ОБЩИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ ОТКРЫТОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБМЕННЫХ СХЕМ

Коргин Н.А.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
kolya@edu*n*et.ru

Введение

В данной публикации рассматривается общий метод построения прямых неманипулируемых механизмов планирования, в литературе именуемых механизмами открытого управления (ОУ) [4], для обменных схем (ОС). Проводится анализ условий совершенного согласования (УСС) [4], на основании которых определяются выражения для построения механизмов ОУ. Фактически, в данной публикации частный подход, рассмотренный в [5], распространяется на более общий случай. Рассмотренные ранее задачи обмена [1-3] вписываются в полученные общие результаты, что наглядно иллюстрируется на примере одной из них [2].

1. Постановка задачи

1.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему из n+1 элементов и m видов ресурсов. Множество всех элементов обозначим $I = \{0,\dots,n\}$. Множество всех ресурсов обозначим $J = \{1,\dots,m\}$. Набор всех имеющихся у i-го элемента ресурсов обозначим $\overline{y_i} = (y_1^i,\dots,y_m^i)$. Здесь y_j^i обозначает наличие у i-ого элемента ресурса типа j. Соответственно распределение ресурсов по всем элементам можно записать в виде матрицы: $y = \begin{pmatrix} \overline{y_0} \\ \mathrm{M} \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$.

Предпочтения каждого элемента опишем функцией его предпочтений: $j_i(\overline{y_i}, r_i) : R^{m+1} \to R, r_i \in \Omega_i,\ i = 0,\dots,n$. Параметр r_i – тип элемента, характеризует некоторым образом его функцию предпочтения. Начальное распределение ресурса между элементами системы считается заданным и обозначается y^0.

Элементы обладают возможностью взаимодействовать между собой путем взаимного обмена ресурсами и информацией о различных параметрах всей системы.

Определение 1. Обмен – перераспределение ресурсов из множества J между элементами из множества I: $y^0 \to y$.

Определение 2. Трансферт – передача ресурса типа j для элемента i в процессе обмена $y^0 \to y$.

Соответственно можно определить $\overline{x_i} = (x_1^i,\dots,x_m^i)$ – вектор трансфертов всех ресурсов у элемента i; матрица трансфертов в ОС $x = \begin{pmatrix} \overline{x_0} \\ \mathrm{M} \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$.

Определение 3. Функция полезности элемента i от обмена:

$$f_i(\overline{x_i}, r_i) = j_i(\overline{x_i} + \overline{y_i^o}, r_i) - j_i(\overline{y_i^o}, r_i).$$

Строго, функция полезности зависит также и от аргумента $\overline{y_i^o}$, но, учитывая, что в модели мы рассматриваем единственное начальное распределение ресурсов, аргумент $\overline{y_i^o}$ опускается.

1.2. ВОЗМОЖНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Большинство ограничений, которые можно наложить на данную модель будут играть роль для получения конечного решения рассматриваемой нами задачи. В данной работе приводятся лишь ограничения, необходимые для построения обобщенного решения.

Прежде всего, это – ограничения на вид функции полезности АЭ. Нам необходима непрерывность функции полезности, существование и непрерывность ее частных производных вплоть до второго порядка по всем переменным. Кроме того частная производная функции полезности по типу АЭ должна быть монотонна, например

(F1) $\dfrac{\partial f_i}{\partial r_i}(\overline{x_i}, r_i) \ge 0, i = 1\dots n, r_i \in \Omega_i.$

Кроме того, решение поставленной задачи сильно упрощается, если мы используем условия Спенса-Мирлиса – постоянство знака смешанной производной $\partial^2 f_i / \partial x_j^i \partial r_i$ [5], например такое: $\forall i, \exists l(i),$ такое, что

(F2a) $\forall j, \forall r_i \in \Omega_i, \forall x_j^i,\quad \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_l^i \partial r_i}(\overline{x_i}, r_i) > 0,$

(F2b) $\forall i, \forall j \ne l(i), \forall r_i \in \Omega_i, \forall x_j^i,\quad \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_l^i \partial r_i}(\overline{x_i}, r_i) \ge 0.$

Также, необходимо записать условия индивидуальной рациональности (ИР) для всех элементов – прибыль любого АЭ (значение функции полезности) должна быть неотрицательна.

1.3. ИНФОРМИРОВАННОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ

Элементы системы информированы ассиметрично – центр знает все параметры системы, кроме значений типов АЭ – ему известны лишь множества возможных значений Ω_i и, быть может, вероятностное распределение типа на множестве возможных значений.

В общем случае для построения механизма ОУ информированность АЭ не имеет значения, но, без потери общности, предположим, что АЭ полностью информированы о параметрах системы.

1.4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача управляющего органа – центра (Ц) – построить механизм обмена $p(\bar{s})$, оптимальный по критерию K: $K(p(\bar{s}),\bar{s}) \to \max$, где $\bar{s} = (s_1,\ldots,s_n)$ – вектор заявок АЭ. Т.к механизм прямой, т.е АЭ сообщают центру оценки своих типов, то $s_i \in \Omega_i, i = 1\ldots n$.

Порядок функционирования стандартен для механизмов планирования:

1. Центр объявляет механизм обмена $p(\bar{s})$;
2. АЭ сообщают центру свои заявки $\bar{s}* = (s_1*,\ldots,s_n*)$;
3. Центр назначает обмен $x = p(\bar{s}*)$.

Механизм ищется в классе прямых неманипулируемых механизмов (механизмов ОУ) – т.е. механизмов, для которых доминантной стратегией каждого АЭ будет сообщение истинной заявки – $\bar{s}* = (r_1,\ldots,r_n)$.

2. Решение

Прямой неманипулируемый механизм должен отвечать условию совершенного согласования (УСС) [4]:

$$\text{(УСС)} \quad \begin{cases} K(x,\bar{s}) \to \max\limits_{x} \\ f_i(\bar{x}_i, s_i) = \max\limits_{\bar{z}\in X_i(s_{-i})} f_i(\bar{z}, s_i) \end{cases},$$

где $X_i(s_{-i})$ – множество возможных трансфертов для i-го АЭ при фиксированном векторе s_{-i} сообщений остальных АЭ. Первое выражение в этом условии отражает оптимальность механизма для центра, остальные – доминантность сообщения истинных заявок для АЭ.

Введем функцию зависимости прибыли i-го АЭ от значения собственного параметра r_i, своей заявки s_i, и заявки остальных участников обменной схемы s_{-i}: $V_i(r_i, s_i, s_{-i}) = f_i(\bar{x}_i(s_i, s_{-i}), r_i)$.

УСС для АЭ можно проинтерпретировать следующим образом:

$$\textbf{(1)} \quad \forall r_i \in \Omega_i, \forall s_{-i} \in \Omega_{-i}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_i}{\partial s_i}(r_i, r_i, s_{-i}) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial s_i^{\,2}}(r_i, r_i, s_{-i}) \le 0 \end{cases}$$

Из первого условия (1a) очевидным образом следует, что

$$\textbf{(2)} \quad \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\bar{x}_i(r_i, s_{-i}), r_i) \frac{dx_j^i}{dr_i}(r_i, s_{-i}) = 0.$$

Лемма 1. Условие (1b) $\forall k_i \in K_i, \forall s_{-i} \in K_{-i}$ эквивалентно неравенству

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^i \partial r_i}(\bar{x}_i(r_i, s_{-i}), r_i) \frac{dx_j^i}{ds_i}(r_i, s_{-i}) \ge 0.$$

Доказательство. В развернутом виде, условие (1b) записывается следующим образом:

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{m} [\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^i \partial x_l^i}(\bar{x}_i(r_i, s_{-i}), r_i) \frac{dx_j^i}{ds_i}(r_i, s_{-i}) \frac{dx_l^i}{ds_i}(r_i, s_{-i}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\bar{x}_i(r_i, s_{-i}), r_i) \frac{d^2 x_j^i}{ds_i^{\,2}}(r_i, s_{-i})] \le 0.$$

Продифференцировав выражение (2) по r_i, получаем:

$$(5) \quad \sum_{j=1}^{m} [\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^i \partial x_l^i}(\bar{x}_i(r_i, s_{-i}), r_i) \frac{dx_j^i}{ds_i}(k_i, s_{-i}) \frac{dx_l^i}{dr_i}(r_i, s_{-i}) + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^i \partial r_i}(\bar{x}_i(r_i, s_{-i}), r_i) \frac{dx_j^i}{ds_i}(r_i, s_{-i}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\bar{x}_i(r_i, s_{-i}), r_i) \frac{d^2 x_j^i}{ds_i dr_i}(r_i, s_{-i})] = 0.$$

Очевидно, что $\dfrac{dx_j^i}{ds_i}(r_i, s_{-i}) = \dfrac{dx_j^i}{dr_i}(r_i, s_{-i})$.

Вычитая (4) из (5), получим выражение (3). •

Рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{\partial V_i}{\partial s_i}(r_i, s_i, s_{-i}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\overline{x_i}(s_i, s_{-i}), r_i) \frac{dx_j^i}{ds_i}(s_i, s_{-i}).$$

Учитывая (1), можно записать

$$\frac{\partial V_i}{\partial s_i}(r_i, s_i, s_{-i}) = \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\overline{x_i}(s_i, s_{-i}), r_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\overline{x_i}(s_i, s_{-i}), s_i) \right] \frac{dx_j^i}{ds_i}(s_i, s_{-i}).$$

Знак левой части данного выражения определяется

$$(6)\ (r_i - r_i^*) \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^i \partial k_i}(\overline{x_i}(r_i^*, s_{-i}), r_i^*) \frac{dx_j^i}{ds_i}(s_i, s_{-i}),$$

где r_i^* лежит между r_i и s_i.

Теорема 1. Следующие условия:

1. Выполнены (F2a) и (F2b).
2. Все компоненты планов, назначаемых Ц каждому АЭ, изменяются монотонно в зависимости от заявки данного АЭ, например:

$$\forall i, \forall j, \forall s_i \in \Omega_i, \forall s_{-i} \in \Omega_{-i}, \forall x_j^i,\ \ \frac{dx_j^i}{ds_i}(s_i, s_{-i}) \geq 0,$$

достаточны для существования глобального максимума каждого $V_i(r_i, s_i, s_{-i})$ в $s_i^* = r_i$.

Доказательство. Анализируя (6), можно увидеть, что при выполненных условиях данной леммы функция $V_i(r_i, s_i, s_{-i})$ не убывает при $r_i < s_i$, и не возрастает при $r_i > s_i$. •

Необходимо заметить, что, если в условиях (F2a) и (F2b) взять произвольные знаки неравенств, то смысл теоремы 1 не изменится. Изменятся лишь знаки неравенств для соответствующих $dx_j^i / ds_i(s_i, s_{-i})$.

Очень важный прием, который используется в иностранной литературе [5], заключается в том, что центр может не принимать в рассмотрение типы агентов, которые его не устраивают.

Если предложенный Ц механизм, удовлетворяет условиям (2) и (3), то функцию полезности каждого АЭ можно записать следующим образом:

$$n_i(r_i, s_{-i}) = V_i(r_i, r_i, s_{-i}).$$

Очевидно, что, с учетом (2):

$$(7)\ \frac{dn_i}{dr_i}(r_i, s_{-i}) = \frac{\partial f_i}{\partial r_i}(\overline{x_i}(r_i, s_{-i}), r_i).$$

В соответствии (F1) выражение (7) положительно. В литературе функция $n_i(r_i, s_{-i})$ называется «информационной рентой» АЭ [5]. Из (7) видно, что данная рента является возрастающей функцией от типа АЭ. Т.е., чем лучше тип АЭ, тем большую прибыль он получает от неполной информированности Ц о своем типе.

Так как в нашей модели условия индивидуальной рациональности (ИР) не зависят от типа АЭ, можно нормализовать минимальную прибыль для каждого АЭ 0, и записать ИР следующим образом:

$$(8)\ \forall i, \forall r_i \in \Omega_i, \forall s_{-i} \in \Omega_{-i},\ \ n_i(r_i, s_{-i}) \geq 0.$$

Механизм ОУ следует создавать таким образом, что бы прибыль любого АЭ, в случае, если его тип окажется наихудшим из возможных для него, была минимальна, т.е. не нарушала требования ИР:

$$\forall i, \forall s_{-i} \in \Omega_{-i},\ \ n_i(\underline{r}_i, s_{-i}) = 0.$$

Следовательно, с учетом (7):

$$(9)\ n_i(r_i, s_{-i}) = \int_{\underline{r_i}}^{\overline{r_i}} \frac{\partial f_i}{\partial r_i}(\overline{x_i}(t, s_{-i}), t) dt.$$

Выражение (9) вместе с теоремой 1 являются основными результатами данной публикации. Они позволяют определить семейство механизмов, в которых доминантой стратегией АЭ является сообщение истинных заявок. Данные результаты получены из анализа УСС для АЭ. УСС для центра позволяет выбрать из полученного семейства механизмов оптимальный по заданному критерию. Конечное решение для каждой задачи будет зависеть от вида критерия оптимальности, вида функций предпочтений элементов и начального распределения ресурсов между элементами, ограничений на ресурсы в системе, ограничений на взаимодействия между элементами и т.д.

3. Пример

Рассмотрим система, состоящую из центра и активного элемента. Центр обладает всем ресурсом типа 1 – деньги, АЭ обладает всем ресурсом типа 2 – рабочие часы. Возможности обоих элементов по потреблению каждого ресурса неограниченны.

Функция полезности АЭ имеет вид $f = x_1 - \frac{x_2^2}{2r}$. Центр знает диапазон возможных значений типа АЭ $r \in \Omega = [\underline{r}, \overline{r}]$ и плотность распределения $r = \frac{1}{\overline{r} - \underline{r}}$ [2]. Критерий эффективности механизма записывается следующим образом:

(10) $\mathbf{E}(x_2 - x_1) \to \max$.

Используя (9), получаем, что

(11) $x_1(r) = \frac{x_2^2(r)}{2r} - \int_{\underline{r}}^{\overline{r}} \frac{x_2^2(t)}{2t^2} dt$.

Подставляя (11) в (10), получаем $p(r) = \{\frac{4r^3 - \underline{r}^3}{\underline{r}^2}, \frac{r^2}{\overline{r}}\}$. Данный механизм полностью соответствует полученному в [2].

Литература

1. КОРГИН Н.А. *Механизмы открытого управления в обменных схемах.* / Управление социально-экономическими системами. Сборник трудов молодых ученых ИПУ РАН. Общая редакция – Новиков Д.А. М.: Фонд «Проблемы управления», 2000. С. 54 – 58.
2. КОРГИН Н.А. *Задачи стимулирования и обменные схемы* // Автоматика и телемеханика. №10. 2001. С. 147 – 153.
3. КОРГИН Н.А. *Механизмы открытого управления в многоэлементных обменных схемах с одним активным элементом на каждом уровне* / «Сократовские чтения – 2002». Материалы пятой ежегодной научной конференции. М.: Международный университет, 2002. С. 51.
4.НОВИКОВ Д.А., ПЕТРАКОВ С.Н. *Курс теории активных систем*. М.: Синтег, 1999. – 108 с.
5. SALANIE B. *The Economics of Contracts*. MTI, 1997. PP. 11 – 105.