

## ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ОПТИМАЛЬНЫХ МНОГОУРОВНЕВЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

Мишин С.П.

(Институт проблем управления РАН, Москва)

[smishin@newmail.ru](mailto:smishin@newmail.ru)

Работа выполнена при поддержке фонда содействия отечественной науке

### Введение

Любая экономическая система состоит из множества организованных некоторым образом сотрудников. Благодаря организации сотрудники действуют на основе определенных процедур и правил (механизмов), что позволяет достичь цели системы. Сотрудники организации специализированы, что повышает их эффективность. Однако взаимодействие сотрудников с различной специализацией должно быть скоординировано для достижения общей цели системы. Для реализации управленческих функций в организации создается иерархия. В литературе по менеджменту процесс построения (или реорганизации) экономической системы делится на три фазы (см. например, [11]):

I. Разработка технологии: определяется состав исполнителей, их функции и порядок взаимодействия.

II. Разработка иерархии: определяется количество менеджеров и состав сотрудников, которыми управляет каждый менеджер.

III. Разработка механизмов управления: определяются полномочия начальников по отношению к их подчиненным.

Имеется большое количество математических моделей фаз I и III. Фаза II наиболее проблематична для математического исследования в силу огромного количества возможных иерархий и затруднительности количественного анализа их эффективности. По этой причине на данный момент имеется неболь-

шое количество работ по моделированию иерархий. Среди «классических работ» можно отметить [9, 10], в которых проблема освещается достаточно общо, однако модель оптимальной иерархии в общем виде не формализована. Ряд более поздних работ (см., например, [5]) исследует строгие математические постановки указанной задачи, налагая при этом ряд весьма жестких ограничений (как правило, рассматриваются только древовидные иерархии с подчинением только между соседними уровнями и затратами, зависящими только от числа непосредственных подчиненных). В ряде недавних работ [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8] рассмотрена достаточно более общая математическая модель, позволяющая формально исследовать фазу II и минимизировать затраты иерархии управления.

Затруднительность математического исследования фазы II привела к тому, что в настоящий момент достаточно развиты лишь модели организаций с фиксированной иерархией. Подавляющее большинство работ посвящено исследованию так называемых двухуровневых (веерных) организаций, в которых один или несколько центров (*principals*) управляют одним или несколькими агентами (*agents*). Опираясь на результаты [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8], в настоящей работе описан подход к построению модели многоуровневой организации и оптимизации параметров ее функционирования, включая состав исполнителей и менеджеров, иерархию управления, планы работ исполнителей и подразделений, подчиненных менеджерам, механизмы стимулирования подчиненных.

### 1. Базовые определения

Пусть  $N = \{w_1, \dots, w_n\}$  – множество *исполнителей*. Через  $M$  обозначим конечное множество *менеджеров*, управляющих взаимодействием исполнителей. Менеджеры будут обозначаться через  $m, m', m'', m_1, m_2, K \in M$ . У каждого менеджера имеются некоторые «полномочия», в соответствии с которыми он может принимать решения, обязательные для его подчиненных (исполнителей или других менеджеров). Определим подчиненность формально. Пусть  $V = N \cup M$  – все множество *сотрудников*

организации (исполнителей и менеджеров). Тогда определим множество *ребер подчиненности*  $E \subseteq V \times M$ . Ребро подчиненности  $(v, m) \in E$  означает, что сотрудник  $v \in V$  *непосредственно подчинен* менеджеру  $m \in M$ . То есть ребро направлено от *непосредственного подчиненного* к его *непосредственному начальнику*. Сотрудник  $v \in V$  является *подчиненным* менеджера  $m \in M$  (менеджер  $m$  является *начальником* сотрудника  $v$ ), если существует цепочка ребер подчиненности из  $v$  в  $m$ . Будем также говорить, что начальник *управляет* подчиненным, или подчиненный *управляется* начальником.

**Определение 1.** *Ориентированный граф  $H = (N \cup M, E)$  с множеством ребер подчиненности  $E \subseteq (N \cup M) \times M$  назовем иерархией, управляющей множеством исполнителей  $N$ , если  $H$  ациклический, любой менеджер имеет подчиненных и найдется менеджер, которому подчинены все исполнители. Через  $\Omega(N)$  обозначим множество всевозможных иерархий.*

Ациклическость означает, что не существует «порочного круга» подчиненности. Определение также исключает ситуации, в которых имеются «менеджеры» без подчиненных, так как это противоречит роли менеджера, который должен управлять некоторыми сотрудниками. Определение требует, чтобы в иерархии был менеджер, который управляет (непосредственно или с помощью других менеджеров) всеми исполнителями. Такой менеджер способен разрешать конфликты между любыми исполнителями.

*Группой* исполнителей  $s \subseteq N$  назовем любое непустое подмножество множества исполнителей. По определению 1 каждый менеджер имеет по крайней мере одного подчиненного. Начав с любого менеджера  $m$ , мы можем двигаться «сверху вниз» к подчиненным менеджера  $m$ . В силу ациклическости в конечном итоге придем к подчиненной группе исполнителей. То есть *каждому менеджеру  $m$  в любой иерархии  $H$  подчинена некоторая группа исполнителей  $s_H(m) \subseteq N$* . Будем также говорить, что менеджер  $m$  *управляет группой исполнителей  $s_H(m)$* .

Считаем, что любому исполнителю  $w \in N$  «подчинена» простейшая группа  $s_H(w) = \{w\}$ , состоящая из самого исполнителя. Очевидно, что для любой иерархии  $H$  и любого менеджера  $m \in M$  выполнено  $s_H(m) = s_H(v_1) \cup \mathbf{K} \cup s_H(v_k)$ , где  $v_1, \dots, v_k$  – все непосредственные подчиненные менеджера  $m$ . Для любого подчиненного  $v$  менеджера  $m$  выполнено  $s_H(v) \subseteq s_H(m)$ .

**Определение 2.** *Функцию затрат менеджера  $m \in M$  в иерархии  $H = (N \cup M, E) \in \Omega(N)$  назовем секционной, если она имеет вид:*

(1) 
$$c(s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)),$$
 где  $v_1, \dots, v_k$  – все непосредственные подчиненные менеджера  $m$ ,  $s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)$  – группы, управляемые сотрудниками  $v_1, \dots, v_k$ ,  $c(\cdot)$  – функция, ставящая в соответствие любому набору групп<sup>2</sup> неотрицательное действительное число. Затраты иерархии равны сумме затрат всех ее менеджеров<sup>3</sup>:

(2) 
$$c(H) = \sum_{m \in M} c(s_H(v_1), \mathbf{K}, s_H(v_k)).$$

*Функцию затрат иерархии (2) также назовем секционной. Иерархию назовем оптимальной, если она минимизирует затраты на множестве  $\Omega(N)$ .*

Секционная функция затрат иерархии складывается из затрат всех менеджеров, причем затраты каждого менеджера определяются только группами исполнителей (подразделениями организации), которыми управляют непосредственные подчиненные менеджера. Поясним определение секционной функции на примере фрагмента иерархии, изображенного на рисунке 1. Менеджер  $m$  управляет группой исполнителей  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ . При этом  $m$  осуществляет управление с помощью двух непосредственно подчиненных менеджеров  $m_1$  и  $m_2$ . Подчиненный

<sup>2</sup> Функция зависит именно от набора групп  $s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)$ , а не от их порядка. То есть затраты менеджера не зависят от того, в каком порядке пронумерованы его непосредственные подчиненные  $v_1, \dots, v_k$ .

<sup>3</sup> В выражении (2) и ниже одной и той же буквой  $c(\cdot)$  обозначается и функция затрат иерархии, и функция затрат менеджера.

$m_1$  управляет группой исполнителей  $\{w_1, w_2\}$ , а подчиненный  $m_2$  управляет группой исполнителей  $\{w_3, w_4\}$ . Предполагается, что непосредственные подчиненные  $m_1$  и  $m_2$  справляются со своими обязанностями. В этом случае затраты менеджера  $m$  не зависят от того, как именно  $m_1$  и  $m_2$  управляют подчиненными исполнителями. Например, менеджеры  $m_1$  и  $m_2$  могут управлять подчиненными исполнителями напрямую или с помощью одного или нескольких подчиненных менеджеров. Это не отразится на затратах менеджера  $m$ , так как при «нормальной работе»  $m$  управляет напрямую только менеджерами  $m_1$  и  $m_2$ .

Согласно определению 2 затраты менеджера зависят только от того, каким образом подчиненная группа исполнителей распределена между непосредственными подчиненными. В рассмотренном примере группа  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  разделена на две непересекающиеся подгруппы:  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \{w_1, w_2\} \cup \{w_3, w_4\}$ , поэтому затраты менеджера  $m$  составят  $c(\{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\})$ . То есть предполагается, что затраты менеджера зависят только от той «секции» («отдела», «звена» и т.п.), которой он управляет непосредственно. На рисунке 1 такая секция состоит из самого менеджера  $m$  и его непосредственных подчиненных  $m_1$  и  $m_2$ . От остальной части иерархии затраты менеджера не зависят.

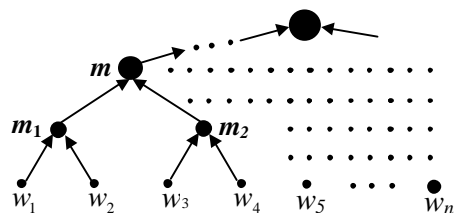


Рис. 1. Фрагмент иерархии

Кроме того предполагается, что затраты зависят только от объема управленческой работы (например, планирования и контроля), а не от персональных качеств менеджеров. Таким образом, секционная функция не изменяется при перестановке менеджеров, то есть обладает свойством *анонимности*. В частности это означает, что затраты  $c(\{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\})$  менеджера  $m$

зависят только от набора групп  $(\{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\})$ , а не от того, в каком порядке эти группы записаны (в каком порядке пронумерованы непосредственные подчиненные), то есть  $c(\{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\}) = c(\{w_3, w_4\}, \{w_1, w_2\})$ .

Кроме анонимности, секционная функция затрат обладает свойством *аддитивности*, то есть затраты иерархии складываются из затрат менеджеров, каждый из которых управляет одной «секцией» иерархии.

## 2. Модель оптимальной организации

Решив задачу об оптимальной иерархии можно ответить на очень важный вопрос – каков вид оптимальной иерархии, управляющей заданными исполнителями с минимальными затратами менеджеров на выполнение управленческих функций. При этом количество исполнителей и их характеристики (сложность, мера, объем выполняемой работы и т.п.) считаются заданными экзогенно. В ряде случаев это оправдано, поскольку технология жестко определяет состав и функции исполнителей. Однако во многих случаях возникает весьма важный вопрос об оптимальном составе исполнителей: сколько исполнителей должно быть в организации и какой объем работы должен выполнять каждый исполнитель, чтобы организация в целом работала эффективно?. Эта задача рассматривается во многих работах. Однако в них за рамками исследования остаются затраты на иерархию управления исполнителями (как правило иерархия предполагается двухуровневой), что не позволяет говорить об оптимальной организации.

В качестве критерия эффективности организации можно рассматривать прибыль – разность между доходом от выполнения исполнителями своих функций и расходами на содержание всех сотрудников, как менеджеров, так и исполнителей. В условиях полной информации расходы удастся снизить до суммы затрат сотрудников с помощью компенсаторной системы стимулирования [7]. Поэтому для решения задачи об оптимальной многоуровневой организации достаточно максимизировать разность дохода и затрат всех сотрудников с учетом

**возможности построения многоуровневой иерархии.** То есть в условиях полной информации достаточно совместно оптимизировать фазы I и II, после чего применить механизм компенсаторного стимулирования для управления организацией. Ниже формально описана соответствующая модель, которая и является основным результатом настоящей работы. Ее исследование даст в дальнейшем возможность обобщать полученные результаты на случай неполной информации, в котором требуется создание сложных механизмов управления (контрактов, учитывающих неопределенность).

Модель базируется на следующих предположениях:

1. Имеется некоторый центр (капитала, авторитета и т.п.), желающий создать (перестроить) организацию с целью получения максимальной прибыли, и множество отдельных агентов, которые могут быть для этого привлечены в качестве исполнителей или менеджеров<sup>4</sup>.
2. При выполнении исполнителем некоторого объема работ (за фиксированный период)  $m \geq 0$  он несет затраты, определяемые выпуклой функцией  $c_w(m)$ , а центр получает линейный доход  $m$ .
3. Пусть непосредственные подчиненные менеджера управляют группами  $s_1, \dots, s_k$ , которые выполняют объемы работ  $y_1, \dots, y_k$ . Тогда затраты менеджера определяются секционной функцией, зависящей только от объемов работ:  $c(s_1, K, s_k) = c(y_1, K, y_k)$ .

При указанных предположениях для построения оптимальной организации центр должен сделать следующие шаги:

<sup>4</sup> Считаем, что рассматриваются некоторые должностные позиции, на которые привлекаются сотрудники соответствующей квалификации. При этом затраты считаются равными средним затратам в данной области деятельности, то есть не зависящими от эффективности конкретного агента. Подобный подход оправдан в больших организациях, где колебаниями индивидуальной эффективности отдельных агентов можно пренебречь.

1. Определить оптимальный объем выполняемой организацией работы  $m \geq 0$ , оптимальное число  $n \geq 1$  исполнителей и выполняемые ими объемы работ  $m_1, K, m_n$ ,  $m = m_1 + K + m_n$ .

2. Определить оптимальную иерархию менеджеров, управляющих исполнителями.

3. Заключить с каждым из сотрудников следующий контракт: сотруднику компенсируются его затраты, если подчиненная ему группа исполнителей выполняет определенный центром объем работ, в противном случае выплачивается ноль.

В результате затраты всех исполнителей составят:

$$(3) \quad c_w(m_1) + K + c_w(m_n).$$

Прибыль (полезность) центра от наличия организации будет равна выручке  $m$  уменьшенной на величину затрат на исполнителей (3) и затрат на оптимальную иерархию управления. Итак, **задача построения оптимальной организации имеет вид:**

$$(4) \quad \max_{m \geq 0, n \geq 1} \max_{m_1 + K + m_n = m} [m - c_w(m_1)K - c_w(m_n)] - \min_{H \in \Omega(N)} c(H).$$

Наиболее перспективны для исследования классы функций затрат менеджера, для которых решена задача оптимизации иерархии (внутренняя задача минимизации в выражении (4)). Для подобных функций осталось решить обычную задачу максимизации функции по нескольким переменным, что можно сделать численно, а в ряде случаев и аналитически. Таким образом, весьма перспективным направлением исследований является решение задачи максимизации (4) для различных классов функций, интерпретация полученных результатов и количественное объяснение наблюдаемых на практике организационных эффектов (пределы роста организаций, связь вида и характеристик организации с параметрами модели (такими параметрами функций затрат, как эффективность менеджеров, их заинтересованность, нестабильность внешней среды, виды взаимодействия в группах – учет этих характеристик возможен в рамках секционных функций затрат)). Одним из интересных вопросов – в каких случаях эффективны иерархические организации, а в каких – отдельные независимые исполнители? В первом случае

решение задачи (4) будет иметь место при  $n > 1$ , во втором – при  $n = 1$  (минимальный предел роста).

### Литература

1. Воронин А. А., Мишин С.П. *Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы* // *АиТ*. 2002а. №5. С. 120–132.
2. Воронин А. А., Мишин С.П. *Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева* // *Вестн. Волг. ун-та*. 2001. Сер. 1: Математика. Физика. С. 78–98.
3. Воронин А. А., Мишин С.П. *Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы* // *АиТ*. 2002б. №8. С. 136–150.
4. Воронин А.А., Мишин С.П. *Оптимальные иерархические структуры*. М.: ИПУ РАН, 2003. – 214 с.
5. Дементьев В.Т., Ерзин А.И., Ларин Р.М. и др. *Задачи оптимизации иерархических структур*. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1996.
6. Мишин С.П. *Динамическая задача синтеза оптимальной иерархической структуры* // *Управление большими системами*. Выпуск 3. М.: ИПУ РАН, 2003. С. 55–75.
7. Мишин С.П. *Оптимальное стимулирование в многоуровневых иерархических структурах* // *Автоматика и телемеханика*, №5, 2004. С. 96 – 119.
8. Мишин С.П. *Оптимальные иерархии управления в экономических системах*. М.: ПМСОФТ, 2004. – 205 с.
9. Овсиевич Б.И. *Модели формирования организационных структур*. Л.: Наука, 1979.
10. Цвиркун А.Д. *Основы синтеза структуры сложных систем*. М.: Наука, 1982.
11. Mintzberg H. *The structuring of organizations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1979.