РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТА ОБСЛУЖИВАНИЯ НАСЕЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Джамрад Моутаз, Толстикова О.Н., Романченко О.А.
(*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, Воронеж*)
vgasu@vgasu.vrn.ru

Введение

Задача размещения объектов различного вида составляют широкий класс задач дискретной оптимизации. Выделим среди них задачи размещения объектов обслуживания населения. К таким объектам относятся автозаправочные станции, станции технического обслуживания автомобилей, автосервисы, рестораны, магазины, мастерские ремонта и т.д. Возможны различные постановки задач оптимального размещения в зависимости от того, какие ограничения являются существенными, и какие критерии оптимальности выбраны. Рассмотрим ряд постановок.

Постановка задачи размещения объектов

Пусть определены n пунктов возможного размещения объектов обслуживания. Примем, что все объекты однотипны в том смысле, что эффект от их размещения зависит только от пункта размещения. Обозначим через $\mathbf{a_i}$ - эффект от функционирования объекта в пункте **i**, $\mathbf{b_i}$ - затраты на его размещение и ввод в эксплуатацию в пункте **i**. Введем переменные $\mathbf{x_i = 1}$, если объект обслуживания размещается в пункте i и $\mathbf{x_i = 0}$ в противном случае. Тогда простейшую задачу оптимального размещения можно сформулировать следующим образом.

Задача 1. Определить $\{x_i\}$, $\mathbf{i=\overline{1,n}}$, максимизирующие

(1) $$\mathbf{A(x)=\sum_i a_i x_i}$$

при ограничении

(2) $$\mathbf{\sum_i b_i x_i \le B}$$

где **B** - объем средств, выделенных на размещение объектов.

Задача (1)-(2) является классической «задачей о ранце» методы, решения которой хорошо разработаны. Однако, эта задача не учитывает ряд условий, которые могут оказаться [1] существенными. Так, размещение большого числа объектов в одном регионе уменьшает эффект от функционирования каждого из них в силу ограниченности потребностей населения в данном виде услуг. Так, например, если все пункты возможного размещения объектов расположены в одном регионе, то соответствующее ограничение имеет вид

(3) $$\mathbf{\sum_i x_i \le p},$$

где **p** - максимальное число объектов, которые целесообразно разместить в данном регионе. Если регионов несколько, причем в **k**-м регионе имеется множество $\mathbf{p_k}$ возможных пунктов размещения объектов, то получаем систему ограничений

(4) $$\mathbf{\sum_{i\in p} x_i \le p_k},\ \mathbf{k=\overline{1.r}}$$

где $\mathbf{p_k}$ - максимальное число объектов, которые целесообразно размещать в **k**-м регионе, **r** - число регионов.

В ряде случаев существенным является условие неразмещения двух объектов в близких или соседних пунктах. Близость пунктов удобно задавать в виде графа, вершины которого соответствуют пунктам размещения, а ребра соединяют соседние пункты. Если **U** - множество ребер графа соседства пунктов, то ограничения, связанные с неразмещением двух объектов в соседних пунктах принимают вид

(5) $$\mathbf{x_i+x_j \le 1,\ (i, j)\in U}$$

Заметим, что если ограничение на величину финансовых средств не является существенным, то задача (1), (5) является задачей определения независимого множества вершин графа, имеющего максимальную сумму весов a_i.

При постановке задачи размещения объектов обслуживания предполагается, что размещение такого же типа объектов, принадлежащих другим фирмам, известно, что и позволяет [2] оценивать ожидаемый эффект от размещения объектов.

Задача 2. Определить $\{x_i\}$, $i=\overline{1,n}$, максимизирующие (1) при ограничениях (2) и (4).

Рассмотрим обобщения задач 1 и 2. Пусть объекты обслуживания не являются однотипными (например, автозаправочные станции или кафе, или автосервис и т.д.). В этом случае и эффект, и затраты на размещение объекта зависит как от типа объекта, так и от пункта размещения. Обозначим, соответственно, $\mathbf{a_{ij}}$ - эффект, $\mathbf{b_{ij}}$ - затраты, если объект **i**-го типа разместился в пункте **j**. Введем переменные $\mathbf{x_{ij} = 1}$, если объект типа **i** размещается в пункте **j**, $\mathbf{x_{ij} = 0}$ в противном случае. Пусть число типов объектов равно **m**.

Задача 3. Определить $\{x_{ij}\}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, максимизирующие

$$A(x)=\sum_{i,j} a_{ij}x_{ij} \tag{6}$$

при ограничении

$$\sum_{i,j} b_{ij}x_{ij} \le B \tag{7}$$

$$\sum_{i} x_{ij} \le D_j,\ j=\overline{1,n} \tag{8}$$

Ограничение (8) отражает тот факт, что в каждом пункте можно разместить не более $\mathbf{D_j}$ объектов разных типов. Так, например, в одном пункте можно разместить автозаправочную станцию, автосервис и кафе (а возможно, и гостиницу), что может оказаться наиболее эффективным. В задаче 3 не учитывается тот факт, что при размещении объектов разных типов в одном пункте эффект, как правило, больше, чем сумма эффектов при размещении этих объектов без учета их совместного функционирования, а затрат, как правило, меньше, чем сумма затрат при независимом размещении (возникает так называемый синергетический эффект). Для учета этих особенностей поступим следующим образом. В качестве объекта определенного типа будем рассматривать комплекс, состоящий из одного или нескольких объектов разных типов. Так, например, в качестве объекта может выступать комплекс, состоящий из автозаправочной станции автосервиса и кафе. Такой подход позволяет учесть синергетический эффект, хотя число типов объектов возрастает. В этом случае в ограничении (8) задачи 3 следует положить все $\mathbf{D_j = 1}$, так как в одном пункте можно разместить не более одного комплекса.

Учет ограничения вида (4) в задаче 3 является более сложным делом, так как речь идет о функционировании комплексов разных типов. Примем, что в каждом комплексе имеется определяющий тип объекта, а все остальные объекты, входящие в комплекс, являются, дополняющими. Так, например, если автозаправочная станция является определяющим объектом, то автосервис и кафе, входящие в комплекс, являются дополняющими. Они нацелены на обслуживание клиентов АЭС, что дает синергетический эффект. Такой подход позволяет учитывать ограничения вида (4) только по определяющему типу объектов, что существенно упрощает и постановку, и решение задачи. Действительно, в этом случае все сложные объекты (комплексы) разбиваются на непересекающиеся классы по определяющему типу объектов, а ограничения вида (4) выписываются для каждого класса объектов.

Выбор типов станций технического осмотра

Примем, что задано необходимое число N техосмотров, которое должны обеспечить станции государственного технического осмотра. Имеются m возможных типов станций. Каждый тип станций описывается следующими параметрами:

- Пропускная способность станции i-го типа – ν_i (число проверок в год).
- Стоимость станции i-го типа – q_i.
- Прибыль от одного техосмотра на станции i-го типа – p_i.

– Время приобретения и ввода в эксплуатацию станций i-го типа – τ_i.

Пусть имеются два типа станций – дешевые и более дорогие современные диагностические станции. С одной стороны более выгодно строить станции одного типа, поскольку стоимость одной станции при увеличении числа станций уменьшается (оптовые скидки на оборудование, экономия на обучении персонала и др.). С другой стороны ввод более дорогих станций дает больший эффект (прибыль от одной проверки на более дорогой станции выше, чем на дешевой). Однако, если строить только дорогие станции, то часть автовладельцев (из числа малообеспеченных слоев населения) предпочтет дешевые коммерческие станции технического осмотра. Обозначим x_1 – число станций первого типа (дешевые станции), x_2 – число станций первого типа (дорогие станции), $q_1(x_1)$ – стоимость x_1 станций первого типа, $q_2(x_2)$ – стоимость x_2 станций первого типа. Общее число техосмотров не должно превышать требуемого числа N, то есть

(9) $$\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 \le N.$$

Общая стоимость станций ограничена имеющимися ресурсами:

(10) $$Q_1(x_1) + q_2(x_2) \le Q,$$

где Q – величина выделенных средств. Прибыль от эксплуатации станций за год составит

(11) $$P(x) = p_1\nu_1 x_1 + p_2\nu_2 x_2$$

Заметим, что $q_i(x_i)$ – вогнутые функции x_i, поскольку с ростом числа приобретаемых станций данного типа стоимость одной станции уменьшается (экономия на постоянных издержках, оптовые скидки и т.д.). Поэтому множество возможных решений, определяемое ограничениями (9) и (10) является невыпуклым.

Задача заключается в определении числа станций каждого типа, максимизирующего (11) при ограничениях (9) и (10).

В случае двух типов станций задача легко решается. Действительно, существуют всего три стратегии, которые могут быть оптимальными.

1 стратегия. Приобретать только дешевые станции 1-го типа. Их число определяется как максимальное x_1, удовлетворяющее системе неравенств

$$\nu_1 x_1 \le N, \quad q_1(x_1) \le Q.$$

2 стратегия. Приобретать только дорогие станции 2-го типа. Их число определяется как максимальное x_2, удовлетворяющее системе неравенств

$$\nu_2 x_2 \le N, \quad q_2(x_2) \le Q.$$

3 стратегия. Приобретать станции обоих типов. Оптимальные x_1 и x_2 определяются из системы неравенств

$$\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 = N,$$
$$q_1(x_1) + q_2(x_2) = Q.$$

Сравнение этих трех стратегий по величине прибыли позволяет определить оптимальную стратегию.

Пример1. Пусть

(12) $$q_i(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i = 0 \\ b_i + c_i - x_i, & x_i > 0 \end{cases}, \quad i = 1,2$$

Первая стратегия:

$$x_1 = \min\left(\frac{N}{\nu_1}; \frac{Q - b_1}{c_1}\right) = a_1$$

Вторая стратегия:

$$x_2 = \min\left(\frac{N}{\nu_2}; \frac{Q - b_2}{c_2}\right) = a_2$$

Третья стратегия: решаем систему уравнений

$$x_1\nu_1 + x_2\nu_2 = N,$$
$$x_1c_1 + x_2c_2 = Q - (b_1 + b_2).$$

Рассмотрим численный пример.

i	**ν_i**	**c_i**	**b_i**
1	2	5	60
2	3	2	120

Возьмем Q = 600, N = 300. Имеем:

$$x_1 = \min\left(\frac{300}{2}; \frac{540}{5}\right) = 108,$$

$$x_2 = \min\left(\frac{300}{3}; \frac{480}{2}\right) = 100.$$

Система уравнений имеет вид:

$$2x_1 + 3x_2 = 300,$$
$$5x_1 + 2x_2 = 420.$$

Ее решение – $x_1 = x_2 = 60$.

При первой стратегии прибыль равна $216p_1$, при второй – $300p_2$, а при третьей – $120p_1 + 180p_2$. Поскольку $p_2 > p_1$ (более дорогие станции являются более прибыльными), то сравнить достаточно вторую и третью стратегии. Получаем, что $300p_2 > 120p_1 + 180p_2$ (поскольку $p_2 > p_1$). Поэтому оптимальной является вторая стратегия.

Рассмотрим обобщение задачи на m типов станций. Ограничения (9) и (10) запишутся в виде

(13) $$\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_i \le N\ ,$$

(14) $$\sum_{i=1}^{m} q_i(x_i) \le Q\ ,$$

а целевая функция

(15) $$P(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i \nu_i x_i\ .$$

В данном случае число стратегий, среди которых существует оптимальная, увеличивается. Во-первых, к ним относятся m «чистых» стратегий, то есть стратегий, соответствующих приобретению станций только одного типа. Во-вторых, к ним относятся C_m^2 стратегий, соответствующих приобретению двух типов станций. Эти стратегии определяются в результате решения системы уравнений

$$\nu_i x_i + \nu_j x_j = N,$$
$$q_i(x_i) + q_j(x_j) = Q$$

для всех $i \ne j$.

В приведенных выше постановках не учитывались предпочтения автовладельцев к тому или иному типу станций. Рассмотрим ряд задач с учетом этих предпочтений. В качестве примера оптимальности в данном случае примем стоимость приобретения станций

(16) $$Q(x) = \sum_{i=1}^{m} q_i(x_i)$$

при единственном ограничении

(17) $$\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_i \ge N\ .$$

Предпочтения автовладельцев учтем следующим образом. Разобьем всех автовладельцев на s групп. Обозначим R_i – множество типов станций, которые предпочитает i-я группа, N_i – число автовладельцев в i-й группе. Множество r типов станций назовем полным, если для любой группы i имеет место

$$R \cap R_i \ne \varnothing,$$

То есть для любой группы найдется тип станций из множества R, на которых автовладельцы этой группы согласны проходить техосмотр.

Задача заключается в определении полного множества типов станций и числа станций каждого типа из этого множества так, чтобы стоимость (15) была минимальной при ограничении (16). Ограничимся исследованием зависимостей $q_i(x_i)$ вида (12). Коэффициенты b_i соответствуют постоянным издержкам на приобретение и эксплуатацию станций i-го типа, а коэффициенты c_i - переменным издержкам на приобретение и эксплуатацию одной станции.

Примем далее, что стоимость техосмотра монотонно связана с коэффициентами c_i, то есть чем больше c_i, тем больше стоимость техосмотра. В этом случае автовладельцы i-й группы предпочтут проходить техосмотр на типах станций j, для которых

$$C_j = \min_{k \in R \cap R_i} c_k,$$

то есть на типах станций с минимальной стоимостью техосмотра.

Если обозначить $z_i(R)$ – множество групп автовладельцев, которые предпочтут проходить техосмотр на станциях i-го типа из множества типов R, то число автовладельцев, проходящих техосмотр на станциях i-го типа составит

$$N(i) = \sum_{j \in z_i} N_j ,$$

а необходимое число станций i-го типа будет равно

$$x_i(R) = \frac{N(i)}{\nu_i}$$

Стоимость приобретения станций при заданном множестве R составит

(18) $$Q(R) = \sum_{i \in R} \left[b_i + c_i x_i(R) \right]$$

(предполагаем, что $xi(R) > 0$ для всех $i \in R$). Задача сведена к определению такого множества R, для которого (18) минимальна.

Сначала рассмотрим частный случай задачи. Пусть существует упорядочение типов станций такое, что автовладельцы, согласные проходить осмотр на станциях i-го типа, согласны его проходить и на любой станции $j < i$. При этом стоимость техосмотра уменьшается (не возрастает) с увеличением i, то есть

$$C_1 \geq C_2 \geq \cdots \geq C_m.$$

Обозначим Mi – число автовладельцев, согласных проходить техосмотр на станциях $\left(\overline{1,i}\right)$. Рассмотрим некоторое решение

$$\pi = (i_1, i_2, i_3, \cdots, i_k),$$

где $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_k \leq m$. Очевидно, что $i_1 = 1$, если $M_1 > 0$, поскольку стоит задача обеспечить возможность техосмотра для всех автовладельцев. Число автовладельцев, которые будут проходить техосмотр на станциях типа i_j определяется выражением

$$N\left(i_j\right) = \sum_{q=i_j}^{i_j-1} M_q .$$

Действительно, для автовладельцев i_q, где $i_j \leq q \leq i_{j+1}$, станция i_j является самой дешевой по стоимости техосмотра.

Зная $N(i_j)$, можно определить стоимость приобретения требуемого числа станций типа i_j. Определим сеть из (m+1) вершины, где вершина 1 является входом сети, а вершина (m+1) – выходом. Вершины $\left(\overline{1,m}\right)$ соответствуют типам станций. Любые две вершины i, j где $i < j$, соединены дугой (i, j), длина которой равна стоимости приобретения станции типа i, в решении, в котором приобретаются станции и типа i, и типа j, и не приобретаются станции типа k, $i < k < j$. В этом случае любому пути в сети, соединяющему вход с выходом соответствует некоторое решение задачи, причем стоимость приобретения станций равна длине пути. Верно и обратное, любому решении задачи соответствует путь в сети, соединяющий вход с выходом, длина которого равна стоимости приобретения станций. Таким образом, задача свелась к определению пути в сети, имеющего минимальную длину. Существуют эффективные алгоритмы решения этой задачи.

Пример 2. Пусть число типов станций равно 3. Данные о параметрах станций и об автовладельцах приведены в табл. 1. Покажем, как определяются длины дуг сети. Возьмем дугу (1,3). Ей соответствует решение, в котором на станциях первого типа проходят техосмотр

Таблица 1.

Данные о параметрах станций и автовладельцах

i	1	2	3
b_i	60	400	200
c_i	12	8	4
ν_i	300	200	200
M_i	1000	5000	15000

$M_1 + M_2 = 6000$ автовладельцев. Число таких станций равно

$$x_1 = \frac{M_1 + M_2}{\nu_1} = \frac{6000}{500} = 12 .$$

Соответственно, стоимость их приобретения составит

$$\ell_{13} = b_1 + c_1 x_1 = 600 + 12\times 12 = 744.$$

Возьмем дугу (2,4). Ей соответствует решение, в котором на станциях второго типа проходят техосмотр $M_2 + M_3 = 20000$ автовладельцев. Число таких станций равно $x_1 = \dfrac{M_2 + M_3}{\nu_2} = \dfrac{20000}{200} = 100$, а стоимость их приобретения

$$\ell_{24} = 400 + 100\times 8 = 1200.$$

На рис. 1 приведена сеть с длинами дуг, указанными у соответствующих дуг. Путь минимальной длины выделен жирными дугами, это путь $\mu_0 = (1, 3, 4)$. Его длина 1340. В соответствующем решении приобретаются станции 1 и 3 типов.

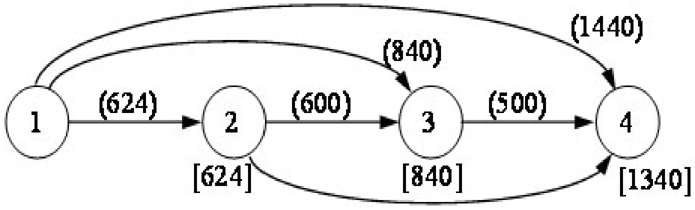

Рис. 1. Выбор типа станций

Причем на станциях первого типа проходят техосмотр 6000 автовладельцев, а на станциях третьего типа (дешевые станции) – 1500 автовладельцев.

В общем случае задача выбора типов станций становится сложной задачей дискретной оптимизации. Опишем метод ветвей и границ для ее решения в общем случае. Как известно, в основе метода ветвей и границ лежит оценка снизу стоимости приобретения станций на различных подмножествах решений. Опишем метод получения нижних оценок для всего множества решений. Для этого определим множество Q_i и число t_i групп автовладельцев, которые согласны проходить техосмотр на станциях i-го типа. Разделим постоянную часть b_i стоимости приобретения станций i-го типа на t_i частей s_{ik} произвольным образом так, что

$$\sum_k s_{ik} = b_i.$$

Будем определять стоимость приобретения станции i-го вида для обслуживания автовладельцев k-й группы по формуле

(19) $$s_{ik} + c_i x_{ik},$$

где $x_{ik} = N_k/\nu_i$ – число станций i-го типа, необходимых для обслуживания автовладельцев k-й группы. Рассмотрим произвольное решение задачи, в котором станции i-го типа обслуживают некоторое множество T_i групп автовладельцев. Стоимость их приобретения, определяемая по формуле (19), составит

$$\sum_{k\in T_i} s_{ik} + c_i \sum_{k\in T_i} x_{ik} \le b_i + c_i x_i.$$

Таким образом, величина (19) дает нижнюю оценку стоимости приобретения станций. Заметим, что если $T_i = Q_i$, то эта оценка совпадает с фактической стоимостью. Описание алгоритма приведем на примере.

Заключение

Итак, на основе метода дискретной оптимизации получено оптимальное решение, для выбора объекта обслуживания населения при котором приобретаются станции только второго типа.

Литература

1. Баркалов С.А., Баскаков А.С., Котенко А.М. *Оптимизация эффективности многоэтапного конкурсного механизма для произвольного набора проектов* // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования Материалы междунар. науч. конфер. Воронеж 2005г. С. 16.
2. Баркалов С.А., Баскаков А.С., Котенко А.М. *Многоэтапный конкурс формирования инновационных программ регионального развития* // Известия ТулГУ серия: строительство, архитектура и реставрация выпуск 9 Тула 2006г. С. 184-193.