

БИЗНЕС-ЕДИНИЦА В СТОХАСТИЧЕСКОМ ОКРУЖЕНИИ: ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РЕИНВЕСТИРОВАНИЯ

Соколов Д.Г.
(МФТИ, Москва)

1. Введение

Одной из наиболее важных проблем, характерных для большинства российских предприятий в настоящий момент, является острая нехватка оборотных средств, причем в большинстве случаев эту нехватку невозможно скомпенсировать заемными оборотными средствами. Как следствие, задача оптимального управления собственными оборотными средствами имеет первостепенное значение для эффективной работы предприятий и фирм. Методы и модели управления оборотными средствами в строго детерминированном окружении достаточно хорошо изучены ([2], [3]), для них получены рабочие методики и механизмы, позволяющие значительно повышать эффективность работы как отдельных бизнес-единиц, так и всего предприятия в целом. Что касается управления в стохастическом окружении, когда результат работы бизнес-единиц не известен заранее, а зависит от множества случайных факторов, то в настоящее время практически не существует работ, рассматривающих построение оптимальных механизмов управления финансовыми потоками.

В данной работе предлагается модель финансового потока бизнес-единицы, функционирующей в стохастическом окружении. Рассматривается задача оптимального управления собственными оборотными средствами бизнес-единицами, которая формулируется как задача минимизации риска функционирования бизнес-единицы при заданном уровне ожидаемой отдачи от нее. Показано, что данная задача может быть сведена к стандартной задаче выбора оптимального портфеля.

Работа построена следующим образом. Во второй части рассматривается модель бизнес-единицы, функционирующей в стохастическом окружении, вводится множество переменных (рычагов) управления, формулируются критерии работы бизнес-единицы (ожидаемая отдача, риск). Во третьей части формулируется задача оптимального управления бизнес-единицей. Четвертая часть предлагает методику сведения задачи оптимального реинвестирования к задаче выпуклого программирования.

В заключительной части предлагаются возможные направления продолжения исследований.

2. Бизнес-единица в стохастическом окружении

В данной части предлагается модель финансового потока бизнес-единицы, функционирующей в стохастическом окружении. Базовой моделью финансового потока является модель бизнес-процесса с детерминированным результатом, предложенная в работе [2]. Построение модели начнем в формализации основных понятий.

Под бизнес-процессом далее понимается деятельность, приносящая фирме финансовые результаты (в противоположность вспомогательным бизнес-процессам). Рассмотрим типичную для многих российских предприятий ситуацию. В одноуровневой организации, реализующей один основной БП, имеются ограниченные финансы, избыточные мощности и обеспечивающие службы, т.е. дополнительные расходы на расширение бизнеса не нужны. Для увеличения притока денежных средств нужно нарастить объем продаж, на что в данной ситуации требуются только дополнительные прямые (переменные) затраты. То есть будем предполагать, что бизнес-единица не имеет накладных расходов – все затраты на производство прямо пропорциональны объему выпуска.

Элементарный стохастический бизнес-процесс (ЭБП) – это одна операция продолжительностью t , в начале которой вкладывается (расходуется) сумма C_0 , а через время t возвращается большая сумма $S(t)$, которая не известна заранее, а является случайной величиной.

Это упрощенное описание на практике соответствует последовательному изменению оборотного капитала по финансово-производственной цепочке “денежные средства – сырье и материалы – незавершенное производство – готовая продукция – дебиторская задолженность – оплата обязательств – денежные средства”. Такая идеализированная картина достаточно хорошо описывает перетоки капитала на предприятиях, хотя возможно добавление других промежуточных звеньев (бартер, взаимозачеты и т.д.). При этом “движение оборотного капитала в течение полного срока оборачиваемости эквивалентно описанию последовательности бизнес-процессов” [1].

Важнейшим показателем эффективности ЭБП является его рентабельность $r = \frac{S(t) - C_0}{C_0}$, которая также является случайной величиной. По

сделанному выше предположению в C_0 учитываются только прямые затраты, т.е. r – это маргинальная (стохастическая) рентабельность ЭБП.

Рассмотрим цепочку из n последовательно выполняемых ЭБП. В конце каждой операции (ЭБП) полученную маржинальную прибыль руководство может вложить в финансирование следующего ЭБП, либо потратить в данный момент времени всю сумму или ее часть (например, на выплату коммерческих расходов, на финансирование других бизнес-единиц и т.д.). Любое снятие денег после окончания ЭБП будем называть потреблением.

Таким образом, функционирование бизнес-единицы происходит следующим образом. В начальный момент времени бизнес-единице передаются оборотные средства в размере C_0 , которые вкладываются в производство, а произведенная продукция продается. При этом отдача (оборотные средства после реализации бизнес-процесса) не известны заранее, являются случайной величиной: $F_1 = (1 + r_1) \cdot C_0$. Из имеющейся суммы оборотных средств на конец первого периода часть V_1 снимается на потребление корпорации, а оставшаяся часть $F_1 - V_1$ реинвестируется. Соответственно, оборотные средства бизнес-единицы на начало первого периода равны $C_1 = F_1 - V_1 = C_0 \cdot (1 + r_1) - V_1$. Эти средства вкладываются в производство, результат (оборотные средства) на конец первого периода равны $F_2 = C_1 \cdot (1 + r_2)$, часть этих средств реинвестируется, а часть снимается на потребление. Для произвольного момента времени можно записать движение оборотных средств в следующем виде:

$$C_t = F_t - V_t = C_{t-1} \cdot (1 + r_t) - V_t.$$

При этом переменные $\{V_t\}$ являются “переменными управления”, т.е. теми параметрами, с помощью которых Центр может повышать эффективность реализации бизнес-процесса.

В следующей части в явном виде рассматривается понятие оптимальности функционирования бизнес-процесса и формулируется задача оптимального управления.

3. Постановка задачи оптимального реинвестирования

Основное отличие задачи оптимального управления в детерминированном окружении и стохастическом состоит в том, что в случае детерминированного окружения результат реализации бизнес-процесса известен заранее, в стохастическом окружении результат также стохастичен, поэтому кроме среднего ожидаемого чистого приведенного дохода следует принимать во внимание и риски, ассоциированные с тем или иным решением по снятию средств на потребление, т.е. риск (дисперсию) этого

дохода. Другими словами, задача оптимального управления реализацией бизнес-процесса в стохастическом окружении должна также учитывать дополнительное ограничение по рискованности бизнес-процесса.

Очевидно, что понятие оптимальности управления бизнес-процессом должно основываться на усредненных по различным возможным реализациям случайных величин критериях. В качестве естественных критериев оптимальности работы бизнес-единицы в данной работе рассматриваются математическое ожидание отдачи от реализации бизнес-процесса и риск этой отдачи, измеряемый дисперсией этой отдачи. При этом математическое ожидание отдачи понимается в смысле математического ожидания чистой приведенной стоимости бизнес-процесса (NPV) за плановый период T , которая включает сумму дисконтированных снятых на потребление величин $\{V_t\}_{t=1}^{T-1}$ и дисконтированного остатка оборотных средств на конец планового периода F_T за вычетом начальных вложений C_0 . Максимизация производится по набору переменных $\{a_t\}_{t=1}^{T-1}$, где a_t – доля снимаемых на потребление средств в периоде t .

Сформулируем задачу оптимального управления финансовым потоком бизнес-единицы в стохастическом окружении. Задача формулируется как задача выбора оптимальных долей снимаемых средств, которые минимизируют дисперсию финансового результата бизнес-процесса при заданном уровне ожидаемого дохода (двойственной задачей является задача максимизации ожидаемого дохода при заданном уровне риска).

Если d – коэффициент дисконтирования, C_0 – начальный уровень оборотных средств, $\{r_t\}_{t=1}^T$ – (стохастические) коэффициенты рентабельности, то в общем случае задача имеет вид:

$$(1) \text{Var}_0[\text{NPV}] \rightarrow \min,$$

$$(2) E_0[\text{NPV}] \geq ER,$$

$$(3) \text{NPV} = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{V_t}{(1+d)^t} + \frac{F_T}{(1+d)^T},$$

где ER – заданное (минимальное) значение ожидаемого дохода, через $E_0[\dots]$ обозначено математическое ожидание в нулевой момент времени, причем оптимизация ведется с учетом ограничений (балансов) на движение финансовых средств:

$$(4) F_t = C_{t-1} (1 + r_t),$$

$$(5) V_t = a_t F_t,$$

$$(6) F_t = V_t + C_t.$$

Первое уравнение отражает изменение оборотных средств в результате реализации бизнес-процесса в один период, второе выражает величину снимаемых на потребление средств через долю в общей сумме оборотных средств, третье выражение отражает разбиение всей суммы оборотных средств на потребление и реинвестирование.

Здесь и далее предполагается, что случайные величины $\{r_t\}_{t=1}^T$ не могут принимать значения меньше -1 , так что величина оборотных средств, полученных в результате реализации бизнес-процесса, всегда положительна.

Используя формулы (4)–(6), выражение для NPV (без учета начальных вложений C_0 , которые являются аддитивной константой и не влияют на оптимизацию) можно преобразовать к следующему виду:

$$(7) NPV = C_0 \left(\sum_{i=1}^{T-1} \frac{a_i \prod_{k=1}^{i-1} (1-a_k) \prod_{k=1}^i (1+r_k)}{(1+d)^i} + \frac{\prod_{k=1}^{T-1} (1-a_k) \prod_{k=1}^T (1+r_k)}{(1+d)^T} \right).$$

Таким образом, задача оптимального управления финансовым потоком бизнес-единицы представляет собой задачу оптимального выбора долей реинвестирования $\{a_t\}_{t=1}^{T-1}$, $1 \geq a_t \geq 0$, таких, что дисперсия результата от работы бизнес-единицы минимальна при заданном математическом ожидании результата.

В следующей части показано, что данная задача может быть сведена к стандартной задаче выбора оптимального (в пространстве доходность – риск) портфеля инвестиций с помощью преобразования переменных управления.

4. Задача оптимального реинвестирования как задача выбора оптимального портфеля

Сформулированная выше задача при соответствующем преобразовании переменных управления есть задача построения оптимального инвестиционного портфеля, получившая широкое распространение в литературе (см. [4], [6]).

Введем следующие обозначения. Пусть R_i – дисконтированный доход на инвестиции в бизнес-единицу (случайная величина) за i периодов (дисконтированный коэффициент наращивания бизнеса), т.е.

$$(8) R_i = \frac{\prod_{k=1}^i (1+r_k)}{(1+d)^i}, i = 1..T.$$

Пусть также «веса», соответствующие различным R_i обозначаются через

$$(9) g_i = \left\{ \begin{array}{l} a_i \cdot \prod_{k=1}^{i-1} (1-a_k), i = 1..T-1 \\ \prod_{k=1}^{T-1} (1-a_k), i = T \end{array} \right\}.$$

Тогда NPV финансового потока бизнес-единицы имеет вид (см. формулу (7), без учета начальных вложений):

$$(10) NPV = \sum_{i=1}^T g_i R_i.$$

Можно показать, что при этом между наборами переменных управления $\{a_t\}_{t=1}^{T-1}$ и $\{g_t\}_{t=1}^T$ существует и обратное соответствие

$$(11) a_k = \frac{g_k}{1 - \sum_{i=1}^{k-1} g_i},$$

для значений $\{g_t\}_{t=1}^T$, удовлетворяющих

$$(12) 0 \leq g_k \leq 1 \forall k = 1..T, \sum_{k=1}^T g_k = 1.$$

Другими словами задача максимизации (1)–(3), (7), сформулированная в терминах исходных переменных управления $\{a_t\}_{t=1}^{T-1}$, $1 \geq a_t \geq 0$, эквивалентна задаче (1)–(3), (10), сформулированной в терминах $\{g_t\}_{t=1}^T$, удовлетворяющих (12). При этом решение исходной задачи получается как преобразованное по формуле (11) решение задачи

$$(13) Var_0 \left[\sum_{i=1}^T g_i R_i \right] \rightarrow \min,$$

$$(14) E_0 \left[\sum_{i=1}^T g_i R_i \right] \geq ER,$$

$$(15) \sum_{i=1}^T g_i = 1, g_i \geq 0.$$

Заметим, что задача (13)–(15) есть задача выбора оптимального портфеля инвестиций, если под R_i (дисконтированный стохастический коэффициент наращения бизнеса) понимать «доходности активов», а под g_i – веса этих активов в портфеле. При этом ограничение (15) соответствует частному случаю задачи выбора оптимального портфеля (см., например, [6]) с запретом на «короткие позиции». В литературе также показано, что задача выбора оптимального портфеля является задачей выпуклого программирования (при нахождении портфеля, лежащего на эффективной границе), а также предложены методы решения данной задачи (см. [6]).

5. Заключение

В данной работе предложена модель бизнес-единицы, функционирующей в стохастичном окружении (с недетерминированным уровнем рентабельности). Сформулирована задача оптимального управления финансовым потоком бизнес-единицы как выбор долей снятия, которые минимизируют дисперсию результата от работы бизнес-единицы при заданном уровне ожидаемого дисконтированного дохода. Показано, что сформулированная задача сводится к стандартной задаче формирования оптимального портфеля инвестиций.

Среди возможных продолжений исследования можно выделить два направления. Первое связано с поиском алгоритмов решения задачи, учитывающих специфику задачи (таких, что их можно было бы применять в режиме реального времени при финансовом анализе на предприятиях). Также интересно рассмотрение задачи с ограничением по максимально возможному уровню производства (режим «пила», см. [3] для детерминированного случая).

Второе направление состоит в изменении понятия оптимальности. Так, например, в финансовой литературе и литературе по оценке эффективности инвестиций в стохастическом окружении (см., [5], [7]) получила широкое распространение такая мера эффективности, как отношение Шарпа (отношение ожидаемого дохода к риску). Данная мера эффективности позволяет перейти от многокритериальной задачи к задаче оптимизации одного критерия, что может найти более широкое применение на практике.

Литература

1. ВИННИК А.А., ИРИКОВ В.А., ПАРФЕНОВА А.А. *Подготовка и принятие решений по управлению финансовыми потоками бизнес-единиц*. М.: ИПУ РАН, 1999. – 95 с.
2. ВИННИК А.А., ДРАНКО О.И., ИРИКОВ В.А. *Движение оборотного капитала. Подготовка и принятие решений по управлению пассивами и активами*. М.: ИПУ РАН, 1999. – 87 с.
3. СОКОЛОВ Д.Г. *Параметрическое исследование реализации бизнес-процесса*. Магистерская диссертация, МФТИ, 2000.
4. COCHRANE J.H. *Asset pricing*. Princeton: Princeton University Press, 2001, – 530 p.
5. COCHRANE J.H. *The risk and return of venture capital*. Working paper, University of Chicago, 2001.
6. FAMA E.F. *Foundations of finance. Portfolio decisions and securities prices*. New York: Basic Books, Inc., Publishers, 1976. – 389 p.
7. PESARAN M.H., TIMMERMANN A. *Predictability of stock returns: robustness and economic significance* // The Journal of Finance. Vol. 50. 1995. № 5. P. 1201 – 1228.