстремалей задач вариационного исчисления по выбору оптимальных законов параметрического регулирования [6, 7, 31].

8. Эконометрический анализ, политэкономическая интерпретация и согласование с предпочтениями лиц, принимающих

решение, результатов аналитических исследований и вычислительных экспериментов.

9. Разработка информационной системы для исследования и имитационного моделирования механизмов рыночной экономики с параметрическим регулированием.

10. Разработка рекомендаций по выработке и осуществлению эффективной государственной экономической политики на базе теории параметрического регулирования механизмов рыночной экономики с учетом конкретных социально-экономических ситуаций.

Применение данной формирующейся теории параметрического регулирования механизмов рыночной экономики для выработки и осуществления эффективной государственной экономической политики представляется следующим образом.

1. Выбор, на базе соответствующей оценки экономического состояния страны в рамках фаз экономического цикла, направления (стратегии) экономического развития страны.

2. Выбор из библиотеки математических моделей экономической системы одной или нескольких математических моделей, отвечающих задачам экономического развития.

3. Калибровка (параметрическая идентификация и ретроспективный прогноз по текущим показателям эволюции экономической системы) и дополнительная верификация выбранной(ых) математической(их) модели(ей) эконометрическим анализом и политэкономической интерпретацией матрицы (матриц) чувствительности, т.е. оценка адекватности математической(их) модели(ей) поставленным задачам.

4. Оценка структурной устойчивости (грубости) математических моделей без параметрического регулирования с помощью соответствующих методов. Структурная устойчивость математической модели говорит об устойчивости самой экономической системы. В этом случае математическую модель можно использовать (после эконометрического анализа, политэкономической интерпретации результатов исследования грубости и согласования их с предпочтениями лиц, принимающих решения) для решения задачи выбора оптимальных законов

регулирования экономических параметров и прогнозирования макроэкономических показателей.

5. Если математическая модель структурно неустойчива, то необходимо выбрать алгоритмы и методы стабилизации экономической системы в соответствии с методами раздела 3 разрабатываемой теории. После соответствующего эконометрического анализа, политэкономической интерпретации и согласования их с предпочтениями лиц, принимающих решения, полученный результат по стабилизации экономической системы может быть принят для реализации.

6. Выбор оптимальных законов регулирования экономических параметров.

7. Оценка структурной устойчивости (грубости) математических моделей с выбранными законами параметрического регулирования в соответствии с методами раздела 5 разрабатываемой теории. Если математическая модель при выбранных законах параметрического регулирования структурно устойчива, то полученные результаты, после соответствующих эконометрического анализа, политэкономической интерпретации и согласования с предпочтениями лиц, принимающих решения, можно принять для практического применения. Если математическая модель при выбранных законах параметрического регулирования структурно неустойчива, то уточняется решение по выбору законов параметрического регулирования. Уточненные решения по выбору законов параметрического регулирования также подлежат рассмотрению по выше указанной схеме.

8. Исследование зависимости выбранных оптимальных законов параметрического регулирования от изменения неуправляемых параметров экономической системы. При этом возможна замена одних оптимальных законов параметрического регулирования на другие.

Данная укрупненная схема принятия решений по выработке и осуществлению эффективной государственной экономической политики через выбор оптимальных значений экономических параметров должна быть поддержана современными информационными технологиями исследования и имитационного моделирования.

В настоящее время выше предложенные разделы 1, 2, 3, 5, 6 теории параметрического регулирования разрабатываются в рамках современных подходов теории идентификации [22, 24] и теории динамических систем [29, 32].

В данной работе представлены некоторые результаты исследования условий существования решения одной задачи вариационного исчисления в рамках упомянутого выше раздела 7 разрабатываемой теории параметрического регулирования развития рыночной экономики.

3. Условия существования решения задачи вариационного исчисления по выбору оптимального набора законов параметрического регулирования

Постановка задачи вариационного исчисления по выбору оптимального набора законов параметрического регулирования на множестве сочетаний из p параметров по r в среде заданного конечного набора алгоритмов и утверждение о существовании решения соответствующей задачи вариационного исчисления в среде заданного конечного набора алгоритмов выглядит следующим образом.

Пусть $x_l(t)$ - решение указанной выше задачи (1) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ при постоянных значениях $u \in W$ и $l \in \Lambda$. Пусть $x_l(t) \subset Int(X)$. Решение задачи (1) для выбранного $u_* = (u_*^1, u_*^2, ..., u_*^l) \in W$ обозначим через $x_{*l}(t)$. Далее u_* фиксировано.

Обозначим через Ω замкнутое множество в пространстве непрерывных вектор - функций $C^{n+l}[t_0, t_0 + T]$, состоящее из всех непрерывных вектор-функций $(x(t), u(t))$ удовлетворяющих следующим ограничениям.

$$
\begin{gathered}
x \in X, u \in W, \left| x^j(t) - x_{*l}^j(t) \right| \le a x_{*l}^j(t), \\
t \in [t_0, t_0 + T], j = 1 \div n, a > 0.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Пусть $\{F^i(x): i=1\div p\}$ и $G(x)>0$ - конечный набор непрерывных для $x\in X$ вещественнозначных функций. Все функции $\dfrac{\partial F^i}{\partial x^j}$ также непрерывны в X. Возможность выбора оптимального набора законов параметрического регулирования на множестве сочетаний из p параметров по r и на промежутке времени $[t_0, t_0+T]$ исследуется в среде следующих алгоритмов (законов управления):

(3) $\left\{U_{ij}=k_{ij}F^i(x)+u_*^j,\ i=1\div p,\ j=1\div l\right\}$.

Здесь, $k_{ij}\geq 0$ - настраиваемые коэффициенты. Использование набора r ($1\leq r\leq l$, здесь и далее фиксировано) законов U_{ij} из (3) при фиксированных k_{ij} в системе (1) означает подстановку в правые части уравнений системы функций $\{u^{j_s}=U_{i_s j_s}\}$ для r различных значений индексов j_s ($1\leq s\leq r$, $1\leq j_s\leq l$, $1\leq i_s\leq p$). При этом остальные u^j, где j не входит в указанное множество значений j_s, считаются постоянными и равными значениям u_*^j.

Для решений системы (1) при использовании r законов управления вида $\{u^{j_s}=U_{i_s j_s}\}$ рассматривается следующий функционал (критерий):

(4) $K=\int\limits_{t_0}^{t_0+T}G(x_l(t))dt$.

Постановка задачи выбора набора законов параметрического регулирования на множестве сочетаний из p параметров по r в среде заданного конечного набора алгоритмов имеет следующий вид.

При фиксированном $l\in\Lambda$ найти набор из r законов

$\overline{U}=\{U_{i_s j_s},\ s=1\div r\}$

из набора алгоритмов (3), который обеспечивает верхнюю грань значений критерия (4):

(5) $K \to \sup_{\overline{U}}$.

при выполнении условий (1, 2) для заданного периода времени.

Используя теорему о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров и теорему о непрерывной зависимости определенного интеграла от параметра докажем факт существования решения задачи (1)-(5).

Теорема 1. *При использовании любого выбранного набора законов* $\overline{U} = \{U_{i_s j_s}, s = 1 \div r\}$*, где* $r \le l$*, из набора алгоритмов (3) при ограничениях (1) и (2) существует решение задачи нахождения верхней грани критерия K:*

(6) $K = \int_{t_0}^{t_0+T} G(x_l(t))dt \to \sup_{(k_{i_1 j_1}, k_{i_2 j_2}, \ldots, k_{i_r j_r})}$.

При этом если множество возможных значений коэффициентов $(k_{i_1 j_1}, k_{i_2 j_2}, \ldots, k_{i_r j_r})$ *законов рассматриваемой задачи ограничено, то указанная верхняя грань для выбранного набора из r законов достигается. Для конечного набора алгоритмов (3) задача (1)-(5) имеет решение.*

Доказательство. Сопоставление набору значений коэффициентов $(k_{i_1 j_1}, k_{i_2 j_2}, \ldots, k_{i_r j_r})$ из набора законов $\overline{U} = \{(U_{i_1 j_1}, k_{i_1 j_1}), (U_{i_2 j_2}, k_{i_2 j_2}), \ldots, (U_{i_r j_r}, k_{i_r j_r})\}$ соответствующих выходных функций и регулирующих параметрических воздействий $(x_l(t), u(t))$ системы (1) при ее регулировании с помощью этого набора законов задает непрерывное отображение H некоторого подмножества $R_+^l = [0, +\infty)^l$ в пространство $C^{n+l}[t_0, t_0 + T]$.

Полный прообраз $H^{-1}(\Omega)$ множества Ω при отображении H замкнут согласно теореме о замкнутости полного прообраза замкнутого множества при непрерывном отображении. Множество $H^{-1}(\Omega)$ не пусто, поскольку оно содержит начало координат R_+^l. (При нулевых значениях коэффициентов функции $\left(x(t) = x_{*l}(t), u(t) = u_*\right)$ очевидно удовлетворяют ограничениям (2)).

Сопоставление набору коэффициентов $\vec{k} \in H^{-1}(\Omega)$ набора законов критерия K (4) для решения системы (1) определяет непрерывную функцию

$\overline{K} : H^{-1}(\Omega) \to [0, \infty)$.

Следовательно, при выбранном наборе законов $\overline{U}$ задача (1)-(5) равносильна задаче определения на замкнутом множестве $H^{-1}(\Omega)$ верхней грани непрерывной ограниченной функции $y = \overline{K}(\vec{k})$. Эта функция является непрерывной в силу теоремы о непрерывной зависимости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров, ограниченности этого решения в силу включения $x \in X$ из (2) и непрерывной зависимости определенного интеграла от параметра. Поэтому задача (1)-(5) для фиксированного набора законов $\overline{U}$ всегда имеет решение, включающее конечное оптимальные значения критерия K^*. Для ограниченного множества $H^{-1}(\Omega)$ это значение критерия достигается при некоторых значениях коэффициента $\vec{k}$ (теорема о достижении наибольшего значения непрерывной функции на компакте). Для неограниченного множества $H^{-1}(\Omega)$, может найтись последовательность значений коэффициентов $\vec{k}$ из $H^{-1}(\Omega)$, соответствующие значения критерия K для элементов которой стремятся к K^*. Таким образом, доказан факт существования решения задачи вариационного исчисления для случая одного закона параметрического регулирования. Из конечности набора возможных законов регулирования (3) следует справедливость утверждения – факт существования решения задачи (1)-(5). Теорема доказана.

4. Достаточные условия существования точки бифуркации экстремалей одной задачи вариационного исчисления

Ниже дается определение точки бифуркации экстремалей задачи вариационного исчисления по выбору оптимальных законов параметрического регулирования в среде заданного конечного набора алгоритмов состоит в следующем.

Определение. *Значение $l \in \Lambda^*$ называется точкой бифуркации экстремали задачи (1)-(5), если при $l = l^*$ существуют как минимум два различных оптимальных набора из r законов из (3), отличающихся хотя бы на один закон U_{ij}, а в каждой окрестности точки l^* найдется такое значение $l \in \Lambda$, для которого задача (1)-(5) имеет единственное решение.*

Следующая теорема дает достаточные условия существования точки бифуркации экстремалей рассматриваемой вариационной задачи по выбору закона параметрического регулирования в заданной конечной среде алгоритмов.

Теорема 2 *(о существовании точки бифуркации). Пусть при значениях параметра l_1 и l_2, $\left(l_1 \neq l_2;\, l_1, l_2 \in \Lambda\right)$ задача (1)-(5) имеет соответствующие единственные решения для двух различных оптимальных наборов из r законов из (3), отличающихся хотя бы на один закон U_{ij}. Тогда имеется хотя бы одна точка бифуркации $l^* \in \Lambda$.*

Доказательство. Соединим точки l_1 и l_2 гладкой кривой *S*, лежащей в области Λ: $S = \{\, l(s), s \in [0,1]\}$, $l(0) = l_1$, $l(1) = l_2$. Обозначим оптимальное значение критерия K задачи (1)-(5) для выбранного набора законов регулирования $\overline{U} = \{(U_{i_1 j_1}, k_{i_1 j_1}), (U_{i_2 j_2}, k_{i_2 j_2}), \ldots, (U_{i_r j_r}, k_{i_r j_r})\}$ и значения $l(s)$ через $K_{\overline{U}}(s)$. Функция $y = K_{\overline{U}}(s)$ является непрерывной на отрезке [0;1] согласно теореме о непрерывной зависимости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, непрерывной зависимости определенного интеграла от параметра и, в целом, в силу выше доказанной теоремы 1. Функция $y=\max_{\overline{U}} K_{\overline{U}}(s)=K^*(s)$, дающая решение рассматриваемой задачи (1)-(5), следовательно, также является непрерывной на отрезке [0;1]. Обозначим через $\Delta(\overline{U})\subset[0;1]$ множество всех тех значений параметра *s*, для которых $K_{\overline{U}}(s)=K^*(s)$. Это множество замкнуто, как полный прообраз замкнутого множества {0} для непрерывной функции $y=K_{\overline{U}}(s)-K^*(s)$. Множество $\Delta(\overline{U})$ может быть и пустым. В результате промежуток [0;1] представляется в виде следующего конечного объединения, состоящего, как минимум, из двух замкнутых множеств (см. условия теоремы)

$$[0;1]=\bigcup_{\overline{U}}\Delta(\overline{U}).$$

Следовательно, поскольку по условиям теоремы, $0\in\Delta(\overline{U})$ для некоторого набора законов $\overline{U}$, соответствующего l_1, и $1\notin\Delta(\overline{U})$, то имеется граничная точка s^* множества $\Delta(\overline{U})$, находящаяся в промежутке (0;1) (будем считать, что s^* - нижняя грань таких граничных точек для множества $\Delta(\overline{U})$). Точка s^* также является граничной точкой некоторого другого множества $\Delta(\overline{U}_1)$ и принадлежит ему. Для этого значения s^* точка $l\left(s^*\right)$ является точкой бифуркации, поскольку при $l\left(s^*\right)$ имеется как минимум два набора оптимальных законов, а при $0\le s<s^*$ один оптимальный закон - $\overline{U}$. Теорема доказана.

Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть при значении* $l=l_1$ *регулирование с помощью некоторого набора* r *законов из* (3) *дает решение задачи* (1)-(5), *а при* $l=l_2$, $\left(l_1\ne l_2;\, l_1, l_2\in\Lambda\right)$ *регулирование* *с помощью этого набора законов не дает решение задачи* **(1)-(5)**. *Тогда имеется хотя бы одна точка бифуркации* $l^* \in \Lambda$.

Рассмотрим пример применения полученных результатов для нахождения точек бифуркации одной задачи вариационного исчисления.

5. Пример нахождения точек бифуркации экстремалей

Возможность параметрического регулирования механизмов рыночной экономики с учетом влияния международной торговли рассмотрим на базе математической модели, предложенной в [19] для исследования влияния внешней торговли. Эта модель после соответствующего преобразования имеет вид следующей системы дифференциальных и алгебраических уравнений.

(7) $$\frac{dM_i}{dt} = \frac{\Phi_i^I}{p_i b_i} - m_i M_i;$$

(8) $$\frac{dQ_i}{dt} = M_i f_i - \frac{\Phi_i}{p_i};$$

(9) $$\frac{dL_i^G}{dt} = r_{Gi} L_i^G + \Phi_i^G - n_{pi}\Phi_i - n_{Li} s_i R_i^L - n_{Oi}(d_i^P + d_i^B);$$

(10) $$\frac{dp_i}{dt} = -a_i \frac{Q_i}{M_i} p_i;$$

(11) $$\frac{ds_i}{dt} = \frac{s_i}{\Delta_i} \max\left\{0, \frac{R_i^d - R_i^S}{R_i^S}\right\}, R_i^L = \min\{R_i^d, R_i^S\};$$

(12) $$L_i^P = \frac{1 - x_i}{x_i} L_i^G;$$

(13) $$d_i^P = \frac{1 - x_i}{x_i} b_i r_{2i} L_i^G;$$

(14) $$d_i^B = b_i r_{2i} L_i^G;$$

(15) $$x_i = \frac{n_i}{1-d_i}\left(1-\left(\frac{s_i n_i}{p_i}\right)^{\frac{1-d_i}{d_i}}\right);$$

(16) $$R_i^d = M_i x_i\,;$$

(17) $$f_i = 1-\left(1-\frac{1-d_i}{n_i}x_i\right)^{\frac{1}{1-d_i}}\;;$$

(18) $$\Phi_i^O = h_{0i}\, p_i M_i f_i\,;$$

(19) $$\Phi_i^G = p_i\, p_i M_i f_i\,;$$

(20) $$\Phi_i^L = (1-n_{Li})s_i R_i^d\,;$$

(21) $$\begin{aligned}\Phi_i^I &= \frac{1}{1+n_{pi}}\{\frac{k_{qi}M_i f_i}{x_i} - (1-n_{pi})\Phi_i^G + \\ &+ n_{0i}(d_i^B + d_i^P) + n_{pi}\Phi_i^O + \\ &+ \left[n_{Li} + (1-n_{Li})n_{pi}\right]s_i R_i^L + n_{pi}(\Phi_{ji} - q_i\Phi_{ij}) + m_i L_{pi} - r_{Gi}L_i^P\};\end{aligned}$$

(22) $$R_i^S = P_{0i}^A \exp(l_{pi}t)\frac{1}{1+n_i w_i};$$
$$w_i = \frac{\Phi_i^L}{(1+C_i^L q_i \frac{p_j}{p_i})P_{0i}(l_{pi}t)}; \qquad j = 3-i;$$

(23) $$\Phi_{12} = \frac{C_1^L \frac{p_2}{p_1}}{1+C_1^L q\frac{p_2}{p_1}}\Phi_1^L + \frac{C_1^O \frac{p_2}{p_1}}{1+C_1^O q\frac{p_2}{p_1}}\Phi_1^O\;;$$

(24) $$\Phi_{21} = \frac{C_2^L \frac{p_1}{p_2}}{1+C_2^L \frac{1}{q}\frac{p_1}{p_2}}\Phi_2^L + \frac{C_2^O \frac{p_1}{p_2}}{1+C_2^O \frac{1}{q}\frac{p_1}{p_2}}\Phi_2^O\;;$$

(25) $$\Phi_1 = \Phi_1^I + \Phi_1^L + \Phi_1^O + \Phi_1^G + \Phi_{21} - q\Phi_{12}\;;$$

(26) $\Phi_2 = \Phi_2^I + \Phi_2^L + \Phi_2^O + \Phi_2^G + \Phi_{12} - \frac{1}{q}\Phi_{21}$.

Здесь: i = 1, 2 – номер государства; t – время; M_i – суммарная производственная мощность; Q_i – общий запас товаров на рынке; L_i^G – общий объем государственного долга; p_i – уровень цен; s_i – ставка заработной платы; L_i^P – объем задолженности производства; d_i^P и d_i^B – соответственно предпринимательские и банковские дивиденды; R_i^d и R_i^S – соответственно спрос и предложение рабочей силы; d_i, n_i - параметры функции f_i; x_i – решение уравнения $f_i'(x_i) = s_i/p_i$; Φ_i^L и Φ_i^O – соответственно потребительские расходы трудящихся и собственников; Φ_i^I – поток инвестиций; Φ_i^G – потребительские расходы государства; Φ_{ij} – расходы потребителей i-той страны на импортный продукт из j-той страны; q – обменный курс валюты первой страны по отношению к валюте второй страны, $q_1 = q, q_2 = 1/q$; $C_i^L(C_i^O)$ - количество единиц импортного продукта, потребляемого трудящимся (собственниками) i-той страны на единицу отечественного продукта; x_i - норма резервирования; b_i – отношение средней нормы прибыли от коммерческой деятельности к норме прибыли рантье; r_{2i} – ставка процента по депозитам; r_{1i} – ставка процента за кредит; r_{Gi} – ставка процента по облигациям государственных займов; h_{Oi} – коэффициент склонности собственников к потреблению; p_i – доля потребительских расходов государства от внутреннего валового продукта; n_{Pi}, n_{Oi}, n_{Li} – соответственно ставки налогов на поток платежей, дивиденды и доход трудящихся; b_i – норма фондоёмкости единицы мощности; m_i – коэффициент выбытия единицы мощности вследствие деградации; m_i^* - норма амортизации; a_i – постоянная времени; Δ_i – постоянная времени, задающая характерный временной масштаб процесса релаксации заработной платы; P_{0i}, P_{0i}^{A} – соответственно начальные значения численности трудящихся и общей численности трудоспособных; w_i - уровень материального потребления на душу в группе трудящихся; $l_P > 0$ – заданный темп демографического роста; k_{qi} – доля валового внутреннего продукта страны резервируемая в золоте.

Возможность выбора оптимального набора законов вида (3) параметрического регулирования исследовалась [21]: на уровне одного из двух параметров $x_i\ (b=1), p_i\ (b=2)$; на промежутке времени $[t_0, t_0+T]$ и в среде следующих алгоритмов.

$$1)\ U^{i}_{1,b} = k^{i}_{1,b}\ \frac{\Delta M_i(t)}{M_i(t_0)} + const^{i}_{b};$$

$$2)\ U^{i}_{2,b} = -k^{i}_{2,b}\ \frac{\Delta M_i(t)}{M_i(t_0)} + const^{i}_{b};$$

(27)

$$3)\ U^{i}_{3,b} = k^{i}_{3,b}\ \frac{\Delta p_i(t)}{p_i(t_0)} + const^{i}_{b};$$

$$4)\ U^{i}_{4,b} = -k^{i}_{4,b}\ \frac{\Delta p_i(t)}{p_i(t_0)} + const^{i}_{b}.$$

Здесь $U^{i}_{a,b}$ – a -ый закон регулирования b -го параметра *i*-го государства $a = 1 \div 4,\ b = 1 \div 2$. Случай $b = 1$ соответствует параметру $x_i,\ b = 2 - p_i$; $\Delta M_i(t) = M_{a,b,i}(t) - M_i(t_0)$, $\Delta p_i(t) = p_{a,b,i}(t) - p_i(t_0)$, t_0 – время начала регулирования, $t \in [t_0, t_0+T]$. Здесь $M_{a,b,i}(t)$, $p_{a,b,i}(t)$ – значения производственной мощности и уровня цен *i*–го государства соответственно при $U^{i}_{a,b}$ -ом законе регулирования. $k^{i}_{a,b}$ – настраиваемый коэффициент соответствующего закона ($k^{i}_{a,b} \geq 0_{i}$); $const^{i}_{b}$ – постоянная, равная оценке значений b -го параметра по результатам параметрической идентификации.

Задача выбора оптимального закона параметрического регулирования для экономической системы i-той страны на уровне одного из экономических параметров (x_i, p_i, q) ставилась в следующем виде. Найти на основе математической модели (7–26) оптимальный закон параметрического регулирования в среде набора алгоритмов (27), т.е. найти оптимальный закон (и его коэффициент $k^i_{a,b}$) из множества $\{U^i_{a,b}\}$, который обеспечил бы максимум критерия

(28) $K_i = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} Y_i(t)dt$,

где $Y_i = M_i f_i$ - валовой внутренний продукт i-го государства. В вычислительных экспериментах исследовалось влияние параметрического регулирования первого государства (i = 1).

Замкнутое множество $\Omega \subset C^7[t_0, t_0 + T]$ в пространстве непрерывных вектор - функций выходных переменных системы (7-26) и регулирующих параметрических воздействий определяется следующими соотношениями

$$\left| p^1_{a,b}(t) - p^{1**}(t) \right| \le 0.09 p^{1**}(t),$$

(29) $\left(M_i(t), Q_i(t), L_i^G(t), p_i(t), s_i(t)\right) \in X$,

$$0 \le u_b \le a_b,\ a = 1 \div 4,\ b = 1 \div 2,\ i = 1 \div 2,\ t \in [t_0, t_0 + T].$$

Здесь a_b - наибольшее возможное значение α-го параметра, $p^i_{a,b}(t)$ – значения уровня цен при $U^i_{a,b}$ -ом законе регулирования; $p^{i**}(t)$ - модельные (расчетные) значения уровня цен i-го государства без параметрического регулирования X - компактное множество допустимых значений указанных параметров.

В данной задаче вариационного исчисления рассматривалась ее зависимость от двумерного коэффициента $l = (r_{2,1}, q)$ математической модели, возможные значения которого принадлежат некоторой области (прямоугольнику) Λ на плоскости.

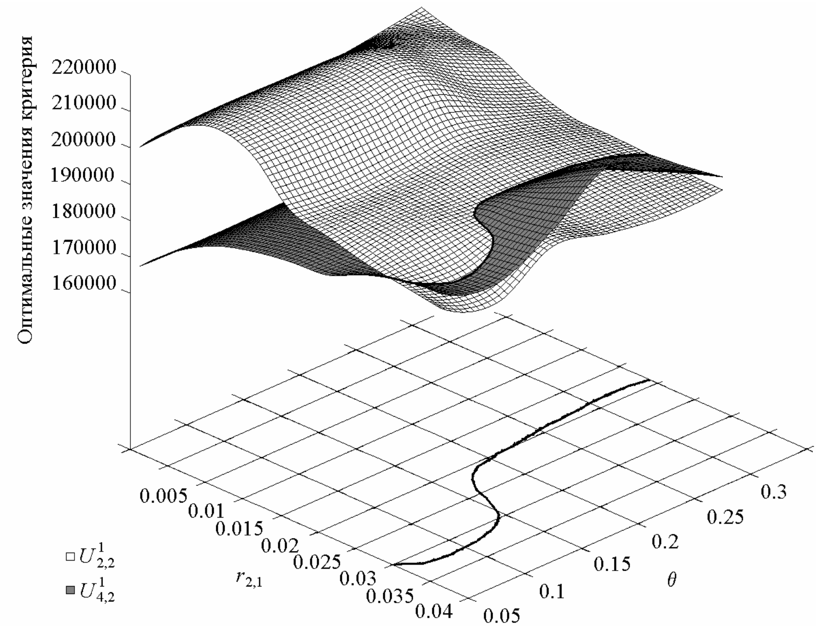

Рис. 1. Графики зависимостей оптимальных значений критерия от параметров ставки процента по депозитам $r_{2,1}$ и обменного курса валюты θ

В результате вычислительного эксперимента были получены графики зависимостей оптимального значения критерия K от значений параметров $(r_{2,1}, q)$ для каждого из восьми возможных законов $U^1_{a,b}, a = 1 \div 4, b = 1 \div 2$. На рис. 1 представлены указанные графики для двух законов $U^1_{2,2}$ и $U^1_{4,2}$, дающих наибольшее значение критерия в области Λ, линия пересечения соответствующих поверхностей и проекция этой линии пересечения на плоскость значений l, состоящая из точек бифуркации этого двумерного параметра. Эта проекция делит прямоугольник Λ на две части, в одной из которых оптимальным является закон управления $U^1_{2,2} = -k^1_{2,2} \dfrac{\Delta M_1(t)}{M_1(t_0)} + const^1_2$, а в другой –

$U_{4,2}^{1} = -k_{4,2}^{1} \dfrac{\Delta p_1(t)}{p_1(t_0)} + const_2^1$, на самой проекции линии оба указанных закона являются оптимальными.

Заключение

В работе предлагается одна из возможных теорий параметрического регулирования развития рыночной экономики, состоящая из методов и результатов: формирования набора (библиотеки) макроэкономических математических моделей; оценки условий грубости (структурной устойчивости) математических моделей экономической системы страны; контролирования или подавления негрубости (структурной неустойчивости) математических моделей экономической системы; выбора и синтеза законов параметрического регулирования механизмов рыночной экономики; уточнения ограничений на параметрическое регулирование механизмов рыночной экономики; исследования бифуркаций экстремалей задач вариационного исчисления по выбору оптимальных законов параметрического регулирования; эконометрического анализа, политэкономической интерпретация и согласования с предпочтениями лиц (принимающих решение) результатов аналитических исследований и вычислительных экспериментов; разработки информационной системы для исследования, имитационного моделирования механизмов рыночной экономики с параметрическим регулированием и разработки рекомендаций по выработке, осуществлению эффективной государственной экономической политики с учетом конкретных социально-экономических ситуаций.

Предложен подход к выбору законов параметрического регулирования развития рыночной экономики в виде постановки и решения задач вариационного исчисления по отысканию параметрических воздействий в среде заданного конечного набора алгоритмов.

Доказано утверждение о существовании решения задачи вариационного исчисления по выбору оптимального набора законов параметрического регулирования в среде заданного конечного набора алгоритмов.

Дано определение точки бифуркации экстремалей задачи вариационного исчисления по выбору оптимальных законов параметрического регулирования в среде заданного конечного набора алгоритмов.

Доказана теорема о достаточных условиях существования точки бифуркации экстремалей рассматриваемой задачи вариационного исчисления.

Приведен пример нахождения множества бифуркационных точек одной задачи вариационного исчисления по выбору оптимального закона параметрического регулирования механизмов рыночной экономики.

Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Управление хаосом: методы и приложения* // Автоматика и телемеханика. - 2003. №5. С. 3 - 45.
2. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Управление хаосом: методы и приложения* // Автоматика и телемеханика. - 2004. №4. С. 3 - 34.
3. АНОСОВ Д.В., *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны* / Труды МИАН СССР. Т. 90. М.: Наука, 1967. 210 с.
4. АШИМОВ А.А., БОРОВСКИЙ Ю.В., АШИМОВ Ас.А. *О параметрическом регулировании равновесной траектории одной эволюции рыночной экономики* / Материалы 2 Международной научно-практической конференции: «Состояние, проблемы и перспективы информатизаций в РК». Ч.1. Усть-Каменогорск, 2005. С. 145 - 149.
5. АШИМОВ А.А., БОРОВСКИЙ Ю.В., ВОЛОБУЕВА О.П., АШИМОВ Ас.А. *О выборе эффективных законов параметрического регулирования механизмов рыночной экономики* // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 105 - 112.
6. АШИМОВ А.А., САГАДИЕВ К.А., БОРОВСКИЙ Ю.В., АШИМОВ Ас.А. *Исследование бифуркаций экстремалей*

вариационной задачи по выбору оптимального набора законов параметрического регулирования в заданной среде конечного множества алгоритмов / Тезисы докладов IX Межд. семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», 31 мая – 2 июня, М.: ИПУ РАН, 2006. С. 32 - 33.

7. АШИМОВ А.А., САГАДИЕВ К.А., БОРОВСКИЙ Ю.В., АШИМОВ Ас.А. *О бифуркации экстремалей вариационной задачи по выбору оптимальных законов параметрического регулирования в заданной среде алгоритмов*. / Тезисы докладов третьей Международной конференции по проблемам управления, 20 - 22 июня 2006. М.: ИПУ РАН, 2006. Т. 1. С. 49.
8. БЕЛЕНЬКАЯ О.И. *Анализ влияния инструментов кредитно-денежной политики банка России на параметры реальных инвестиций*. [Электронный ресурс]: режим доступа www.optim.ru/fin/20012/rbelenkaya/asp.
9. БОБЫЛЕВ Н.А., ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., КОРОВИН С.К. *Геометрические методы в вариационных задачах*. М.: Магистр, 1998. – 658 с.
10. *Государственное регулирование рыночной экономики*. Под редакцией Столярова И.И. Москва: Дело, 2001. – 280 с.
11. ГУКЕНХЕЙМЕР ДЖ., ХОЛМС Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 560 с.
12. ИОФФЕ А.Д., ТИХОМИРОВ В.М. *Теория экстремальных задач*. М.: Наука, 1974. – 480 с.
13. КАТОК А.Б., ХАССЕЛБЛАТ Б., *Введение в современную теорию динамических систем*. М.: Факториал, 1999. - 768 с.
14. ЛОСКУТОВ А.Ю. *Хаос и управление динамическими системами*. / Нелинейная динамика и управление. Вып. 1. – М., 2001. С. 163 - 216.
15. МАГНИЦКИЙ Н.А., СИДОРОВ С.В. *Новые методы хаотической динамики*. М.: Едиториал УРСС, 2004. - 320 с.
16. МАТРОСОВ В.М., ХРУСТАЛЕВ М.М., АРНАУТОВ О.В., КРОТОВ В.Ф. *О высокоагрегированной модели развития*

России. / Analysis of development instability on the base of mathematical modeling. The Proc. of Second International Workshop, 14 - 17 December 1992. Moscow. С. 182 - 243.

17. ОСИПОВ А.В., Ω-*устойчивость уравнения Левинсона* / Вестник ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. №7. Вып. 2. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1976. С. 156 – 157.
18. ОСИПОВ Ю.С., *Структурная устойчивость некомпактных потоков Аносова и гиперболические движения в задаче Кеплера*. / Доклады АН СССР. Т. 230. №4. С. 777 - 780.
19. ПЕТРОВ А.А., ПОСПЕЛОВ И.Г., ШАНАНИН А.А. *Опыт математического моделирования экономики*. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.
20. ПОНТРЯГИН А.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1970. – 332 с.
21. ПОПКОВ Ю.С., АШИМОВ, А.А. БОРОВСКИЙ Ю.В., ДУБОВСКИЙ С.В. *Система параметрического регулирование механизмов рыночной экономики с изменяющимися целями* / Динамика неоднородных систем. Труды Института системного анализа РАН. Вып. № 9. М.: URSS, 2005. С. 156 - 167.
22. САМАРСКИЙ А.А., МИХАЙЛОВ О.П. *Математическое моделирование*. М.: Физматлит, 2002. – 316 с.
23. СМЕЙЛ С., *Неравенства Морса для динамических систем* / Математика: Период. сб. пер. иностр. ст. Т. 11. № 4. М., 1967. С. 79 – 87.
24. *Справочник по теории автоматического управления*. Под ред. Красовского А.А. М.: Наука, 1987. – 712 с.
25. УЛАМ С. *Нерешенные математические задачи*. М.: Наука, 1964. - 250 с.
26. ЧЕРНИК Д.Г., МОРОЗОВ В.П. и др. *Введение в экономико-математические модели налогообложения*. М.: Финансы и статистика, 2000. – 256 с.
27. ЯНОВСКИЙ Л.П. *Контролирование хаоса в моделях экономического роста* // Экономика и математические методы. 2002. т. 38. №1. С. 16 - 23.
28. ASHIMOV A., BOROVSKIY Yu., ASHIMOV As. *Parametrical Regulation of Market Economy Mechanisms* / Proc. of 18th

International Conf. on Systems Engineering ICSEng 2005. 16 - 18 August, 2005. Las Vegas, Nevada. P. 189 - 193.

29. ASHIMOV A., BOROVSKIY Yu., ASHIMOV As. *Parametrical Regulation Methods of the Market Economy Mechanisms* // Systems Science. Vol. 35. 2005. No. 1. P. 89 - 103.
30. ASHIMOV A.A., SAGADIEV K.A., BOROVSKIY Yu.V., ASHIMOV As.A. *On Bifurcation of Extremals of one Class of Variational Calculus Tasks at the Choice of the Optimum Law of a Dynamic Systems Parametric Regulation* // Proc. of Eighteenth International Conf. on Systems Engineering. Coventry University 5 - 7 September, 2006. P. 15 - 19.
31. KULEKEEV Hz., ASHIMOV A., BOROVSKIY Yu., VOLOBUEVA O. *Methods of the parametrical regulation of market economy mechanisms* / Proc. of the 15th international conf. on systems science. 7 - 10 September 2004. Vol. 3. Wroclaw: OWPW. P. 439 - 446.
32. LORENZ H.W. *Nonlinear Dynamical Equation and Chaotic Economy*. Berlin: Springer, 1997.
33. OTTO E., GREGORY C., YORKE J. *Controlling chaos* // Phis. Rew. Lett. 1990. Vol. 64(11). P. 1196 - 1199.