ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА СОТРУДНИКОВ СЕРВИСНОГО ЦЕНТРА

Заложнев А.Ю.

(*Институт проблем управления РАН, Москва*)

Рассмотрим процесс функционирования сервисного центра коммерческой фирмы, занимающейся продажей технологического оборудования, в той части, которая касается разовых заявок на обслуживание этого оборудования. Допустим, что заявки на сервисное обслуживание поступают через случайные промежутки времени. Среднее значение интервала времени между поступлениями отдельных заявок составляет $1/l$, а средняя интенсивность потока в единицу времени, соответственно, l.

Допустим, что входящий поток заявок на обслуживание удовлетворяет требованиям стационарности, независимости от предыстории процесса (отсутствие последействия) и ординарности потока (вероятность того, что в интервале времени dt поступит более одной заявки, есть величина бесконечно малая по сравнению с dt). Такой поток называется простейшим, а интервал времени между событиями – приходами последовательных заявок на обслуживание является случайной величиной, распределенной по показательному закону (см., например, [1], стр. 266-269), с плотностью распределения $p(t) = l\, e^{-lt}$, $t \geq 0$, которое характеризует количество заявок на обслуживание, поступающих в сервисный центр в единицу времени.

Продолжим содержательное описание задачи. В сервисном центре работает некоторое количество специалистов, занимающихся обслуживанием оборудования. Работа каждого из этих сотрудников по обслуживанию разовых заявок может быть охарактеризована средним временем обслуживания $1/m$. При этом интенсивность обслуживания (среднее количество заявок, обслуживаемых в единицу времени) равна m.

Будем исходить из того, что время обслуживания заявки специалистом также является случайной величиной и имеет показательное распределение с плотностью $p(t) = m\, e^{-mt}$, $t \geq 0$.

Предположим, что число работающих в сервисном центре специалистов равно n. Если в момент поступления заявки на обслуживание оборудования все специалисты уже заняты обслуживанием других, пришедших ранее заявок, то эта заявка ставится в очередь. Длина очереди не ограничена.

Такая система называется n-канальной системой массового обслуживания (СМО) с ожиданием (см., например, [2], стр. 262-263).

Для такой СМО известно [там же], что если выполняется соотношение $c = \dfrac{l}{mn} < 1$, то существует стационарный режим ее функционирования с конечной длиной очереди на обслуживание. Если имеет место $c \geq 1$, то очередь будет неограниченно возрастать ([2], стр. 262-263).

Таким образом, сразу можно утверждать, что число специалистов сервисного центра n должно быть больше чем l/m.

Возвращаясь к содержательной постановке следует отметить, что время реакции на заявку не должно превышать $t_{\text{реакц}}$, в противном случае фирма уплачивает заказчику штраф в размере s за каждую единицу времени, которая прошла после истечения $t_{\text{реакц}}$ до времени начала обслуживания заявки специалистами сервисного центра.

Для такой СМО, для известных l и m и заданного n можно определить среднее время нахождения заявки в очереди ([2], стр. 262-263; [4], стр. 444-445): $t_{\text{ож}} = \dfrac{r^n p_0}{nmn!(1-c)^2}$, где $r = l / m$, $c = r / n$,

$$p_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \Lambda + \frac{r^n}{n!} + \frac{r^{n+1}}{n!(n-r)}\right)}.$$

Таким образом, в случае, если $t_{\text{ож}} > t_{\text{реакц}}$, за каждую единицу времени фирма в среднем уплачивает штраф в размере $l\,(t_{\text{ож}} - t_{\text{реакц}})s$, где, как уже отмечалось выше, l – среднее количество заявок на обслуживание, поступающих в единицу времени.

Средняя заработная плата каждого специалиста сервисного центра составляет z денежных единиц в единицу времени. Поскольку число специалистов составляет n человек, то общая сумма зарплаты, выплачиваемой фирмой специалистам сервисного центра в единицу времени составляет $n\,z$.

Сформулируем задачу нахождения оптимального количества специалистов сервисного центра n^*, которое минимизирует суммарные издержки фирмы в виде штрафов за опоздание с началом обслуживания заявок и заработной платы сотрудников сервисного центра: $n^* = \arg\min F(n)$, $F(n) = l\,(t_{\text{ож}}(n) - t_{\text{реакц}})s + n\,z$, где $n \in M \subset N$, $n_1 < n < n_2$ и $t_{\text{реакц}} = const$; n_1 и n_2 – соответственно нижняя и верхняя границы множества M:

(1) n_1: max $n \in N$: $c = \dfrac{l}{mn} \geq 1$,

(2) n_2: *min* $n \in N$: $t_{ож}(n) < t_{реакц}$; $n_1, n_2 \notin M$.

Содержательно: n_1 – максимальное из всех $n \in N$, при которых очередь на обслуживание неограниченно возрастает; n_2 – минимальное из всех $n \in N$, при которых время ожидания заявки меньше чем установленное время реакции.

Сформулированную задачу будем решать методом перебора по $n \in M$ при заданных значениях l, m, s и z. Значение n_1 определим из неравенства, фигурирующего в (1). Значение n_2 определим путем последовательного увеличения n от $n_1 + 1$ до того значения, при котором впервые выполнится неравенство, фигурирующее в (2), это и будет n_2.

Будем решать задачу для значений параметров $l = 5$, $m = 1$, $z = 1$ и значений параметра s последовательно равных $4\,z$, $1\,z$, $0.25\,z$. При этом $r = l / m = 5$, и на основании неравенства из (1) и условия $n_1 \in N$ также имеет место $n_1 = 5$, откуда следует $n \geq 6$. В качестве единицы измерения времени при расчете величины $F(n)$ примем 1 месяц. Величина $t_{реакц} = 4$ (часам) ≈ 0.0056 (месяца при 30 днях в месяце), что соответствует реальному времени реакции при обслуживании заявок на ремонт технологического оборудования.

Решение задачи приведено в таблицах 1 и 2. Из таблицы 1 видно, что $t_{ож}\,(n{=}11) = 1.8$(часа) $< t_{реакц} = 4$(часа), откуда следует, что $n_2 = 11$ и $M = \{6,7,8,9,10\}$. Из таблицы 2 видно, что для приведенных значений l, m, z и, соответственно, значений s равных 4, 1, 0.25 получаем значения n^* соответственно равные 8, 7 и 6. Это и будут оптимальные значения количества специалистов при вышеприведенных значениях параметров.

Таблица 1

n	6	7	8	9	10	11
p_0	0.0045	0.0060	0.0065	0.0066	0.0067	0.0067
$t_{ож}$ (в месяцах)	0.5859	0.1628	0.0560	0.0200	0.0072	0.0025
$t_{ож}$ (в сутках)	17.577	4.884	1.68	0.6	0.216	0.075
$t_{ож}$ (в часах)	421.848	117.216	40.32	14.4	5.184	1.8

Таблица 2

n		6	7	8	9	10	
s=4	$F(n)$	17.606	10.144	**9.008**	9.288	10.032	**n^*=8**
s=1	$F(n)$	8.902	**7.786**	8.252	9.072	10.008	**n^*=7**
s=0.25	$F(n)$	**6.725**	7.197	8.063	9.018	10.002	**n^*=6**

Решение задачи может быть проиллюстрировано рисунком 1. По оси абсцисс отложена величина n, а по оси ординат, соответственно, $t_{ож}(n)$, заданное в целях большей наглядности в днях, величина суммарной месячной зарплаты nz и величина $F(n)$, полученная при $s = 4z = 4$. Также в целях наглядности, хотя задача решалась только для целых n, соседние в смысле значений ординаты точки (например, $t_{ож}(n)$ и $t_{ож}(n{+}1)$) соединены отрезками прямых.

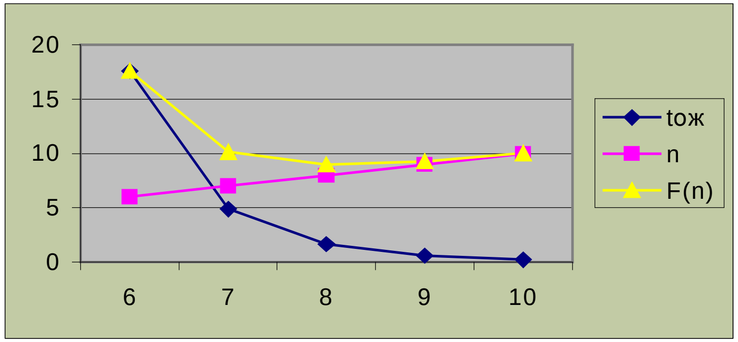

Рис. 1.

На основе полученных результатов можно сделать следующий практический вывод. В случае, если величина штрафа s за опоздание с началом обслуживания относительно мала по сравнению со средней зарплатой специалиста s (например, для нашей задачи случай $s = 0.25$) за тот же период времени, и известны средняя интенсивность потока заявок (l) и средняя производительность труда специалиста по их обслуживанию (μ), нет смысла проводить достаточно громоздкие расчеты по определению n^*, а в качестве оптимальной величины количества специалистов можно принять величину n_1+1. т.е. в таком случае оптимальным будет минимальное количество специалистов, при котором уже обеспечивается ограниченность очереди на обслуживание. Для рассматриваемой задачи $n^*(s = 0.25) = n_1 + 1 = 6$.

Литература

1. ЗАЙЧЕНКО Ю.П. *Исследование операций*. Киев: Издательское объединение «Вища школа», 1975. – 320 с.

2. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Исследование операций*. М.: Советское радио, 1972. – 552 с.

3. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С., ОВЧАРОВ Л.А. *Прикладные задачи теории вероятностей*. М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

4. ФОМИН Г.П. *Математические методы и модели в коммерческой деятельности*. Учебник. М.: Финансы и статистика, 2001. – 544 с.