ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Мишин С.П.
(*Волгоградский государственный университет*)
smishin@newmail.ru

Введение

Под системой в самом общем смысле слова обычно понимают совокупность некоторых элементов и связей между ними. Понятие организационной системы включает в себя также “поведение” отдельных элементов и подсистем, которое связано с целенаправленностью. Обычно целенаправленность определяется как оптимизация некоторого функционала [11]. Организационные системы характерны для самых различных сфер человеческой деятельности: экономической, социальной, военной и т.п., что и обусловливает актуальность их изучения. Несмотря на большое количество работ (см. [17] и др.) по проблемам математического моделирования структур организационных систем, в настоящее время не только не создана общая их теория, но отсутствует даже общепринятое определение см., например [10, 14], не сводящееся к перечислению различных примеров, а имеющиеся модели касаются отдельных аспектов функционирования конкретных систем.

Важнейшим свойством организационных систем является иерархичность структуры, то есть определенная соподчиненность элементов и подсистем [19]. В то же время пока не создано единого методологического подхода к исследованию организационных систем как многоуровневых систем с иерархической структурой [14, 17]. Причем наименее разработанной является проблема синтеза иерархической структуры: поиск структуры общего вида, оптимальной в смысле некоторого критерия. В подавляющем большинстве существующих моделей [10, 18, 19] рассматриваются только древовидные структуры, а ограничения, критерий оптимальности и методы исследования определяются спецификой конкретной задачи. Очевидно, что в общем случае критерий оптимальности может быть произвольным, возможно множественное подчинение, наличие нескольких элементов верхнего уровня.

В работе [15] исследуется абстрактное множество иерархических структур общего вида (ориентированных ациклических графов) с произвольным критерием оптимальности (функционалом). При определенных ограничениях методы решения этой задачи описаны в [5, 6, 7, 8]. Поставленную задачу можно назвать задачей статической оптимизации. Однако,

поскольку оптимальная структура неявным образом зависит от “внешних условий”, актуальной является и задача “динамической оптимизации”, то есть поиск оптимальной иерархической структуры на заданном временном интервале с учетом изменений “внешней среды”. В этом случае кроме эффективности структуры необходимо учитывать и “гибкость” ее перестроения при изменениях среды. Эта задача является ключевой в некоторых моделях “устойчивого развития” [4]. Динамическая оптимизация напрямую связана и с проблемой выбора оптимального числа уровней иерархии в зависимости от внешних условий, которая обсуждается в большинстве работ, например [20], лишь на качественном уровне.

В данной работе рассматривается формальная математическая модель количественного анализа оптимального баланса “статической” и “динамической” эффективности структуры организационной системы. При этом оптимизация структуры рассматривается отдельно от остальных свойств системы (например, законов ее функционирования). То есть структура изучается “сама по себе”, что и обусловливает название работы.

1. Определение иерархической структуры

Определение 1. Множество элементов назовем конечное множество $N=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Группой элементов назовем любое непустое подмножество N. Множество групп обозначим через $F=2^N\setminus\{\varnothing\}$. Мощностью группы $g\in F$ назовем количество содержащихся в ней элементов $|g|$. Элементарной группой назовем группу единичной мощности.

Для организационной системы множество элементов соответствует множеству конечных исполнителей, выполняющих некоторые технологические операции, необходимые для выполнения системой своих функций (выпуск изделий, оказание услуг и т.п.). Основная задача структуры системы – организация взаимодействия элементов в некоторых группах, каждая из которых реализует некоторую функцию системы. Формально определим структуру следующим образом.

Определение 2. Ориентированный ациклический граф $G=(V,E)$ назовем графом организации (организацией) над множеством элементов N, если выполнены следующие условия:

a) в вершинах графа находятся группы элементов, то есть для любой вершины $g\in V$ выполнено $g\in F$;

b) для любой группы $g\in V\setminus N_G$ выполнено $g=\bigcup_{h\in Q_G(g)} h$, где через $Q_G(g)=\{h:h\in V,(h,g)\in E\}$ обозначено множество вершин графа G, из которых идут ребра в g, а через $N_G = \{g \in V : Q_G(g) = \varnothing\}$ обозначено множество начальных вершин G.

с) Любая группа $g \in N_G$ элементарна.

Будем говорить, что группа $g \in V \setminus N_G$ организуется из подгрупп множества $Q_G(g)$. Группы $g \in V$, из которых не выходит ребер, назовем терминальными. Множество терминальных групп обозначим через T_G.

Таким образом, в графе организации каждая неначальная группа $g \in V \setminus N_G$ организуется из непосредственно подчиненных ей подгрупп (то есть g равна объединению подгрупп из $Q_G(g)$). Начальные (“нижние”) вершины графа, в которые не входит ребер, являются элементарными группами.

Определение 3. Функционалом стоимости организации $G = (V, E)$ назовем величину $P(G) = \sum_{g \in V \setminus N_G} P(g_1, \ldots, g_k)$ (*), где $Q_G(g) = \{g_1, \ldots, g_k\}$, $P(g_1, \ldots, g_k) \geq 0$ – величина, зависящая от набора групп $g_1, \ldots, g_k$, а не от графа G, и не изменяющаяся при перестановке групп набора $g_1, \ldots, g_k$.

Таким образом, стоимость G складывается из суммы стоимостей организации всех неначальных групп $g \in V \setminus N_G$ – неотрицательных величин, зависящих от набора подгрупп, из которых организуется g.

Определение 4. Множество организаций, в которые входят заданные неэлементарные группы $f_1, \ldots, f_m$, обозначим через $O(\mathbf{f})$, где $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_m\}$. Любой граф из $O(\mathbf{f})$ назовем организацией набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_m\}$. Не начальную группу, отличную от $f_1, \ldots, f_m$, назовем промежуточной. Задачу поиска организации минимальной стоимости на множестве $O(\mathbf{f})$ назовем задачей об оптимальной (в статике) организации.

То есть задача об оптимальной организации соответствует задаче поиска структуры, организующей взаимодействие элементов в некоторых группах, необходимых для выполнения системой своих функций. Считаем, что все терминальные вершины графов из $O(\mathbf{f})$ содержатся среди групп набора $\mathbf{f}$, т.к. иначе их можно удалить без увеличения стоимости.

Как указано в работе [15], если задано произвольное множество структур (ориентированных ациклических графов) с произвольным функционалом стоимости, то при выполнении так называемого свойства структурности функционала общая задача сводится к задаче на некотором множестве графов организации (см. опр. 2) с функционалом стоимости (*). То есть поставленная задача об оптимальной организации имеет достаточно общий характер. Одним из содержательных примеров, соот-

ветствующим частному случаю указанной задачи, является задача об оптимальной организации технологического взаимодействия элементов [9].

Статические модели поиска оптимальной структуры как раз и предполагают минимизацию некоторого критерия оптимальности на определенном множестве структур. Ключевым моментом при определении статической модели является выбор функционала стоимости. Для различных примеров организационных систем (например, для отраслей промышленности) накоплен огромный эмпирический материал, позволяющий определить некоторые агрегированные параметры структуры. Например, норма управляемости (максимальное число подчиненных) [2], численность управленческого персонала [13] и т. п. Такие исследования позволяют сравнивать некоторые “типичные” структуры и выбирать из них наиболее подходящую для конкретной системы. Тестирование функционалов на этих “типичных” вариантах позволяет уточнять их вид и параметры, исходя из эмпирических данных и результатов моделирования (примеры функционалов различного вида исследованы в работах [6, 7]). Ниже считаем, что функционал стоимости некоторым образом задан.

Определение 5. Последовательной организацией назовем граф $G = (V, E) \in O(N)$, для любой вершины $g \in V \setminus N_G$ которого выполнено $Q_G(g) = \{g_1, g_2\}$, причем хотя бы одна из групп g_1, g_2 элементарна. Через $O_p(\mathbf{f})$ обозначим множество последовательных организаций из $O(\mathbf{f})$.

Определение 6. Веерной организацией групп $f_1, \ldots, f_m$ назовем организацию, которая содержит группы $f_1, \ldots, f_m$ и элементарные группы $\{a\} \subseteq f_1 \cup \ldots \cup f_m$, причем каждая группа $f_1, \ldots, f_m$ организуется из составляющих ее элементарных подгрупп.

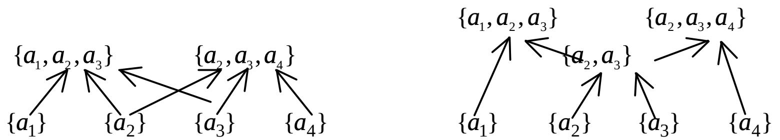

Рис. 1. Примеры графов организации

Примеры организаций приведены на рис. 1. Слева изображена веерная организация групп $f_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $f_2 = \{a_2, a_3, a_4\}$, при которой элементы организуются в группы f_1 и f_2 без промежуточных групп. Справа приведен пример последовательной организации групп f_1 и f_2.

Элементы a_2 и a_3 организуются в промежуточную группу $\{a_2, a_3\}$, которая используется как для организации f_1, так и для организации f_2.

2. Динамическая задача оптимизации структуры

В работах [5, 6, 7, 8] описаны методы решения задачи об оптимальной организации, то есть методы статического моделирования. При переходе от статических моделей к динамическим будем считать, что функционал P соответствует стоимости функционирования системы (затратам) в течение некоторой единицы времени. Если “ситуация” некоторым образом изменяется, то старая структура может “не отвечать новым требованиям” и необходима реструктуризация (перестроение), требующая некоторых затрат. В [16] определена стоимость реорганизации $r(G', G'')$ графа G' в граф G'', т. е. стоимость перестроения организации G' в организацию G'' (в частности, стоимость $r(\varnothing, G)$ создания организации G “с нуля” и стоимость $r(G, \varnothing)$ деорганизации G). Стоимость реорганизации вычисляется на основании известных величин: $r'(a)$ – стоимость исключения исполнителя a из группы; $r''(a)$ – стоимость включения исполнителя a в группу. Тогда G' реорганизуется в G'' путем последовательного исключения и включения исполнителей. Стоимость реорганизации $r(G', G'')$ равна минимальной суммарной стоимости всех исключений и включений (подробнее см. [16]) и при $r'(a) = r''(a) > 0$ будет метрикой на множестве графов организации.

Вопрос о выборе критерия оптимальности в динамике для организационных систем не имеет однозначного решения [3, 12]. В отсутствии исчерпывающего прогноза изменений внешней среды постановки оптимизационных задач неизбежно включают в себя элементы эмпирики. Ниже мы рассмотрим один из возможных эмпирических критериев, который при необходимости может быть модифицирован.

Ограничения на траектории структур (графов) могут описываться различным образом. В качестве одного из вариантов аппарата описания траекторий структурных изменений отметим приведенное в [1] построение так называемых “уравнений графодинамики”. Ниже в мы рассматриваем единственное ограничение на преобразования структуры – в каждый момент времени она должна быть графом организации некоторого набора групп, определяемого “внешней средой”. Рассмотрим структуру не протяжении T единиц времени.

Определение 7. Через $\mathbf{f}^t = \{f_1^t, \ldots, f_{m^t}^t\}$, $t = \overline{1, T}$ обозначим определяемый “внешней средой” набор групп элементов, которые должны быть организованы на протяжении единицы времени t для выполнения организационной системой некоторых функций.

Определение 8. Структурой организационной системы на протяжении единицы времени t назовем любой граф организации $G^t \in O(\mathbf{f}^t)$ набора групп $\mathbf{f}^t$.

В работе [7] описана модель организационной системы, в которой изменение набора организуемых групп происходит при снижении цен на одни выпускаемые изделия и повышении цен на другие, в результате чего некоторый “управляющий орган”, стремящийся максимизировать выручку (доход) системы, принимает решение о прекращении выпуска одних изделий и начале выпуска других. Как правило “управляющий орган” находится внутри организационной системы (руководит ей). Однако предмет исследования данной работы – структура. Поэтому решение “управляющего органа” мы относим к “внешним условиям”, считая что выбор структуры осуществляется по некоторым образом заданному набору групп. То есть задача оптимизации структуры решается отдельно от остальных задач управления организационной системой. Такой поход позволяет исследовать структурные явления “сами по себе” и возможно будет в какой-то мере способствовать построению общей модели оптимального управления организационной системой.

Определение 9. Множество всевозможных наборов групп из F обозначим через $\mathbf{F}$. Информацией о внешней среде, известной к началу единицы времени t, считаем наборы групп $\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^t$. Динамикой внешней среды назовем наборы $\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^T$.

Таким образом, к началу единицы времени t известно, какой набор групп $\mathbf{f}^t$ нужно организовать, и какие наборы групп нужно было организовать на протяжении предыдущих единиц времени. То есть известна “история” изменения внешней среды.

Определение 10. Управлением структурой организационной системы в момент времени t назовем отображение $\Psi^t : \underbrace{\mathbf{F} \times \ldots \times \mathbf{F}}_{t} \times O(\mathbf{f}^{t-1}) \to O(\mathbf{f}^t)$, первые t аргументов которого представляют собой информацию о внешней среде, а последний – структуру системы на протяжении единицы времени $t-1$, $t = \overline{2, T}$. Управлением в первый момент времени назовем отображение $\Psi^1 : \mathbf{F} \to O(\mathbf{f}^1)$. Совокупность управлений Ψ^t на изучаемом отрезке времени обозначим через $\Psi = (\Psi^1, \ldots, \Psi^T)$ и назовем управлением.

Определение 11. Управление структурой назовем простейшим, если для любого $t = \overline{1,T}$ выполнено $\Psi^t : \mathbf{F} \to O(\mathbf{f}^t)$.

Управление структурой в момент времени t определяет $G^t \in O(\mathbf{f}^t)$ – граф организации заданного внешней средой набора групп $\mathbf{f}^t$, то есть структуру организационной системы на протяжении единицы времени t, исходя из известной информации о внешней среде и “текущей” структуры системы, то есть структуры на протяжении единицы времени $t-1$. Структура в первый момент времени выбирается из множества $O(\mathbf{f}^1)$ без учета какой-либо информации, так как к этому моменту известен лишь набор групп $\mathbf{f}^1$. Простейшее управление структурой выбирает G^t из множества $O(\mathbf{f}^t)$ без учета информации о состоянии внешней среды в предыдущие единицы времени и без учета “текущей” структуры системы.

Определение 12. Результатом управления структурой назовем величину $R(\mathbf{f}^1, \ldots \mathbf{f}^T, \Psi) = \left[\sum_{t=\overline{1,T}} (P(G^t) + r(G^{t-1}, G^t))\right] / T$, где $G^0 = G^1 = \Psi^1(\mathbf{f}^1)$, $G^t = \Psi^t(\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^t, G^{t-1})$ для $t = \overline{2,n}$. Первую и вторую часть результата соответственно обозначим через $P(\mathbf{f}^1, \ldots \mathbf{f}^T, \Psi) = (\sum_{t=\overline{1,T}} P(G^t)) / T$ и $r(\mathbf{f}^1, \ldots \mathbf{f}^T, \Psi) = (\sum_{t=\overline{1,T}} r(G^{t-1}, G^t)) / T$. Если динамика внешней среды задана, то используем запись $R(\Psi)$, $P(\Psi)$, $r(\Psi)$.

Результат управления структурой при каждом t складывается из затрат на функционирование системы, определяемых функционалом P, и из затрат на реструктуризацию $r(G^{t-1}, G^t)$, то есть из стоимости создания (построения) структуры G^t из сложившейся к началу единицы времени t структуры G^{t-1}. Считаем, что в первый момент времени структура G^1 “уже имеется” и не требует затрат на построение ($G^0 = G^1$). Результат зависит от динамики внешней среды $\mathbf{f}^1, \ldots \mathbf{f}^T$ и от управления Ψ, определяющего структуры $G^1, \ldots, G^T$.

Определение 13. Оптимальным управлением назовем управление структурой Ψ, минимизирующее результат, то есть $\arg\min_{\Psi} R(\mathbf{f}^1, \ldots \mathbf{f}^T, \Psi)$.

Таким образом, оптимальное управление минимизирует средние затраты на функционирование системы и на реструктуризацию на протяжении конечного числа единиц времени T. Оптимальное управление зависит от динамики внешней среды $\mathbf{f}^1, \ldots \mathbf{f}^T$, которая, как правило, заранее

неизвестна. В работе [7] определено управление в среднем при некотором прогнозе (вероятностном распределении) динамики внешней среды.

Задача об оптимальном управлении представляется весьма сложной для аналитического решения. Однако, если отображения $\Psi^1, \ldots, \Psi^T$ эффективно вычисляются, то результат управления структурой при заданной динамике внешней среды $\mathbf{f}^1, \ldots \mathbf{f}^T$ также может быть эффективно вычислен. Таким образом, если рассматривается набор эффективно вычисляемых управлений, то среди них можно найти оптимальное.

3. Пример простейших управлений структурой

Определение 14. Для произвольного графа организации $G = (V, E) \in O(N)$ уровнем $L_G(g)$ вершины $g \in V$ назовем максимальную длину пути из g в терминальную вершину.

Уровень любой вершины конечен в силу ацикличности графа организации. Уровень терминальных вершин нулевой, уровень остальных вершин равен максимальной длине цепочки “начальников” данной вершины, то есть максимальной длине пути в терминальную вершину.

Определение 15. Уровнем $L(G)$ графа $G = (V, E) \in O(N)$ назовем максимальный уровень вершины графа: $L(G) = \max_{g \in V} L_G(g)$.

Утверждение 1. Для организации $G = (V, E) \in O(\mathbf{f})$ набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ выполнено $L(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G – веерная организация.

Доказательство. Пусть G – веерная организация. Все терминальные вершины G входят в набор $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_m\}$. Если бы существовал путь длины два или более в терминальную вершину f_i, то нашлась бы промежуточная вершина $g \notin \mathbf{f}$, $|g| > 1$, что противоречит определению веерной организации. Таким образом, $L(G) = 1$.

Пусть $L(G) = 1$. Если неэлементарная вершина $g \in V$ не принадлежит набору $\mathbf{f}$, то g не является терминальной и из нее выходит по крайней мере одно ребро. В силу неэлементарности g в нее также входит ребро. То есть в G существует путь длины 2, что противоречит $L(G) = 1$. Итак, V состоит из групп $f_1, \ldots, f_m$ и элементарных групп. Группа f_i, $i = \overline{1,m}$ организуется из элементарных подгрупп, так как иначе в G нашелся бы путь длины 2. То есть G – веерная организация. Утверждение доказано.

Таким образом, веерная организация и только она имеет минимальный уровень среди всех организаций множества $O(\mathbf{f})$.

Определение 16. Для произвольного графа организации $G=(V,E)\in O(\mathbf{f})$ набора групп $\mathbf{f}=\{f_1,\ldots,f_m\}$ назовем l-усечением графа G, $l\ge 1$ граф $G_l\in O(\mathbf{f})$, который получается в результате следующей процедуры. Удалим из G неначальные вершины с уровнем, большим или равным l, вместе с инцидентными им ребрами. Получим граф $G'=(V',E')$, где $V'=(V\setminus\{g:L_G(g)\ge l\})\cup N_G$. Если неначальная вершина $g\in V'$ не покрывается в G' подгруппами из $Q_{G'}(g)$, то добавляем к E' ребра $(\{a\},g)$ для всех $a\in g\setminus\bigcup_{h\in Q_{G'}(g)}h$. Если для некоторого $1\le i\le m$ $f_i\notin V'$, то добавим к V' группу f_i, а к E' ребра $(\{a\},f_i)$ для $a\in f_i$. В результате получим граф $G_l\in O(\mathbf{f})$ организации групп набора $\mathbf{f}$.

Если $l>L(G)$, то никаких перестроений не происходит. При $l\le L(G)$ в графе G_l останутся начальные вершины и вершины с уровнем $l-1$ и менее. Следовательно уровень некоторых начальных вершин будет равен l, то есть выполнено $L(G_l)=l$. Таким образом, G_l получается из G с сохранением l старших уровней иерархии (с номерами от 0 до $l-1$) и удалением остальных неначальных вершин.

На рис. 2 приведен пример графа G организации двух групп f_1, f_2 и его 2-усечение G_2. Выполнено $L_G(f_2)=2$, следовательно при усечении вершина $f_2=\{a_7,a_8\}$ будет удалена, а затем организована из $\{a_7\}$ и $\{a_8\}$.

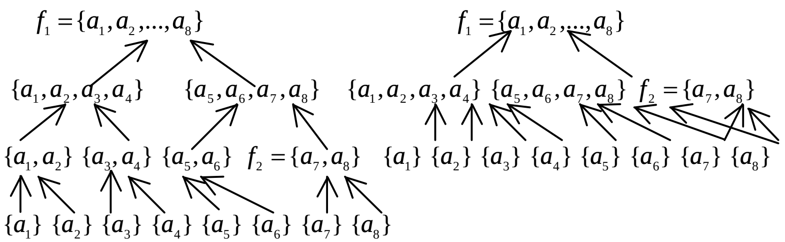

Рис. 2. Граф $G\in O(\{f_1,f_2\})$ организации групп f_1,f_2 и 2-усечение G_2

Итак, для любого графа $G\in O(\mathbf{f})$ определение 16 дает ряд графов $G_1,G_2,\ldots,G_{L(G)}\in O(\mathbf{f})$, первый из которых представляет собой “простейшую“ веерную организацию, последний совпадает с графом G. То есть в

графах $G_1,G_2,\ldots,G_{L(G)}$ последовательно “появляются” новые уровни управляющих (неначальных) вершин до тех пор, пока не будет получена исходная организация G.

Определение 17. Для $l\ge 1$ l-управлением структурой Ψ_l назовем простейшее управление, которое к каждый момент времени $t=\overline{1,T}$ имеет вид $\Psi_l^t(\mathbf{f}^t)=G_l^t$, где $G_l^t\in O(\mathbf{f}^t)$ – l-усечение оптимальной на $O(\mathbf{f}^t)$ организации $G_*^t\in O(\mathbf{f}^t)$ набора групп $\mathbf{f}^t$, то есть организации, минимизирующей функционал P: $G_*^t=\arg\min_{G\in O(\mathbf{f}^t)}P(G)$.

В каждый момент времени 1-управление Ψ_1 определяет веерную организацию заданного внешней средой набора групп. В [16] показано, что в этом случае стоимость реорганизации минимальна, то есть Ψ_1 минимизирует затраты на реорганизацию (вторую часть результата $r(\Psi_1)$).

При достаточно большом $l=l\max$ управление $\Psi_{l\max}$ определяет оптимальную (в статике) организацию заданного набора групп. То есть управление $\Psi_{l\max}$ минимизирует суммарные затраты на функционирование системы (первую часть результата $P(\Psi_{l\max})$).

Итак, при минимальном и максимальном l получаем в некотором смысле противоположные управления, которые соответствуют минимуму и максимуму уровней иерархии, минимизируют и максимизируют затраты на реорганизацию, максимизируют и минимизируют затраты на функционирование. Если стоимость реорганизации r нулевая, то оптимально управление $\Psi_{l\max}$, если функционал P нулевой, то оптимально управление Ψ_1. В общем случае оптимально некоторое “промежуточное” управление Ψ_l, $1<l<l\max$, при котором структуры содержат l уровней иерархии. Таким образом, построен ряд простейших управлений.

4. Описание параметров численного моделирования

В работе [5] построены алгоритмы поиска оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации произвольного набора групп $\mathbf{f}$. Для вычисления l-управлений ниже используем эти алгоритмы. То есть в каждый момент времени t вычисляем оптимальную на $O_p(\mathbf{f}^t)$ организацию G_*^t, а затем ее l-усечения. Как показано в [7] для так называемых существенно выпуклых функционалов организация G_*^t будет оптимальна и на $O(\mathbf{f}^t)$.

Для моделирования рассмотрим следующий пример. Количество исполнителей (элементов) $n = 30$, соответственно множество исполнителей $N = \{a_1, \ldots, a_{30}\}$. Определим тридцать групп $f_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{12}\}$, $f_2 = \{a_2, a_3, \ldots, a_{13}\}, \ldots, f_{30} = \{a_{30}, a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$. Группы $f_1, \ldots, f_{30}$ имеют мощность 12. Группа f_{i+1} отличается от группы f_i тем, что в нее добавлен один исполнитель, а один наоборот убран.

Определим наборы групп $\mathbf{f}_1 = \{f_1, \ldots, f_{10}\}$, $\mathbf{f}_2 = \{f_2, \ldots, f_{11}\}, \ldots,$ $\mathbf{f}_{30} = \{f_{30}, f_1, \ldots, f_9\}$. То есть $\mathbf{f}_1$ включает группы с первой по десятую, $\mathbf{f}_2$ – со второй по одиннадцатую, и т. д. Рассмотрим организационную систему на протяжении тридцати единиц времени, $T = 30$. Введем параметр скорости изменения внешней среды $0 \le s \le 1$. Тогда в качестве набора групп, организуемых в момент времени t, определим набор $\mathbf{f}^t = \mathbf{f}_{1+\lfloor s(t-1) \rfloor}$, $t = \overline{1, T}$.

При максимальной скорости $s = 1$ выполнено $\mathbf{f}^1 = \mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}^2 = \mathbf{f}_2, \ldots,$ $\mathbf{f}^{30} = \mathbf{f}_{30}$, то есть внешней средой последовательно определяются наборы $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{30}$. При $s = 0.5$ последовательно определяются наборы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{15}, \mathbf{f}_{15}$. То есть содержательно s – количество новых групп, появляющихся в наборе в течение единицы времени, и количество старых групп, которые удаляются из набора в течение единицы времени. Причем максимальной скоростью изменения мы считаем появление и удаление одной группы по истечению каждой единицы времени. При меньших скоростях в конце некоторых единиц времени организуемый набор не меняется, в конце остальных появляется и удаляется по одной группе.

Расчеты проводились при скоростях изменения внешней среды $s = 0.04; 0.07; 0.1; 0.2; \ldots; 1.0$. При минимальной скорости набор организуемых групп меняется один раз на протяжении рассматриваемого промежутка времени $t = \overline{1, T}$. При максимальной скорости – 30 раз.

В рассматриваемом примере уровень любой последовательной организации из $O_p(\mathbf{f}^t)$ равен 11. То есть для оптимальной последовательной организации $G_*^t \in O_p(\mathbf{f}^t)$ выполнено $L(G_*^t) = 11$. При $l = l\max = 11$ l-усечение G_l^t организации G_*^t совпадает с G_*^t. В результате получаем ряд

управлений $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{11}$, при которых структура организации соответственно имеет от одного до одиннадцати иерархических уровней.

Таким образом, описана динамика внешней среды. Будет считать ее заданной, обозначая через $R(\Psi_l)$ результат l-управления, через $P(\Psi_l)$ и $r(\Psi_l)$ – соответственно первую и вторую его части.

Проведем расчеты на примере функционала, который имеет вид (I) $P(g_1, \ldots, g_k) = \left[|g_1| + \ldots + |g_k| - \max(|g_1|, \ldots, |g_k|)\right]^b$, где $b \in (0; +\infty)$ – параметр. Как показано в работе [7], при $b \le 1$ функционал (I) – вогнутый, при $b \ge 1$ – существенно выпуклый[1]. В последовательной организации любая неэлементарная группа g организуется из подгруппы h и элементарной подгруппы $\{a\}$. Стоимость такой организации равна единице. То есть стоимость последовательной организации от b не зависит.

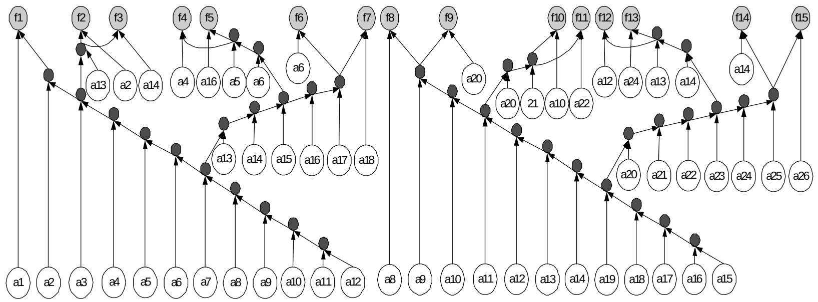

Рис. 3. Оптимальная организация групп $f_1, \ldots, f_{15}$ *для функционала* (I)

На рис. 3 приведен пример оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_{15}\}$ ($f_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{12}\}$, $f_2 = \{a_2, a_3, \ldots, a_{13}\}, \ldots, f_{15} = \{a_{15}, a_{16}, \ldots, a_{26}\}$). При $b \ge 1$ изображенная организация оптимальна также и на $O(\mathbf{f})$ в силу существенной выпуклости. Элементарные группы повторены несколько раз, так как иначе рисунок становится весьма громоздким. То есть рисунок представляет собой некоторую схему оптимальной последовательной организации.

---

[1] *Определения выпуклости и вогнутости функционала см. в* [7]. *При их выполнении оптимальны соответственно 2-организация* (*каждая группа организуется из двух подгрупп*) *и веерная организация одной группы.*

Их рис. 3 видна последовательность организации элементов в каждой из групп $f_1,\ldots,f_{15}$. При последовательной организации группы f_i, $i=\overline{1,15}$ необходимо организовать 10 промежуточных групп. Если все группы $f_1,\ldots,f_{15}$ организовывать независимо, то потребуется 150 промежуточных групп. Однако некоторые промежуточные группы могут быть использованы несколько раз. За счет этого в найденной алгоритмом оптимальной организации содержится только 38 промежуточных групп, что снижает стоимость организации в три раза.

Стоимость реорганизации структуры определяется величинами $r'(a)$ и $r''(a)$ – стоимостями включения исполнителя (элемента) $a\in N$ в группу и исключения a из группы. Исполнителей считаем однородными и симметричными по отношению к включению/ исключению, то есть для всех $a\in N$ положим $r'(a)=r''(a)=r$, где $r>0$ – некоторая величина, определяющая масштаб стоимости реорганизации по отношению к стоимости функционирования (они должны быть соизмеримы).

Напомним, что результат управления структурой имеет вид $R(\Psi)=\left[\sum_{t=\overline{1,T}}(P(G^t)+r(G^{t-1},G^t))\right]/T$. При достаточно большом r (достаточно высокой стоимости реорганизации) первое слагаемое становится несущественным. В этом случае при достаточной скорости изменения внешней среды оптимальным среди l-управлений становится управление Ψ_1, определяющее веерную структуру. Максимальна скорость изменения внешней среды $s=1$. Эмпирически установлено, что при $r(\varnothing,G_{веер})=2P(G_{веер})$ ($G_{веер}\in O(\mathbf{f}^t)$ – веерная организация) в рассматриваемом примере значение $s=1$ действительно приводит к оптимальности управления Ψ_1, а меньшие значения s приводят к оптимальности Ψ_{lopt} при $lopt>1$. То есть полагаем, что стоимость создания “с нуля” простейшей веерной организации в 2 раза превосходит затраты на ее функционирование в течение единицы времени. Из соотношения $r(\varnothing,G_{веер})=2P(G_{веер})$, которое и понимается под соизмеримостью затрат, можно выразить r.

5. Затраты на функционирование и на реорганизацию в зависимости от числа уровней иерархии

Зафиксируем $b=1$ и проанализируем поведение первой и второй части затрат $P(\Psi_l)$ и $r(\Psi_l)$ при различных l-управлениях, $l=\overline{1,11}$.

$P(\Psi_l)$ не зависит от скорости s изменения внешней среды, так как для всех t организуемый набор групп $\mathbf{f}^t$ состоит из групп с одинаковой структурой пересечений. То есть, кривая зависимости $P(\Psi_l)$ от l никак не меняется при изменении s. Она изображена на рис. 4 толстой линией.

Кривая зависимости $r(\Psi_l)$ от l существенно трансформируется при изменении s. На рис. 4 приведены кривые для значений $s=0.04;0.07;0.1;0.2;\ldots;1.0$. При $s=0.04$ затраты на реорганизацию $r(\Psi_l)$ минимальны (нижняя кривая). При увеличении s кривая $r(\Psi_l)$ “поднимается” вверх и переходит в следующую кривую.

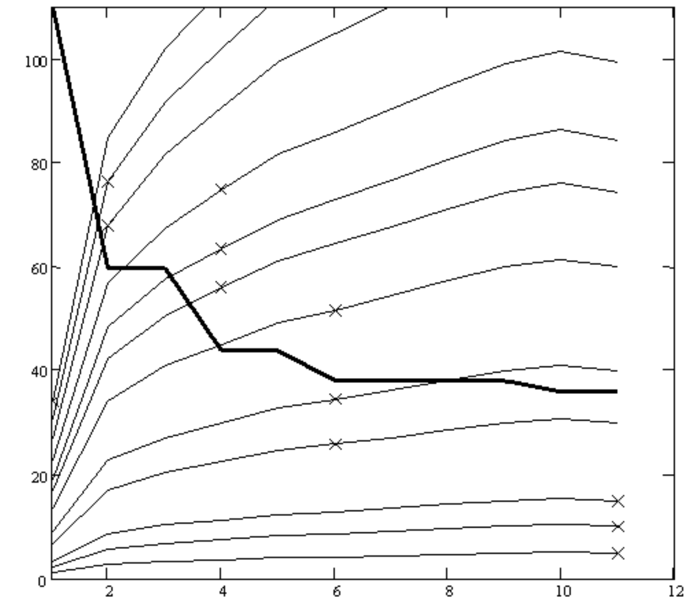

Рис.4. Кривые зависимости $r(\Psi_l)$ от l при различных s (тонкие линии) и кривая зависимости $P(\Psi_l)$ от l (толстая линия) при $b=1$

Из рис. 4 видно, что стоимость реорганизации возрастает при “усложнении” структуры, то есть при увеличении количества уровней иерархии, за исключением $l=11$ (при приближении количества уровней иерархии к критическому наблюдается “краевой эффект”).

Общий характер кривых $r(\Psi_l)$ позволяет заключить, что в рассмотренном примере они вогнуты. Максимальный рост затрат на перестроение наблюдается при увеличении l от 1 до 2, то есть при переходе от наиболее простой (веерной) организации к организации, которая имеет два уровня управления.

Из рис. 4 видно, что стоимость $P(\Psi_l)$ затрат на функционирование уменьшается при усложнении структуры, то есть при увеличении количества уровней иерархии. Таким образом, в статике минимум затрат (максимум “эффективности”) достигается для последовательной организация с максимальным количеством уровней иерархии. Кривая $P(\Psi_l)$ в рассмотренном примере выпукла (максимальное уменьшение затрат на функционирование наблюдается при увеличении l от 1 до 2).

То есть кривые $P(\Psi_l)$ и $r(\Psi_l)$ ведут себя в некотором смысле противоположным образом при увеличении l. Для поиска оптимального управления структурой необходимо выбрать $l = lopt$, для которого результат $R(\Psi_l) = P(\Psi_l) + r(\Psi_l)$ минимален. Значение $lopt$ на каждой кривой $r(\Psi_l)$ обозначено крестиком. При возрастании l от 1 до $lopt$ возрастание $r(\Psi_l)$ компенсируется убыванием $P(\Psi_l)$, после $lopt$ – уже нет.

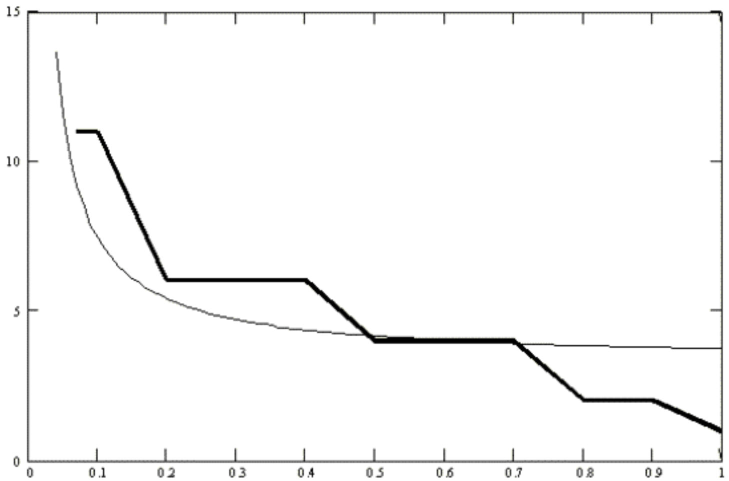

Рис. 5. Кривая зависимости $lopt$ от s при $0 < s \le 1$ (толстая линия) и ее оптимальное гиперболическое приближение $lopt(s) = a + b / s$

Перейдя к соответствующим координатам, получим приведенную на рис. 5 зависимость оптимального числа $lopt$ уровней иерархии от скорости изменения внешней среды (интенсивности внешних воздействий). Гиперболическое приближение (оптимальная по a и b в среднеквадратичном смысле кривая $lopt(s) = a + b / s$) достаточно наглядно аппроксимирует полученную эмпирическую зависимость.

Из рис. 5 можно сделать следующий вывод: при жестких (интенсивных) внешних изменениях выгодно поддерживать простую (веерную) структуру системы, усложняя ее по мере смягчения внешних воздействий (увеличивая число уровней иерархии). Качественно это соответствует тому, что в нестабильной внешней среде могут “выживать” лишь организационные системы с максимально простой структурой за счет приспособляемости, в стабильной же среде наоборот доминируют системы со сложной иерархической структурой за счет высокой эффективности.

6. Оптимальное число уровней иерархии при различных параметрах функционала и скоростях изменения среды

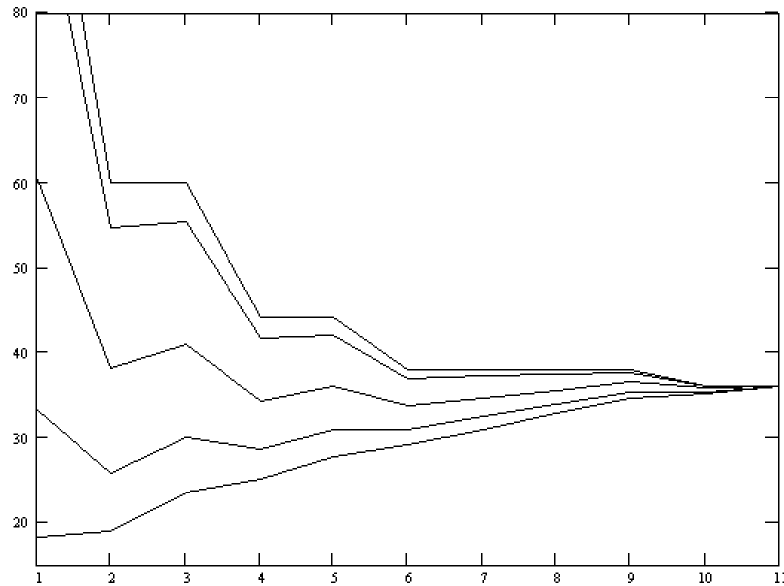

Рис. 6. Кривые зависимости $P(\Psi_l)$ от l при различных $0.25 \le b \le 1$

Кривые зависимости $r(\Psi_l)$ от l, приведенные на рис. 4, при изменении b умножаются на постоянный коэффициент в силу изменения r (чтобы затраты на функционирование и на реорганизацию оставались соизмеримыми), но характер кривых и взаимное расположения не меняются. Кривая же зависимости $P(\Psi_l)$ от l при изменении b существенно изменяется. На рис. 6 приведены кривые зависимости $P(\Psi_l)$ от l при $b = 0.25; 0.5; 0.75; 0.95; 1$ (нижняя линия – $b = 0.25$, верхняя – $b = 1$).

Стоимость последовательной организации одинакова для любого b. Поэтому при приближении к “критической точке” (максимально возможному количеству уровней иерархии) все кривые сходятся в одну точку.

При $b < 1$ функционал (*I*) вогнут. То есть последовательная организация, вообще говоря, неоптимальна даже в статике. При минимальном $b = 0.25$ вогнутость “ярко выражена”: минимальна стоимость функционирования веерной организации, даже несмотря на то, что группы набора $\mathbf{f}^t$ весьма существенно пересекаются (создание промежуточных групп не оправдано). Таким образом, кривая $P(\Psi_l)$ возрастает при увеличении количества уровней иерархии l от 1 до 11 (см. рис. 6 нижняя линия). Так как $l = 1$ доставляет также минимум второй части результата управления $r(\Psi_l)$ (см. рис. 4), то в этом случае $lopt = 1$ при любом s.

При $b = 0.5$ введение промежуточного уровня иерархии уже дает выигрыш (промежуточные группы используются для организации нескольких групп набора $\mathbf{f}^t$). Таким образом, минимум $P(\Psi_l)$ достигается при $l = 2$. Аналогично, при $b = 0.75$ минимум $P(\Psi_l)$ достигается при $l = 6$, при $b = 0.95$ – при $l = 10$ (см. рис. 6).

При $b \geq 1$ в статике оптимальна последовательная организация. То есть минимум $P(\Psi_l)$ достигается в “критической точке” $l = 11$. На рис. 6 верхняя кривая соответствует зависимости $P(\Psi_l)$ от l при $b = 1$. При дальнейшем увеличении b кривая $P(\Psi_l)$ более ”круто” возрастает при приближении l к 1, сохраняя свой монотонный характер.

В таблице 1 приведены значения $lopt$ в зависимости от s и b. В связи с их целочисленностью более наглядную картину дают оптимальные гиперболические приближения кривых зависимости $lopt$ от s, которые при $b = 0.25; 0.5; 0.75; 0.95; 1; 2$ изображены на рис. 7. Значение $b = 0.25$ соответствует нижней линии, значение $b = 2$ – верхней линии.

При “ярко выраженной” вогнутости функционала ($b = 0.25$) “сложная” организация с несколькими уровнями иерархии не выгодна даже при постоянной внешней среде. Содержательно это можно интерпретировать следующим образом. Уровень развития “организационных отношений” в системе таков, что наиболее эффективна ”стихийная” организацию исполнителей для выполнения каждой конкретной работы под руководством одного “управляющего звена” (веерная организация).

Таблица 1. Значения $lopt$ в зависимости от s и b

s\ b	0.25	0.50	0.75	0.95	1.00	2.00
0.04	1	2	6	11	11	11
0.07	1	2	6	6	11	11
0.1	1	2	4	6	11	11
0.2	1	2	4	6	6	11
0.3	1	2	4	6	6	6
0.4	1	2	2	4	6	6
0.5	1	2	2	4	4	6
0.6	1	2	2	2	4	4
0.7	1	2	2	2	4	4
0.8	1	2	2	2	2	2
0.9	1	1	2	2	2	2
1.0	1	1	1	1	1	1

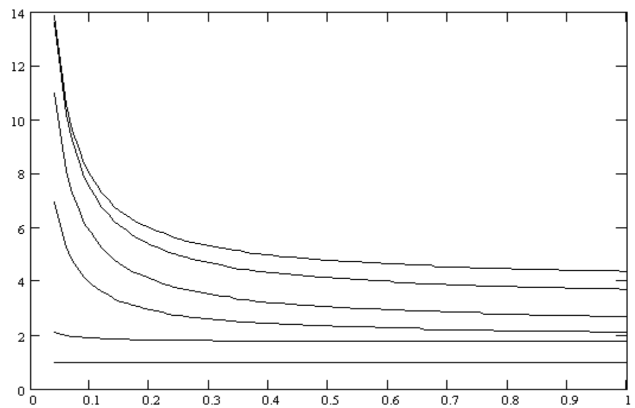

Рис. 7. Гиперболические приближения кривых зависимости $lopt$ от s при $0 < s \leq 1$ и различных $b = 0.25; 0.5; 0.75; 0.95; 1; 2$

При ослаблении вогнутости ($b = 0.5$) "в статике" становится выгодным введение двух уровней управления (см. рис. 6), при которых минимизируется первая часть результата $P(\Psi_l)$. При $s < 0.9$ выполнено $lopt = 2$, то есть такая структура управления оптимальна и в динамике.

При дальнейшем ослаблении вогнутости ($b = 0.75$) в достаточно стабильной ситуации ($s \leq 0.3$) становятся выгодными более сложные структуры управления. Здесь "эффект" от координации взаимодействия исполнителей промежуточными звеньями уже превосходит "дороговизну" функционирования самих промежуточных звеньев.

Стоимость функционирования промежуточных звеньев уменьшается (относительно общего результата) при $b = 0.95$, что для постоянной внешней среды делает выгодной уже последовательную организацию с максимальным количеством уровней иерархии.

При $b \geq 1$ стоимость функционирования P становится существенно выпуклой, и организация с максимальным количеством уровней иерархии будет оптимальной не только при минимальных изменениях внешней среды, но и при бо́льших s (см. таблицу 1). То есть по мере "усиления выпуклости" возрастает "сопротивляемость" организации внешним изменениям и упрощение ("деградация") происходит при более сильных внешних изменениях (см. рис. 7 и таблицу 1). Содержательно это можно интерпретировать, например, следующим образом. Уровень развития "организационных отношений" в системе достаточно высок, чтобы успешно противостоять нестабильности внешней среды за счет высокой эффективности системы управления, не допуская упрощения ("деградации") организации.

Заключение

Кратко охарактеризуем полученные результаты. Введено понятие внешней среды, которая в каждый момент определяет, какой набор групп должен быть организован. Под структурой понимается граф организации заданного внешней средой набора групп. Управление структурой определяется как произвольное отображение текущей структуры и известной информации об изменении внешней среды в структуру на следующем шаге. Результат управления – суммарные затраты на функционирование (функционал стоимости) и на реорганизацию (в смысле метрики [16]) – минимален при оптимальном управлении.

Исследован ряд простейших управлений, которые названы l-усечениями, где l – количество уровней иерархии в структуре, определяемой соответствующим управлением. Приведен пример расчетов оптимального l-управления на одном из примеров функционала P . Проанализирована зависимость оптимального управления от параметра функционала (степени развития "организационных отношений") и скорости изменения внешней среды, определенной как число вновь появляющихся групп в единицу времени. Результаты расчетов показывают, что построенная модель структурных изменений позволяет "уловить" некоторые тенденции, наблюдаемые "на практике". Этот факт позволяет надеяться, что в дальнейшем изложенный в работах [5, 6, 7, 8] аппарат оптимизации иерархических структур может быть использован при моделировании структуры реальных организационных систем.

Литература

1. АЙЗЕРМАН М.А., ГУСЕВ Л.А., ПЕТРОВ С.В. и др. *Динамические подходы к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики)* // Автоматика и телемеханика. 1979. №7. С. 135–151. №9. С. 123–136.
2. БАЗИЛЕВИЧ Л.А. *Обоснование нормативов управляемости на модели трудоемкости руководства*. – В кн.: Повышение эффективности управления объединениями и отраслями промышленности. Новосибирск, 1977.
3. БУРКОВ В.Н., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Механизмы функционирования организационных систем*. М.: Наука, 1981.
4. ВОРОНИН А.А. *Устойчивое развитие – миф или реальность?* // Математическое образование. 2000. №1(12). С. 59–67.
5. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы* // Автоматика и телемеханика. 2002. №5. С. 120–132.
6. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева* // Вестн. Волг. ун-та. 2001. Сер. 1: Математика. Физика. С. 93–113.
7. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы* // Автоматика и телемеханика. 2002. №8. С. 136–150.
8. ГУБКО М.В. *Структура оптимальной организации континуума исполнителей* // Автоматика и телемеханика. 2002. №12.
9. ГУБКО М.В., МИШИН С.П. *Оптимальная структура системы управления технологическими связями* / Материалы международной научной конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 2002. С. 50–54.
10. ДЕМЕНТЬЕВ В.Т., ЕРЗИН А.И., ЛАРИН Р.М. и др. *Задачи оптимизации иерархических структур*. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1996.

11. ДРУЖИНИН В.В., КОНТОРОВ Д.С. *Проблемы системологии*. М.: Сов. радио, 1976.

12. ДУБОВСКИЙ С.В., УЗДЕМИР А.П. *Критерии оптимальности и вариационные подходы в динамических моделях экономики* // Автоматика и телемеханика. 1974. №6.

13. ЛЕЙБКИНД А.Р., РУДНИК Б.Л., ЧУХНОВ А.И. *Математические методы синтеза организационных структур управления*. Препринт. М., Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований, 1978.

14. МЕСАРОВИЧ М., МАКО Д., ТАКАХАРА И. *Теория иерархических многоуровневых систем*. М.: Мир, 1973.

15. МИШИН С.П. *Оптимизация иерархических структур* / Материалы международной научной конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 2002. С. 100–105.

16. МИШИН С.П. *Стоимость реорганизации структуры системы* // Тр. кафедры математ. анализа и теории функций Волг. ун-та. 2002. С. 178–198.

17. НОВИКОВ Д.А. *Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем*. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.

18. ОВСИЕВИЧ Б.И. *Модели формирования организационных структур*. Л.: Наука, 1979.

19. ЦВИРКУН А.Д. *Основы синтеза структуры сложных систем*. М.: Наука, 1982.

20. CARZO R.J., JANOUZAS J.N. *Effects of flat and tall organization structure*. – Administrat. Sci. Quart., 1969, vol. 14, №2.