ДВУКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ПО НАУЧНЫМ РУКОВОДИТЕЛЯМ

Егоров В.В.
(*Волгоградский государственный университет, Волгоград*)
yegoroff_vv@mail.ru

Введение

Исследуется проблема принятия решения в отношении выбора отображения одного конечного множества на другое при учете известных для элементов каждого множества значимостей элементов иного множества.

Традиционно, в литературе по теории принятия решений [1-5] рассматриваются одно или несколько лиц, имеющих свои системы предпочтений на некотором, одном и том же, множестве альтернатив, и принимающих решение на этом множестве. В этом смысле, т.е. по множеству альтернатив решений, указанные лица можно считать однотипными. В отличие от этого, в настоящей работе рассматриваются некоторые подходы к решению проблем согласования интересов двух разнотипных групп людей, являющихся множествами альтернатив друг для друга. Для этих целей строятся различные математические модели представленной ситуации и в рамках этих моделей предлагаются различные способы принятия решения третьим лицом.

Получаемые в настоящей работе модели относятся к классу моделей, рассматриваемых в теории многокритериальной оптимизации в задачах линейного программирования с булевыми переменными [6].

Выбор для дальнейшего использования той или иной полученной модели и того или иного предложенного метода принятия решения об установлении взаимоотношений между лицами из разнотипных групп обуславливается этико-философскими воззрениями лица, принимающего решение (ЛПР), от эгалитаризма до утилитаризма. А эффективность принимаемого здесь решения понимается в смысле учета согласования интересов, выраженных в виде систем предпочтений.

Несомненно, изучение вопросов согласования интересов различных групп людей является достаточно актуальным в области экономико-математического и социального моделирования.

Также представляется достаточно важной методологическая составляющая настоящей работы, поскольку в ней намечены возможные направления дальнейших исследований.

Постановка задачи, построение математических моделей

Пусть имеющихся n студентов требуется распределить к имеющимся m преподавателям, например, как к научным руководителям. В другой формулировке можно было бы говорить о распределении работников между работодателями.

При этом считаем, что у каждого из указанных людей имеется своя система предпочтений, а именно:

Пусть $WS = (ws_{ij})_{n \times m}$ – матрица предпочтений студентов, где $ws_{ij} \geq 0$ – степень желания студента i быть распределенным к преподавателю j.

Пусть $WT = (wt_{ij})_{n \times m}$ – матрица предпочтений преподавателей, где $wt_{ij} \geq 0$ – степень желания преподавателя j получить к себе в результате распределения студента i.

Очевидно, допустимы равенства предпочтений $ws_{ir}=ws_{is}$, $r \neq s$ и $wt_{pj}=wt_{qj}$, $p \neq q$.

Т.к. у каждого человека имеется свое понимание о том, каким образом измерять предпочтения, то указанные, по сути, разные шкалы предпочтений имеет смысл привести к одной, безразмерной, шкале по правилу: $ws^0_{ij} = ws_{ij} \big/ (ws_{i1} + \ldots + ws_{im})$ и $wt^0_{ij} = wt_{ij} \big/ (wt_{1j} + \ldots + wt_{nj})$. Это дает нормализованные матрицы WS^0 и WT^0 предпочтений студентов и преподавателей.

Обозначим s_i (i=1,…,n) – количество преподавателей, у которых студент i должен быть подшефным (т.н. величина предложения студента i). По содержательному смыслу задачи $s_i=1$ ($i=1,\ldots,n$). И обозначим $t_j\geq 1$ ($i=1,\ldots,n$) – количество студентов, у которых преподаватель j должен быть научным руководителем (т.н. величина спроса преподавателя j), причем пусть выполнено $t_1+\ldots+t_m=n$ (обобщая, можно было бы определить t_j как максимальное количество студентов, у которых преподаватель j может быть руководителем).

Положим $x_{ij}=1$, если студент i распределяется к преподавателю j, и $x_{ij}=0$ в противном случае. Тогда имеем следующую систему ограничений

$$(*)\qquad \begin{cases} x_{i1} + \ldots + x_{im} = 1 & (i=1,\ldots,n) \\ x_{1j} + \ldots + x_{nj} = t_j & (j=1,\ldots,m) \\ x_{1j} = \{0;1\} \end{cases}.$$

Модель 1. При наличии приведенных ограничений (∗) можно потребовать максимизировать количество студентов, попадающих к наиболее желательным для них преподавателям, и максимизировать количество преподавателей, получающих наиболее желательных для них студентов. Для формализации указанного заменим матрицы WS и WT (или, что даст тот же результат, матрицы WS^0 и WT^0) на матрицы $WS^1=(ws^1_{ij})_{n\times m}$ и $WT^1=(wt^1_{ij})_{n\times m}$. Здесь матрица WS^1 получается из матрицы WS (или WS^0) путем замены в каждой строке соответствующего максимального элемента на "1", а остальных элементов на "0", а матрица WT^1 получается из матрицы WT (или WT^0) путем замены в каждом столбце соответствующего максимального элемента на "1", а остальных элементов на "0". Тогда имеем

$$\text{(Модель 1)}\qquad \begin{cases} f^1_S(\bar{x}) = \sum_{i,j}\left(ws^1_{ij}\right)x_{ij} \to \max \\ f^1_T(\bar{x}) = \sum_{i,j}\left(wt^1_{ij}\right)x_{ij} \to \max \\ (*) \end{cases}.$$

При использовании указанной модели возможно возникновение ситуации, когда, например, у некоторого студента i предпочтения таковы (14;14;15;0;…;0), в силу чего такая строка матрицы WS будет заменена строкой (0;0;1;0;…;0) матрицы WS^1. Тогда, если ЛПР решит, что замена набором (1;1;1;0;…;0) была бы справедливее, то для этого можно заранее решить не отличать от максимального величины предпочтений, отличающиеся от него, не более чем, скажем, на 10%.

Модель 2. При наличии приведенных ограничений (∗) можно потребовать максимизировать нормализованные суммарные удовлетворенности, как студентов, так и преподавателей, от распределения первых по вторым. Тогда имеем

$$\text{(Модель 2)}\qquad \begin{cases} f^0_S(\bar{x}) = \sum_{i,j}\left(ws^0_{ij}\right)x_{ij} \to \max \\ f^0_T(\bar{x}) = \sum_{i,j}\left(wt^1_{ij}\right)x_{ij} \to \max \\ (*) \end{cases}.$$

Заметим, что, по сути, всюду ранее предполагалось, что все студенты (и их предпочтения) равнозначимы между собой, и что все преподаватели (и их предпочтения) равнозначимы между собой. Но в ряде случаев значимость людей из некоторой однотипной группы нужно считать не одинаковой (например, хотелось бы в первую очередь учитывать пожелания хорошо занимающихся студентов, а потом – остальных). Поэтому можно было бы дополнительно задать $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ ($\alpha_i\geq 0$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=1$) – нормированные "веса"-значимости соответствующих студентов, и $\beta_1,\ldots,\beta_m$ ($\beta_i\geq 0$, $\beta_1+\ldots+\beta_m=1$) – нормированные "веса"-значимости соответствующих преподавателей. Тогда учет этих значимостей возможен в виде определения целевых функций (например, из Модели 2) следующим образом

$$\text{(Модель 2′)}\qquad \begin{cases} f^0_S(\bar{x}) = \sum_{i,j}\alpha_i\left(ws^1_{ij}\right)x_{ij} \to \max \\ f^0_T(\bar{x}) = \sum_{i,j}\beta_i\left(ws^1_{ij}\right)x_{ij} \to \max \\ (*) \end{cases}.$$

Это, по сути, означает переход от рассмотрения матриц WS^0 и WT^0 к рассмотрению матриц WS^2 и WT^2. Здесь матрица WS^2 получается из матрицы WS^0 путем умножения каждой i-й строки на соответствующее α_i, а матрица WT^2 получается из матрицы

WT^0 путем умножения каждого j-го столбца на соответствующее β_j.

Однако, если, перед принятием в рамках этой модели какого-либо решения, нормировать матрицы WS^2 и WT^2, то оказывается, что после этого перестают учитываться значимости внутри имеющихся двух групп людей. Действительно, пусть, например, в качестве i-й строки матрицы WS^2 имеем $\alpha_i ws^0_{i1}$, ... , $\alpha_i ws^0_{im}$, тогда нормируя ее, получаем

$$\frac{\alpha_i ws^0_{i1}}{\alpha_i ws^0_{i1} + \ldots + \alpha_i ws^0_{im}} = ws^0_{i1}, \quad \ldots \quad, \frac{\alpha_i ws^0_{im}}{\alpha_i ws^0_{i1} + \ldots + \alpha_i ws^0_{im}} = ws^0_{im}.$$

Аналогичный результат, т.е. матрицы WS^0 и WT^0, дает и нормирование матриц WS и WT, строки и столбцы соответственно которых домножены на соответствующие "веса" α_i и β_j. Отмеченную неудачность подхода моделирования с заданием "весов"-значимостей имеющихся людей можно обойти, например, посредством ввода и максимизации иных нежели раньше целевых функций, а именно $f^0_{Si}(\bar{x}) = \sum_i \left(ws^0_{ij}\right)x_{ij}$ (i=1,…,n) и $f^0_{Tj}(\bar{x}) = \sum_j \left(wt^0_{ij}\right)x_{ij}$ (j=1,…,m), но все же упорядоченных по значимости (что будет учитываться уже не в модели, а в способе принятия того или иного решения соответствующим лицом).

Принятие решения

Среди разных способов принятия решения при наличии многих критериев, в данном случае наиболее адекватным представляется использовать метод лексикографической оптимизации (при наличии указания значимостей всех имеющихся людей) или метод обобщенного критерия в виде максимизируемой "взвешенной" суммы (при наличии указания значимостей групп имеющихся людей) $f_{\text{обобщ.}}(\bar{x}) = \alpha_1 f^0_S(\bar{x}) + \alpha_2 f^0_T(\bar{x})$ (где $\alpha_{1,2} \geq 0$ и могут быть выбраны, например, в виде $\alpha_1=\alpha$ и $\alpha_2=1-\alpha$). Указанную "взвешенную" сумму можно рассматривать как получающуюся из матрицы $W_{n\times m}=\alpha_1 WS^0+\alpha_2 WT^0$.

Т.к. обычно студентов больше, чем преподавателей, то считая выполненным неравенство n>m, для принятия решения задачи вторым упомянутым методом (который к тому же, как известно, дает некоторое из Парето-оптимальных решений), продублируем каждый j-й столбец матрицы $W_{n\times m}$ (соответствующий преподавателю j) t_j такими же столбцами, но с величиной спроса, равной уже не по t_j, а по 1. Тем самым получим квадратную матрицу $W'_{n\times n}$ и соответствующую ей стандартную задачу о назначении на максимум, стандартные методы решения которой известны.

Заключение

В настоящей работе рассмотрены две группы субъектов – студентов и преподавателей, когда у каждого представителя первой группы имеется своя система предпочтений или оценок каждого представителя второй группы и наоборот. При этом, учитывая указанные системы предпочтений, третьему лицу требуется сделать распределение студентов по преподавателям.

В зависимости от того, что при таком распределении третьим лицом понимается под справедливым учетом систем предпочтений, были построены две основные модели, описывающие эти понимания. Точнее говоря, включение в модель той или иной совокупности целевых функций обусловлено определенным пониманием справедливости. И третьему лицу, принимающему решение, остается остановить свой выбор на более близкой к его воззрениям модели, возможно, с небольшими ее корректировками.

В рамках каждой одной выбранной модели также предложены два возможных метода принятия решения.

Представленные методики принятия решений обладают определенной новизной, легко поддаются алгоритмизации и численному моделированию.

Литература

1. КИНИ Р.Л., РАЙФА Х. *Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения*. – М.: Радио и связь, 1981. – 560с.

2. МИРКИН Б.Г. *Проблема группового выбора*. – М.: Наука, 1974. – 256с.
3. МУЛЕН Э. *Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели*. – М.: Мир, 1991. – 464с.
4. ПОДИНОВСКИЙ В.В., НОГИН В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. – М.: Наука, 1982. – 256с.
5. *Теория выбора и принятия решений*. – М.: Наука, 1982. – 328с.
6. BITRAN G.R. *Theory and algorithms for linear multiple objective programs with zero-one variables*. // Math.Program. Vol. 17. 1979. № 3. P. 362 – 390.