МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.В.Крянев, В.В.Матохин, С.Г.Климанов

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

РЕСУРСОВ В ЭКОНОМИКЕ

Препринт 010-98

Рекомендован к изданию
редсоветом института

Москва 1998

УДК 519.8

Крянев А.В., Матохин В.В, Климанов С.Г. **Статистические функции распределения ресурсов в экономике.** М.: Препринт/МИФИ, 010-98 1998.-15 с.

Представлен вывод статистических функций распределения ресурс из функции управления, используемой для интерполяции диаграм Лоренца. Показано, что плавное изменение степени нелинейнос распределения ресурсов приводит к принципиальным различиям статистических функциях, обосновывая особое место распределени соответствующего окружности на плоскости Лоренца. Результат представленные в препринте, используются в учебном процес экономико-аналитического института МИФИ.

ISBN 5-7262-0102-7

1. Введение.

> “Нахождение статистического распределения для любой подсистемы и является основной задачей статистики”
> Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц

Успех изучения и прогнозирования экономической жизни общества во многом связан с умением рассчитать средние значения $\bar{f}$ различных функций, зависящих от конкретных действий людей по распределению доступных им ресурсов. Но изначально ясно, что реализация простой по сути процедуры

$$\bar{f} = \frac{\sum_{n=1}^{N} f(G_n)}{N}, \qquad (1)$$

(где G_n - экономическая величина, выполняющая роль аргумента и N - число суммируемых значений) сталкивается с принципиальными трудностями по единовременному сбору значительного объема экономической информации. Поставленная задача в методическом смысле подобна задаче определения термодинамических параметров газа (температуры, давления и т.п.) в отсутствии точных данных о движении каждой из частиц. Поэтому представляется целесообразным воспользоваться накопленным опытом и заменить суммирование в формуле (1) интегрированием произведения функции f и статистической функции распределения ρ(G), описывающей состояние ансамбля в виде вероятностного распределения количества частиц в любом интервале значений аргумента (G,G+dG)

$$\bar{f} = \int f(G)\rho(G)dG. \qquad (2)$$

Очевидно, что методическая привлекательност использования подобной процедуры в микроэкономи может быть в полной мере реализована при корректно выборе экономических "атомов" - "самых просты исходных, далее неразделимых в своих действия экономических единиц"[1]. В этой связи обратим внимани на табличное представлени (рис.1) распределения на позиций ресурса объемом S Опуская детальное обосновани наших действий, выберем качестве "атома" клетку колонки "Номенклатура". Тог роль аргумента, аналогично импульсу n-ой частицы в газ может быть приписана величи распределенного ресурса G Таким образом, задача определении статистическо функции распределения ρ(G) микроэкономике сводится определению количества клеток "Номенклатуры" (dn) интервале значений ресурса (G, G+dG) из колонк "Структура".

Рис.1 Схематичное представление процесса распределения ресурсов

На настоящее время уже известно более деся представлений формулировок статистических функц распределения, связанных с обществом вообще и экономикой в частности [2,3,4]. Многообраз представлений на фоне различной степе общепризнанности каждой из них стимулируют попыт определить вариант, в определенном смысле наилучший д анализа микроэкономического "газа". Сразу оговоримся, чт принимая во внимание изменения во времени исследуемо объекта, речь не идет о попытке свести экономику к идеализированному застывшему состоянию. Речь может идти только о попытке найти такое статистическое распределение, к которому общество постоянно стремится, но никогда в нем продолжительно не находится [4]. В каком-то смысле ситуация подобна маятнику, стремящемуся в процессе колебаний к точке покоя.

2. Диаграммы Лоренца.

Упомянутое многообразие математических представлений статистических распределений заставляет изначально отказаться от еще одной прямой интерполяции исходных данных и предпринять попытку вывести функцию распределения из более общих принципов. Иными словами, исходные данные интегрируются сначала в систему, позволяя уменьшить влияние составных частей, далее выделяется основная компонента, а затем с помощью дифференциального исчисления находится искомая функция распределения. Конечно, такой способ вносит дополнительную погрешность, особенно на этапе аппроксимации. Но с другой стороны, использование предварительного интегрирования исходных данных в систему позволяет проводить анализ распределений как единого статистического ансамбля и предоставляет, как видно будет из дальнейшего, дополнительные возможности по исследованию экономических решений.

В связи с вышеизложенным представим исходные данные о распределении ресурса $\{G_n\}$ в виде диаграмм Лоренца [5,6,7]. Для этого предварительно проведем ранжирование исходного исследуемого ряда $G_1 \le G_2 \le \ldots \le G$ Затем рассчитаем накопленные суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} G_k \qquad ($$

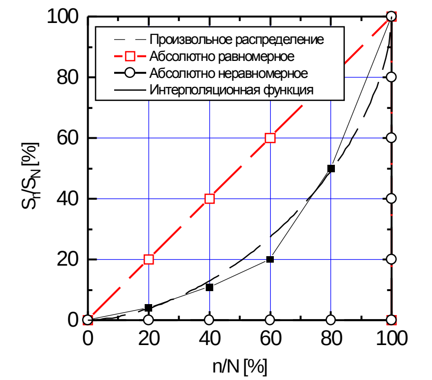

Рис.2. Представление решений о распределении ресурса в виде диаграмм Лоренца

и представим полученны результаты в виде графи на плоскости с осями x=n/ и y= S_n/S_N (сплошна ломаная линия на рис.2).

Отметим, что кусочн линейный характе диаграммы Лоренца н позволяет примененить н всем промежутке x∈(0, аналитическо дифференцировани необходимое нам для вывода искомой функци распределения. Поэтому необходимо аппроксимирова реальную диаграмму соответствующей аналитическо кривой (пунктирная линия на рис.2).

3. Функция управления ресурсами

При использовании теории интерполяции для решени прикладных задач хорошо известен тот факт, что наилучши результаты получаются в случае, если интерполяционн функции органично связаны с сутью самого процесса. В это связи представляется целесообразным учесть два аспект экспериментальный и теоретический.

В качестве первого аргумента в пользу выбора определенного семейства интерполяционных кривых приведем диаграммы Лоренца (рис.3), построенные для шести ежегодных (1988 -1993 г.г.) конкурсных распределений средств S_N по N проектам государственной научно-технической программы "Высокотемпературная сверхпроводимость".

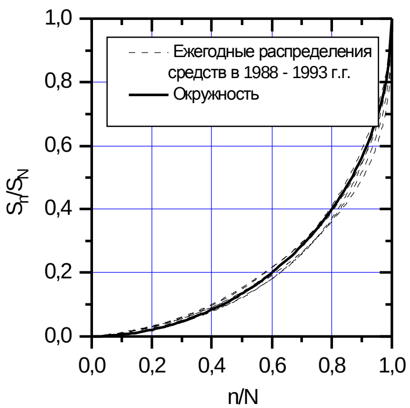

Рис.3 Диаграммы Лоренца для ежегодных распределений средств между проектами

Удивительная стабильность диаграмм Лоренца при значительных изменениях в программе (см.табл.1) позволяет определить в качестве

Таблица 1

Год	N	S_N (млн.руб.)
1988	273	143.1
1989	362	137.6
1990	432	136.9
1991	553	109.4
1992	345	411.2
1993	353	930

одной из возможных интерполяционных функций окружность (сплошная линия на рис.3):

$$\left(1-\frac{S_n}{S_N}\right)^2+\left(\frac{n}{N}\right)^2=1. \tag{4}$$

В качестве еще одного аргумента в пользу использования кривых типа (4) для аппроксимации диаграмм Лоренца можно сослаться на вид производственной функции с постоянной эластичночтью замещения (ПЭЗ) [10].

$$V=\left(A*K^{-\alpha}+B*L^{-\alpha}\right)^{-1/\alpha} \tag{5}$$

где V - выпуск, K и L - затраты капитала и труд соотвественно, A и B - коэффициенты.

Действительно, переписав выражению (5) в виде

$$\left(A^{1/\alpha}\frac{V}{K}\right)^{\alpha}+\left(B^{1/\alpha}\frac{V}{L}\right)^{\alpha}=1, \quad (\text{6}$$

можно отметить его подобие формуле (4) при $\alpha=2$.

Обобщая (4) и (6), получим семейство равенств

$$\left(1-\frac{S_n}{S_N}\right)^{\alpha}+\left(\frac{n}{N}\right)^{\alpha}=1. \quad (\text{7}$$

Вообще говоря, при построении диаграмм Лоренца н оговаривается наличие функциональной связи межд величинами $y=S_n/S_N$ и $x=n/N$. Но принимая во вниман взаимозависимость колонок "Номенклатура" и "Структура как составных частей задачи целенаправленно распределения ресурсов, введем понятие функци управления ресурсами $y(x,\alpha)=S_n/S_N=f(n/N)$ и перепише выражение (7) в виде

$$\left[1-y(x,\alpha)\right]^{\alpha}+x^{\alpha}=1. \quad (\text{8}$$

Очевидно, что параметр $1\le\alpha<\infty$ определяет степен нелинейности распределения ресурса и в данном смысл является эквивалентом коэффициента Джини.

$$K_G=1-2\int_0^1 y(x,\alpha)dx,\ 0\le K_G\le 1 \quad (\text{9}$$

Причем $\alpha=1$ соответствует абсолютно равномерном распределению (биссектриса квадрата на рис.2), а при $\alpha\to$ распределелние стремится к абсолютно неравномерном (скачок графика в точке x=1 на рис.2).

4. Семейство статистических функций распределения ресурсов.

Применительно к простейшей статистической системе с одним аргументом вероятность попадания dw величины G, определяющей распределение, в интервал (G,G+dG) определяется в виде доли dn интересующих нас событий по отношению к общему числу позиций N

$$dw = \frac{dn}{N}. \qquad (10)$$

Перепишем выражение (10) в виде

$$dw = \frac{dn}{N} * \frac{dG}{dG} = \left(\frac{1}{N}\frac{dn}{dG}\right) dG = \rho(G)dG\ . \qquad (11)$$

Таким образом, для определения искомой статистической функции распределения (плотности распределения вероятностей) ρ(G) нам предстоит определить величину dn/dG.

Сделаем это в несколько этапов:

1. Принимая во внимание возможность замены накопленной суммы (3) на

$$S_n = \int_0^n G_n dn \qquad (12)$$

при достаточно большом числе позиций в распределении ресурса (N→∞), определим из (7) зависимость $G=dS_n/dn=f(n)$.

2. Затем найдем обратную функцию $n=f^{-1}(G)$

3. Наконец определим искомую функцию dn/dG.

Для конкретизации дальнейших выкладок возьмем функции управления ресурсами в виде

$$y(x,\alpha) = 1 - \left(1 - x^{\alpha}\right)^{1/\alpha}. \qquad (13)$$

Очевидно, что фукнция управления y=y(x,α) определена на плоскости (x,y) в области L={(x,y); 0≤x≤1; 0≤y≤1, y≤x} и является мононотонно возрастающей, непрерывн дифференцируемой, выпуклой вниз функцией, принимающе значения y=y(0,α)=0, y=y(1, α)=1 для 1<α<∞ .

Тогда

$$\frac{dy(x,\alpha)}{dx} = \frac{x^{\alpha-1}}{(1-x^{\alpha})^{\frac{\alpha--1}{\alpha}}} = F(x) \text{ при } \alpha>1 \quad (1$$

Отметим, что смысл равенства (14) раскрывается боле полно, если произвести обратную замену переменных x и на исходные величины:

$$g = \frac{dy(x,\alpha)}{dx} = \frac{dS_n}{S_N} * \frac{N}{dn} = \frac{G_n}{\overline{G}}. \qquad (1$$

Из (15) видно, что полученная производная g являетс величиной ресурса, приведенной к среднему $\overline{G} = S_N / N$.

Из (14) следует, что производная g= F(x) монотонн возрастающая функция и следовательно существует обратна монотонно возрастающая функция $x = F^{-1}(g)$, $F^{-1}(0)=$ Имеем

$$x = F^{-1}(g,\alpha) = \frac{g^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\left(1+g^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^{1/\alpha}}. \qquad (1$$

Из (16) следует, что F(g,α) → 1 при g → +∞, и поэтом F(g,α) является функцией распределения положительно случайной величины g>0.

Тогда для статистической функции распределени (плотности распределения вероятности) имеем равенство

$$\rho(g,\alpha)=\frac{dF^{-1}(g,\alpha)}{dg}=\frac{1}{\alpha-1}\frac{g^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}}{\left(1+g^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}\ . \qquad (17)$$

Графики $\rho(g,\alpha)$ и соответствующих функций управ-ления для различных значений $\alpha>1$ приведены на рис.4,5.

В зависимости от параметра нелинейности распределения ресурсов α семейство плотностей $\rho(g,\alpha)$ распадается на классы с различными свойствами:

1. Если $1<\alpha<2$, то $\rho(0,\alpha)=0$ и $\rho(g,\alpha)$ унимодальная ограниченная плотность.

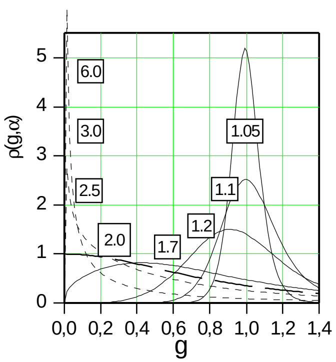

Рис.4 Семейство статистических функций распределения ресурсов для различных α

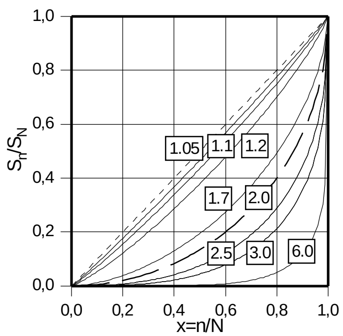

Рис.5 Функции управления, соответствующие статистическим функциям на рис.4

Пусть $\alpha=1+\varepsilon$, где $\varepsilon\to+0$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\rho(g,\alpha)\sim\frac{1}{\varepsilon}\frac{g^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\left(1+g^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^{2}}\to\delta(g-1)\ \text{при}\ \varepsilon\to+0\ . \qquad (18)$$

2. Если $\alpha=2$, то $\rho(0,2)=1$ и $\rho(g,2)$ - монотонн убывающая функция с одной точкой перегиба

$$\rho(g,2)=\frac{1}{\left(1+g^{2}\right)^{3/2}} \qquad (1$$

3. Если $\alpha>2$, то $\rho(g,\alpha)$ монотонно убывающая, выпукла вниз функция, неограниченная в $g=0$ ($\rho(g,\alpha)\to\infty$ при $g\to+0$).

Пусть $\alpha\to\infty$. Тогда имеет место асимптотическа формула

$$\rho(g,\alpha)\sim\frac{1}{\alpha}\frac{1}{g^{1-\frac{1}{\alpha}}\left(1+g^{1+\frac{1}{\alpha}}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}}}\ , \qquad (2$$

то есть $\rho(g,\alpha)\to\delta_+(g)$ при $\alpha\to+\infty$ где $\delta_+(g)=0$ для $g>0$ и $\int_0^a\delta_+(g)dg=1$ для любого $a>0$.

Таким образом, функция управления, которой н плоскости Лоренца соответствует окружность, играет рол границы, разделяющей плотности семейства $\rho(g,\alpha)$ на д класса. Более того $\rho(g,2)$ - единственная плотност семейства $\rho(g,\alpha)$, $\alpha>1$ принимающая ограниченн ненулевое значение при $g=0$.

В заключение авторам хотелось выразить особу признательность В.М.Закосаренко, оказавше принципиальное влияние на выбор направлен исследования, представленного в данной работе.

Авторам также приятно поблагодарить Каряева Е.В. ряд ценных замечаний высказанных им при обсужден данной работы.

Авторы благодарят В.В.Харитонова за внимание к работе и поддержку исследований, результаты которых представлены в препринте.

И, наконец, авторы благодарят Козыреву А.Б., Вендика О.Г. и Вейцмана В.М. за усилия по поиску экономической и наукометрической литературы, придавшей работе необходимую связь с накопленным опытом в исследуемой области.

Литература

1. *Емцов Р.Г., Лукин М.Ю.* Микроэкономика: Учебник.-М МГУ им М.В.Ломоносова, Изд."ДИС", 1997.

2. *Хайтун С.Д.* Наукометрия: состояние и перспективы М.:Наука, 1983.

3. *Трубников Б.А.* Закон распределения конкуренто Природа, 1993, №11.

4. *Бялко А.В.* Конструктивность закона конкуренци Природа, 1993, №11.

5. *Валери П.* Предисловия к "Персидским письмам". В Сб. С искусстве. М.: Искусство, 1993.

6. *Roger N.Waud.* Economics. New York: Harper&Ro Publishers, 1990.

7. *Венецкий И.Г., Венецкая В.И.* Основные математически понятия и формулы в экономическом анализе. Справ. - 2 изд., перераб. и доп. М: Статистика, 1979.

8. Математика и кибернетика в экономике: Словар справочник/ Сост., *И.И. Гонпарева, М.Б. Немчинова, А. Попова*.-М:Экономика, 1975.

9. Курс экономической теории. Под редацией *Чепурина М.Н Киселевой Е.А.*. Киров: МГИМО МИД РФ, 1994.

10. *Леонтьев В.* Международное сопоставление факторны издержек и использования факторов. В кн. Экономически эссе: теории, исследования, факты и политика. М Изд.политической литературы, 1990.

Александр Витальевич Крянев
Валентин Викторович Матохин
Сергей Геннадиевич Климанов

Статистические функции распределения ресурсов
Редактор Н.В.Шумакова
Ответственный за выпуск А.В.Крянев

ЛР №020676 от 09.12.92 Подписано в печать 07.09.98
Формат 60 x 84/16
Печ.л.0.75. Уч.изд.л.0.75 Тираж 100 экз Изд.№009-96 Заказ

Московский государственный инженерно-физический
институт (технический университет). Типографии МИФИ.
115409.Москва. Каширское шоссе.31