МЕТОД АГРЕГИРОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ С ЗАВИСИМОСТЯМИ ВИДА $f(u)=au^b e^{cu}$

Старцев В.Н.

(Воронежский государственный архитектурно – строительный университет, г. Воронеж)

Обоснованное в [1] предпочтительное применение зависимостей скорости операции от количества ресурсов в виде $f(u) = au^b e^{cu}$ открывает вопрос о методах и моделях решения задач управления с их использованием. Следует сразу отметить, что возникает ряд трудностей при решении классических задач методами? изложенными в [2], связанных с определением времени реализации проектов в зависимости от количества ресурса и оптимальным распределением самого ресурса при различных схемах взаимодействия проектов.

Пусть есть n проектов с разными $f(u)$:

$$\begin{cases} f_1(u) = a_1 u^{b_1} e^{c_1 u}, & u < k_1; \\ f_1(u) = f_1(k_1), & u > k_1; \end{cases}$$

(1) $$\begin{cases} f_2(u) = a_2 u^{b_2} e^{c_2 u}, & u < k_2; \\ f_2(u) = f_2(k_2), & u > k_2; \end{cases}$$

....

$$\begin{cases} f_i(u) = a_i u_i^{b_i} e^{c_i u}, & u < k_i; \\ f_i(u) = f_i(k_i), & u > k_i; \end{cases} \quad i = 1...n.$$

Очевидно, агрегированное представление функции будем искать в виде:

(2) $$f(u) = au^b e^{cu}.$$

В качестве неизвестных имеем коэффициенты a, b и c. Прологарифмируем (2):

(3) $$\ln(f(u)) = \ln a + b \ln u + cu.$$

Рассмотрим последовательный случай.

Тогда время реализации всего проекта (мультипроекта) можно записать как:

(4) $$T_0(u) = \frac{W_1}{f_1(u)} + \frac{W_2}{f_2(u)} + ... + \frac{W_n}{f_n(u)}.$$

Скорость реализации всего проекта будет:

(5) $$f_0(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i}{T_0(u)}.$$

Вычислив поочерёдно T и $f(u)$ при трёх различных значениях u, получим данные, по которым можно из уравнения (3) составить систему трёх линейных алгебраических уравнений.

(6) $$\begin{cases} \ln(f(u_1)) = \ln a + b \ln u_1 + cu_1 \\ \ln(f(u_2)) = \ln a + b \ln u_2 + cu_2 \\ \ln(f(u_3)) = \ln a + b \ln u_3 + cu_3 \end{cases}$$

Решив эту систему любым из известных способов, получим искомые коэффициенты a, b и c, а, следовательно, и агрегированное описание комплекса операций.

(7) $$f(u) = au^b e^{cu};$$

Тогда время реализации проекта можно определять как:

(8) $$T(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i}{f(u)}$$

Относительную погрешность агрегирования можно представить как разность времени реализации проектов определённого по формулам (4) и (8), отнесённую к T_0:

(9) $$\Delta = \frac{T_0 - T}{T_0} 100\%.$$

Эксперимент с различными комбинациями зависимостей и параметрами операций показал, что если форма графика для всех проектов одинакова (вогнутая или переменной кривизны) то на интервале (0; $k_{\min}$) (см. рис. 1) возможно практически идеальное агрегированное представление одной функцией с погрешностями, не превышающими 1%. Если же форма графиков различна (см. рис. 2), то указанный интервал разбивается на участки, как правило, два-три, позволяющие достигать $\Delta \leq 3\%$.

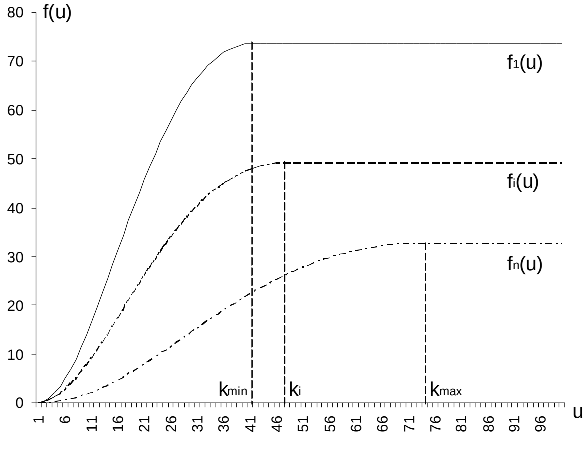

Рис. 1.

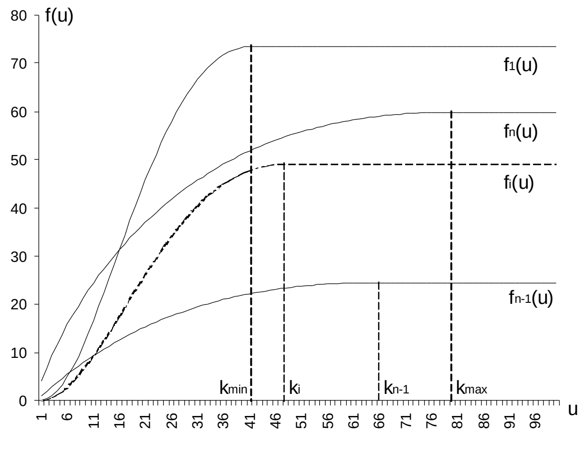

Рис. 2.

Интервал ($k_{\min}$; k_n) для графика, описывающего общий процесс, пологий ввиду постепенного увеличения в нём доли горизонтальных частей составляющих его функций, поэтому данный участок описывается одной отдельной зависимостью с достаточной точностью (1-2%).

Таким образом, любое количество последовательно реализуемых проектов с нелинейными $f(u)$ различной формы, описываемых уравнениями (1), независимо от близости значений k_i можно описать одной или несколькими функциями $f(u) = au^b e^{cu}$. Количество этих функций колеблется в зависимости от предполагаемого коридора финансирования $u_{\min} < u < u_{\max}$ и необходимой точности расчётов. Изложенный подход проиллюстрируем на примере.

Пусть дано пять последовательно реализуемых проектов, описываемых зависимостями (9). Их объёмы указаны в млн. руб. на рис. 3. Графики представлены на рис. 4. Предполагаемые границы, в которых может проводиться финансирование – 10÷80 млн. руб., допустимая погрешность в расчётах – 2%. Найдём агрегированное представление проектов.

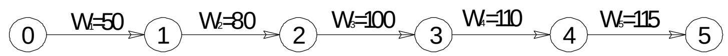

Рис. 3.

$$\begin{cases} f_1(u) = 0.08u^{2.5}e^{-0.06u}, & u < 41.67; \\ f_1(u) = 73.59, & u \geq 41.67; \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} f_3(u) = ue^{-0.015u}, & u < 66.67; \\ f_3(u) = 24.52, & u \geq 66.67; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_5(u) = 3.5u^{0.8}e^{-0.01u}, & u < 80; \\ f_5(u) = 52.37, & u \geq 80; \end{cases}$$

Сначала определим зависимость скорости операции от количества ресурсов для интервала (k_1; k_5). Для этого проведём вычисления по формулам (4) и (5) при трёх значениях u, близких (k_1; k_5). Примем $u_1 = 40$; $u_2 = 60$; $u_3 = 80$.

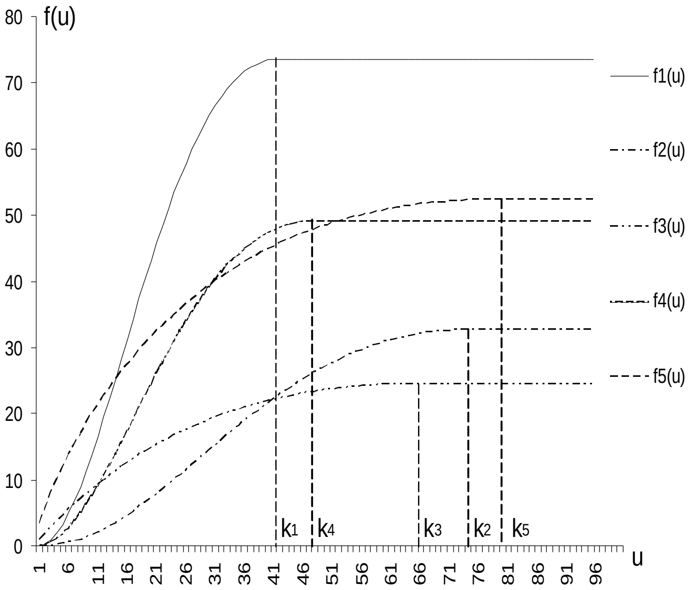

Рис. 4.

(10)
$$T_0^1(40) = \frac{50}{0.08\cdot 40^{2.5}e^{-0.06\cdot 40}} + \frac{80}{0.006\cdot 40^{2.6}e^{-0.035\cdot 40}} + \frac{100}{40\cdot e^{-0.015\cdot 40}} + \frac{110}{0.05\cdot 40^{2.4}e^{-0.05\cdot 40}} + = 13.82\ \textit{лет}.$$

(11) $$f_0^1(40) = \frac{\sum_{i=1}^{5} W_i}{T_0^1} = \frac{455}{13.82} = 32.93\ \textit{млн.руб./год};$$

Аналогично получаем:

(12) $$T_0^2(60) = 11.87\,\textit{лет};\quad f_0^2(60) = 38.33\ \textit{млн.руб}$$
$$T_0^3(80) = 11.64\ \textit{лет};\quad f_0^3(80) = 39.08\ \textit{млн.руб}$$

Запишем систему уравнений (6) для полученных значений:

(13) $$\begin{cases} \ln 32.93 = \ln a + b\ln 40 + c40 \\ \ln 38.33 = \ln a + b\ln 60 + c60\ ; \\ \ln 39.08 = \ln a + b\ln 80 + c80 \end{cases}$$

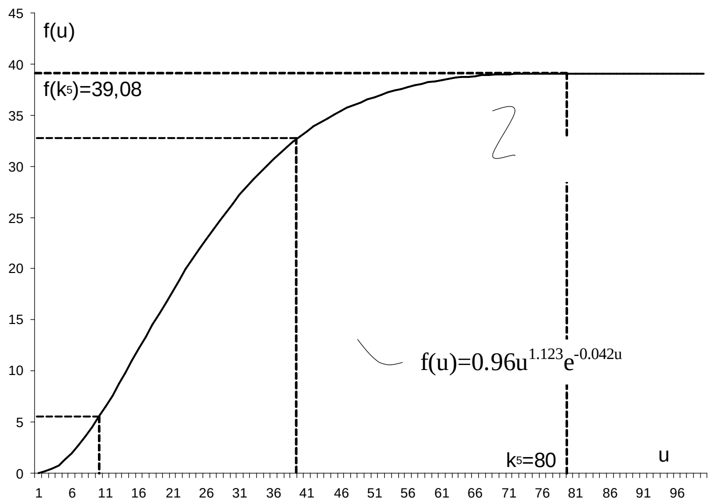

Рис. 5

Решив систему, получим:

(14) $a = 0.96; b = 1.123; c = -0.015;$

$$f(u) = 0.96u^{1.123}e^{-0.015u};$$

Теперь проведём подобный расчёт для оставшегося интервала (10; 40). Примем $u_1 = 10$; $u_2 = 25$; $u_3 = 40$.

(15) $T_0^1 = 82.94\,\textit{лет};$

Соответствующая система уравнений:

(16) $\begin{cases} \ln 5.49 = \ln a + b\ln 10 + c10 \\ \ln 21.94 = \ln a + b\ln 25 + c25 \\ \ln 32.93 = \ln a + b\ln 40 + c40 \end{cases}$

Решение системы: $a = 0.053; b = 2.196; c = -0.042;$

Уравнение для интервала (10; 40):

(17) $f(u) = 0.053u^{2.196}e^{-0.042u};$

Итак, общий результат полученного решения можно представить в следующем виде:

(18) $\begin{cases} f(u) = 0.053u^{2.196}e^{-0.042u}, & 10 \le u \le 40; \\ f(u) = 0.96u^{1.123}e^{-0.015u}, & 40 \le u \le 80; \\ f(u) = 39.08, & u > 80; \end{cases}$

Это и есть агрегированное представление комплекса операций. График для (18) изображён на рис. 5.

Погрешности малы и показать расхождение агрегированного проекта с идеальной кривой в данном масштабе сложно, поэтому приведём их в табличной форме в процентном выражении применительно к параметру T для интервала (10;40) с самыми большими отклонениями. Из табл. 1 видно, что погрешность не превышает заданной в условии – 2%.

В противном случае интервал, в котором $\Delta > [\Delta]$ разбивается на два, для каждого из которых определяется своя зависимость.

Таблица 1

u	10	12	14	16	18	20
T_0	82,2	59,0	45,4	36,8	30,9	26,7
T	82,2	59,7	46,2	37,4	31,3	27,0
Δ, %	0,0	1,2	1,7	1,6	1,4	1,0

Столь хорошее приближение достигается тем, что выбранная для агрегированного представления функция позволяет привязываться к идеальной кривой сразу в трёх точках (степенная функция только в двух) и близко повторять её форму.

Литература

1. Баркалов С.А., Бурков В.Н., и др., *Прикладные модели в управлении организационными системами*. Воронежский государственный архитектурно-строительный университет – Тула, 2002 г.
2. Баркалов С.А., Бурков В.Н., Гилязов Н.М. *Методы агрегирования в управлении пректами*. - РАН, Институт проблем управления – Москва 1999 г.
3. Бурков В.Н., Квон О.Ф., Цитович В.А. *Модели и методы мультипроектного управления*. - РАН, Институт проблем управления – Москва 1997 г.