МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОСУДАРСТВЕННОЙ СТРАТЕГИИ ПЕНСИОННОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Нижегородцев Р.М.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
bell44@rambler.ru

Одна из типовых задач, связанных с социальной проблематикой, — это задача выбора правил начисления пенсий, относительно хорошо формализуемая и содержащая достаточно понятные и естественно возникающие ограничения.

Рассмотрим функцию $f(t)$, неотрицательную и непрерывную на достаточно большом промежутке $[0, N]$. Игроку № 1 задается константа T, $0 < T < N$. Его задача — зная функцию $f(t)$, выбрать t_0 ($0 \le t_0 \le N - T$), для которого максимально значение выражения

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt.$$

Иными словами, его задача в том, чтобы выбрать интервал заранее заданной длины, на котором среднее значение функции $f(t)$ было бы максимальным (рис. 1).

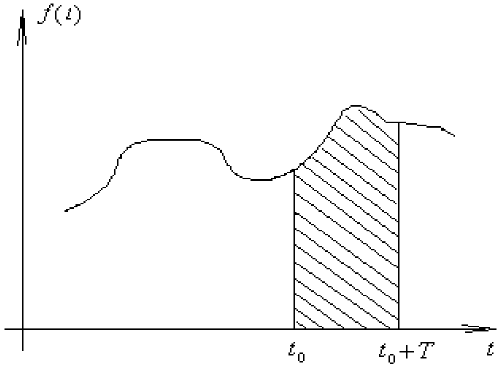

Рис. 1. Максимизация средних значений

Если предположить, что t — параметр времени (возраст), а $f(t)$ — функция заработной платы, то задача приобретает ясный экономический

смысл: найти промежуток времени заданной длины, в течение которого средняя зарплата была максимальной. Эта задача носит весьма прикладной характер; в частности, она была актуальна в нашей стране для работников, выходивших на пенсию в течение последнего десятилетия: согласно прежнему законодательству, размер пенсии работника (игрока № 1) зависит от объема доходов, полученных им за пять наиболее высоко оплачиваемых лет подряд в его трудовом стаже. Легко понять, что T в данном случае равно пяти годам.

В рассматриваемой задаче интересно встать на позицию государства и задаться вопросом: какой должна быть эта заданная длина промежутка (T)? Предположим, что игрок № 2 (государство) варьирует T с целью минимизации пенсионных выплат; в этом случае «совокупные» усилия двух игроков реализуют минимаксную стратегию:

$$\min_T \max_{t_0}\left(\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt\right).$$

Ясно, что, независимо от вида функции $f(t)$, слишком малое T невыгодно игроку № 2: в этом случае задача игрока № 1 сведется к поиску глобального максимума функции $f(t)$, и близкое к нему значение будет объявлено средним значением $f(t)$ за «очень короткий» промежуток времени. Если T велико (сопоставимо с N), то максимальная средняя зарплата приближается к средней за всю жизнь. Выгодна ли такая ситуация игроку № 2? Ответ зависит от вида функции $f(t)$.

Функция зарплаты от возраста на самом деле может иметь различный вид, но наиболее типичны и распространены функции двух типов (рис. 2).

Первый тип – функция, близкая к параболической, с единственной точкой максимума, приходящейся (в среднем) на конец третьей четверти трудовой биографии работника. Такая функция зарплаты характерна для государственных служащих, для работников высокой квалификации (инженеров, ученых), а также для трудящихся, формально гарантированных от потери рабочего места независимо от текущего состояния экономической конъюнктуры (большинство занятых в плановой экономике; работники, охваченные системой пожизненного найма в современной Японии).

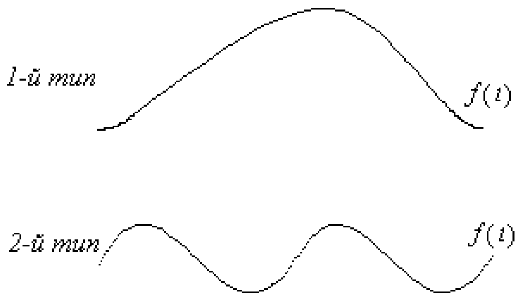

Рис. 2. Два типа функции заработной платы

Второй тип – функция, близкая к периодической, в которой минимумы и максимумы чередуются с частотой, близкой к продолжительности промышленного цикла, выступающего общественной формой движения индустриальных технологий. Такая функция зарплаты характерна для низкоквалифицированных работников частного сектора, подверженных фрикционной или циклической безработице, для дискриминируемых слоев трудящихся, а также для некоторых типов мелких предпринимателей, работающих на условиях самозанятости и в силу структурных причин подверженных колебаниям экономической конъюнктуры.

В любой экономике можно найти работников как первого, так и второго типа, однако в целом чем сильнее социальная политика государства, чем глубже патерналистские традиции функционирования рынка труда, чем эффективнее антициклическое регулирование экономики, чем выше технологический уровень производственных процессов, тем выше доля работников первого типа по сравнению со вторым. Между тем, было бы неверно утверждать, что увеличение доли государственных расходов в ВВП автоматически приводит к росту доли работников первого типа.

Если предположить, что большинство работников имеет функцию зарплаты первого типа, то увеличение T выгодно игроку № 2. Идеальной для него была бы ситуация, когда размер пенсии определяется объемом трудового дохода, полученного работником в течение всей его жизни. Именно такой вариант исчисления размеров пенсий предусмотрен вступающим в силу пенсионным законодательством. Причина этого факта в том, что большинство работников, выходящих на пенсию в ближайшие годы, имеет функцию зарплаты первого типа.

Если предположить, что в обществе преобладают работники с периодической функцией зарплаты, то игрок № 2 окажется в выигрыше,

когда T близко к периоду. Так, если $f(t) = \sin t + R$, константа $R>1$, то, каково бы ни было t_0,

$$\frac{1}{2p}\int_{t_0}^{t_0+2p}(\sin t + R)dt = R.$$

Если же T чуть больше или чуть меньше периода, то игрок № 1 может увеличить искомый результат по сравнению с «математическим ожиданием» значения $f(t)$. Иначе говоря, $T=2p$ есть точка локального минимума функции

$$V_f(T) = \max_{t_0}\left(\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt\right).$$

Приведем более общий **пример**. Пусть $f(t)$ — синусоида с периодом ω: $f(t) = A\cos(\omega t+\varphi) + R$, константы $\omega\neq 0$, $R>A>0$. Тогда

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt = \frac{2A}{wT}\sin\frac{wT}{2}\cos\left(\frac{wT}{2}+wt_0+j\right)+R.$$

Поскольку область изменения t_0 намного превосходит период функции $f(t)$, то за счет подходящего выбора t_0 можно добиться, чтобы косинус в последнем равенстве равнялся 1 или –1 в зависимости от знака $\sin(\omega T/2)$. Таким образом,

$$V_f(T) = \frac{2A}{wT}\left|\sin\frac{wT}{2}\right| + R.$$

Локальные минимумы функции $V_f(T)$, равные R, будут периодически повторяться, достигаясь в точках $T_{min} = 2pn/\omega$ при целых n. Локальные максимумы этой функции непериодически повторяются, монотонно убывая с бесконечным ростом T. Таким образом, и при периодической функции $f(t)$ существенное увеличение T, во всяком случае, не противоречит эффективной стратегии игрока № 2, хотя близость T к периоду функции $f(t)$ также соответствует его интересам. ♦

В свете отмеченных закономерностей можно обнаружить, что значение T, равное пяти годам, отнюдь не выглядит случайностью. Как показывает мировая статистика, в последние 30 лет именно такова средняя продолжительность промышленного цикла в большинстве стран, обнаруживающих отчетливые среднесрочные колебания экономической конъюнктуры. В качестве примеров укажем, что в экономике ФРГ за период 1971-1989 г. (до ее объединения с ГДР в октябре 1990 г.) четко прослеживаются, причем по всем видам конъюнктурных индикаторов, три хозяйственных цикла продолжительностью 4-7 лет [2, с. 430-431]. За 20 лет реформ (с 1978 по 1998 год) китайская экономика пережила 4 цикла, каждый продолжительностью 4-5 лет [1, с. 38]. Естественно, что таков же и период функции $f(t)$ для большинства работников второго типа в соответствующих странах, поскольку периодичность функции зарплаты в решающей степени обусловлена циклическим характером экономической динамики.

Пусть теперь $N = +\infty$, а функция $f(t)$ такова, что существует конечный предел

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\int_0^N f(t)dt,$$

равный k_1, и пусть $k_2 = \max f(t)$ по всем $t\in[0; +\infty)$. Вообще говоря, в случае разрывной измеримой функции $f(t)$ k_2 есть ее существенный супремум. Введем параметр $\theta = -\ln T$ и обозначим $y(\theta) = V_f(T)$. В ряде случаев закон роста этой функции удается представить в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dy(q)}{dq}=w(q)(y-k_1)(k_2-y)$$

при некоторой ограниченной на Р функции $w(\theta)$, положительной вблизи обеих бесконечностей. Скорость роста функции $y(\theta)$ замедляется пропорционально близости ее значений как к верхнему пределу k_2, так и к нижнему k_1. Эта функция есть обобщенная логистическая кривая с двумя горизонтальными асимптотами и достаточно сложным поведением, предопределяемым видом функции $w(\theta)$, зависящим от $f(t)$. В частности, обобщенная логиста может не быть монотонной функцией и даже иметь бесконечное множество экстремумов. Тем не менее, свойства некоторых классов обобщенных логистических кривых достаточно хорошо изучены [3], что позволяет применить известный аналитический аппарат к исследованию данной задачи.

В приведенном выше примере с $f(t) = A\cos(\omega t+\varphi) + R$ существует и конечен предел

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\int_0^N f(t)dt=R+\lim_{N\to+\infty}\frac{2A}{wN}cos\left(\frac{wN}{2}+j\right)sin\frac{wN}{2}=R,$$

поэтому $k_1=R$, а максимальное значение $f(t)$, как легко видеть, равно $k_2=R+A$. Однако функция $V_f(T)$ недифференцируема в своих точках минимума. В частности, как нетрудно убедиться,

$$V_f'\left(\frac{2p}{w}\pm 0\right)=\pm\frac{Aw}{2p}.$$

Следовательно, соответствующая функция

$$y(q)=\frac{2Ae^q}{w}\left|sin\frac{w}{2e^q}\right|+R$$

не может быть решением дифференциального уравнения, определяющего обобщенную логистическую кривую. Тем не менее,

$$\lim_{q\to-\infty}y(q)=R,\quad \lim_{q\to+q}y(q)=R+A,$$

и асимптотика функции $y(\theta)$ вблизи бесконечностей вполне соответствует поведению обобщенной логистической кривой.

К сказанному следует добавить, что в целом предположение относительно «минимаксной» стратегии государства является достаточно сильным упрощением. На самом деле государство преследует множество целей, важнейшая из которых заключается в том, чтобы уравновесить задачи реализации социальных гарантий (обеспечение работнику прожиточного минимума независимо от реального вклада в национальный доход страны, сделанного им в течение жизни) и задачи стимулирования труда (соответствие большего размера пенсий более высокому уровню трудового дохода). Соотношение между этими целями может меняться (иногда достаточно быстро) в зависимости от общего объема распределяемых средств, находящихся в распоряжении органов пенсионного обеспечения.

Литература

1. ЛИНЬ ИФУ, ЦАЙ ФАН, ЛИ ЧЖОУ. *Китайское чудо: стратегия развития и экономическая реформа*. М., 2001.

2. *Мировая экономика* / Под ред. А.С. Булатова. М.: Юристъ, 1999.

3. ПОСТАН М.Я. *Обобщенная логистическая кривая: ее свойства и оценка параметров* // Экономика и математические методы. 1993. Т. 29. Вып. 2.