ОПТИМАЛЬНЫЕ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ПРИ МОНОТОННОМ ФУНКЦИОНАЛЕ СТОИМОСТИ

Губко М.В.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
*m*goubko@*mai*l.ru

Введение

Во многих областях науки и техники важную роль играет понятие иерархии, иерархической структуры. Для таких областей как теория систем, теория управления, типичным является представление объекта исследования (системы) в виде структуры подчиненности одних элементов системы другим.

Математической моделью иерархических структур являются ориентированные графы. Ориентированным графом (*орграфом*) называется кортеж $<V,E>$, где V – это множество вершин, $E=\{(v_1,v_2):v_1,v_2\in V\}$ – множество дуг. Присутствие во множестве E вектора (v_1,v_2) соответствует наличию связи (дуги) между вершинами v_1 и v_2 графа. Тогда *иерархией*, или *иерархической структурой* обычно называют ациклический[1] орграф.

В настоящее время области применения теории графов весьма многочисленны – теория кодирования, нелинейная динамика, управление проектами и т.д. Во многих приложениях графы используются именно для моделирования иерархий, и одной из типичных задач является оптимизация иерархии, то есть поиск оптимальной в некотором смысле иерархической структуры на множестве допустимых иерархий[2].

Обычно подобные задачи рассматриваются практически независимо, при их решении существенно используется специфика предметной области. В то же время сходство между этими задачами делает актуальными сведение их к единой постановке и разработку единых подходов к их решению. Основной чертой данного подхода должно быть стремление к рассмотрению задачи оптимизации иерархии в абстрактном виде без привязки к конкретным содержательным интерпретациям. Примерами реализации этой программы служат работы [1-4], и данная статья может

[1] *Орграф называется ациклическим, если в нем нет циклов – последовательностей дуг вида* $(v_1,v_2),(v_2,v_3),\dots,(v_n,v_1)$.

[2] *В* [6] *приведены примеры подобных задач из теории алфавитного кодирования, теории массового обслуживания, теории управления.*

рассматриваться как продолжение намеченной в них программы исследования.

1. Постановка задачи и основные понятия

Как отмечалось выше, задачу оптимизации иерархии можно сформулировать как задачу выбора оптимальной в некотором смысле иерархической структуры из некоторого множества допустимых иерархий (ациклических орграфов).

На практике обычно рассматриваются конечные иерархии, в графе каждой из которых множество вершин конечно. В то же время, анализ бесконечных иерархий иногда позволяет выявить важные свойства оптимальных иерархических структур [5], поэтому далее рассматривается общий случай. Предположение о конечности иерархий будет оговариваться отдельно.

Определение 1. Для произвольной вершины v орграфа $G=<V,E>$ множество $Q_G(v)=\{v':(v',v)\in E\}$ будем называть множеством непосредственных подчиненных вершины *v*, множество $R_G(v)=\{v':(v,v')\in E\}$ – множеством непосредственных начальников вершины *v*. Вершина v графа G называется терминальной, если множество ее непосредственных начальников пусто, $R_G(v)=\varnothing$.

Множество терминальных вершин графа *G* обозначим T_G.

Итак, пусть на множестве всех иерархий Ξ задано некоторое множество допустимых иерархий $\Omega\subseteq\Xi$ и отображение $P:\Omega\to[0,+\infty)\cup\{+\infty\}$, ставящее в соответствие каждому орграфу из множества Ω неотрицательное число. Отображение $P(\cdot)$ будем называть функционалом стоимости иерархии. Тогда задача поиска оптимальной иерархии на множестве допустимых иерархий Ω состоит в поиске графа $G^*\in\Omega$, доставляющего минимум функционала стоимости, то есть

(1) $G^*\in Arg\min\limits_{G\in\Omega}P(G)$ [1].

Разумеется, решать задачу (1) в общем виде невозможно – необходимо делать некоторые предположения о виде функционала и допустимого множества. В [1-6] рассматривается задача поиска оптимальной иерархии для функционалов специального вида (так называемых, структурных функционалов стоимости) и определенных классов допустимых множеств (множеств иерархий, реализующих заданный набор функций). В [6]

[1] *Естественно, пока не утверждается, что задача обязательно имеет решение, то есть что множество* $Arg\min\limits_{G\in\Omega}P(G)$ *не пусто.*

приведены примеры прикладных задач, сводимых к поиску оптимальной иерархии со структурным функционалом стоимости.

Данная работа посвящена исследованию более слабых предположений о виде функционала стоимости, а именно, свойств оптимальной иерархии при монотонном функционале стоимости P.

2. Монотонные функционалы стоимости

Одним из важных классов функций множества являются монотонные функции. Функция множества $Q(A)$ монотонна, если для любой пары множеств $A \subseteq A'$ $Q(A) \le Q(A')$. Так как функционал стоимости иерархии является, по сути, функцией двух множеств, V и E, выделим свойства монотонности по каждому из них.

Определение 2. Функционал стоимости иерархии P называется дуго-монотонным, если для произвольных графов $G_1 = <V, E_1> \in \Omega$, $G_2 = <V, E_2> \in \Omega$ таких, что $E_1 \subset E_2$, выполнено неравенство $P(G_1) \le P(G_2)$ (иначе говоря, удаление из графа дуг не увеличивает стоимости графа). Функционал $P : \Omega \to [0, +\infty)$ называется вершинно-монотонным, если неравенство $P(G_1) \le P(G_2)$ выполнено для произвольных графов $G_1 = <V_1, E> \in \Omega$, $G_2 = <V_2, E> \in \Omega$ таких, что $V_1 \subset V_2$ (удаление из графа изолированных вершин не увеличивает его стоимости). Если неравенство $P(G_1) < P(G_2)$ выполняется строго, то функционал называется строго дуго-монотонным или строго вершинно-монотонным соответственно. Одновременно и дуго-монотонный и вершинно-монотонный функционал будем называть монотонным. Одновременно и строго дуго-монотонный и строго вершинно-монотонный функционал – строго монотонным.

Отметим, что если задана иерархия $G = <V, E>$, то любой граф $G' = <V, E'>$, в котором $E' \subset E$, также является иерархией.

3. Базовые графы

Для произвольного графа $G = <V, E>$ множество дуг E можно рассматривать, как бинарное отношение [7] (отношение подчиненности) на множестве V.

Определение 3 [7]. Бинарное отношение E называется произведением $E_1 E_2$ бинарных отношений E_1 и E_2, если $(v_1, v_2) \in E$ $\Leftrightarrow$ $\exists w : (v_1, w) \in E_1, (w, v_2) \in E_2$. Для произвольного отношения E естественным образом определяется его *k*-я степень E^k.

Для произвольного бинарного отношения можно определить его транзитивное замыкание [7] по формуле

(2) $E^\infty = E \cup E^2 \cup \ldots = \bigcup_{k \in N} E^k$.

Транзитивное замыкание отношения E является минимальным транзитивным отношением, содержащим E. Если исходное отношение E ациклично, то транзитивное замыкание антирефлексивно.

Определение 4. Для произвольного графа $G = <V, E>$ отношение $\Gamma_G := I_V \cup E^\infty$ (и соответствующий ему граф на множестве вершин V) будем называть отношением подчиненности (графом подчиненности) графа G.[1]

Определение 5. Для произвольной вершины $v \in V$ иерархии $G = <V, E>$ коллективом $K_G(v)$ будем называть множество

$$K_G(v) := \{v' \in V : (v', v) \in \Gamma_G\} = Q_{\Gamma_G}(v),$$

$S_G(v) := \{v' \in V : (v', v) \in E^\infty\} = Q_{E^\infty}(v)$ назовем множеством подчиненных вершины *v*, а множество

$M_G(v) := \{v' \in V : (v, v') \in E^\infty\} = R_{E^\infty}(v)$ назовем множеством начальников вершины *v*.

Равенство графов подчиненности порождает отношение эквивалентности (симметричное транзитивное рефлексивное отношение) на множестве иерархий, то есть расслаивает Ω на классы эквивалентных графов (графов с одинаковыми графами подчиненности). Класс эквивалентных графов с транзитивным замыканием E^∞ обозначим $\Omega(E^\infty)$.

Определение 6 [7]. Для произвольной иерархии $G = <V, E>$ ее базовым графом называется граф $G' = <V, E'>$, в котором

(3) $E' = E^\infty \setminus E^\infty E^\infty$.

Содержательный смысл этой операции прост – для каждой вершины отношения подчиненности иерархии G удаляются подчиненные ее подчиненных.

Базовый граф является иерархией, то есть $G' \in \Xi$. Транзитивное замыкание G' равно E^∞, и удаление любой связи из графа G' приводит к изменению его транзитивного замыкания. В то же время, добавление в G' любой связи, имеющейся в его транзитивном замыкании, оставляет транзитивное замыкание неизменным.

[1] *I_V – отношение тождества элементов множества V:* $I_V = \{(v, v) : v \in V\}$.

Содержательно все базовые графы описываются известным еще с феодальных времен правилом «вассал моего вассала – не мой вассал». Это следует непосредственно из определения, ведь для каждой вершины из множества всех подчиненных удаляются подчиненные подчиненных.

4. Вид оптимальной иерархии для монотонного функционала стоимости

Как уже было отмечено, среди иерархий с одинаковым графом подчиненности базовый граф имеет минимальное число дуг. Поэтому при дуго-монотонном функционале стоимости иерархии базовый граф имеет минимальную стоимость на этом классе иерархий, а при строго дуго-монотонном – базисный граф строго дешевле любого графа из данного класса.

Теорема 1. Пусть для любой иерархи из множества допустимых иерархий Ω ее базовый граф также содержится в Ω, а функционал стоимости иерархии дуго-монотонный. Тогда для любого числа $e > 0$ найдется некоторый базовый граф G стоимости $P(G^*) < \inf_{G \in \Omega} P(G) + e$. Если также известно, что минимум в (1) достигается[1], то существует базовый граф из Ω минимальной стоимости. Если функционал строго дуго-монотонный, то любое решение задачи (1) является базовым графом.

Доказательство. Пусть минимум в (1) достигается. Предположим, что все оптимальные иерархии не являются базовыми графами. Выберем тогда произвольную оптимальную иерархию. В силу дуго-монотонности функционала ее базовый граф имеет не большую стоимость и по условию теоремы является допустимым. Следовательно, базовый граф принадлежит решению.

Предположим теперь, что функционал строго дуго-монотонный и иерархия *G* из решения задачи (1) не является базовым графом. Тогда соответствующий базовый граф имеет (в силу строгой дуго-монотонности функционала) строго меньшую стоимость, чем *G*, что невозможно в силу оптимальности *G*.

Пусть теперь решение задачи (1) пусто. Тогда в силу неотрицательности функционала для любого $e > 0$ найдется иерархия *G* стоимости $P(G) < \inf_{G' \in \Omega} P(G') + e$. Но базовый граф иерархии *G* имеет стоимость не большую стоимости *G* и является допустимым. •

Условия на допустимое множество Ω из формулировки теоремы 1 выполнены, в частности, если Ω ограничивает не сами допустимые

[1] *Например, минимум в (1) достигается при конечном множестве* Ω.

иерархии, а допустимые графы подчиненности, как например, сформулированное в [1] понятие «организации, реализующей заданный набор функций».

Таким образом, теорема 1 говорит о том, что зачастую при дуго-монотонном функционале стоимости искать оптимальную иерархию достаточно на множестве базовых графов из Ω.

Данный результат имеет и следующее значение. Между базовыми графами и графами подчиненности имеется взаимно однозначное соответствие, определяемое формулами (2) и (3). Поэтому появляется возможность переформулировать задачу в терминах графов подчиненности и, соответственно, решать задачу на множестве графов подчиненности, пользуясь известными результатами [8] исследования отношений частичного порядка, которыми являются графы подчиненности.

Результат, аналогичный теореме 1 можно получить и для вершинно-монотонных функционалов, заменив в формулировке слова «базовый граф» на «граф без изолированных вершин», однако это не столь интересно в смысле содержательных интерпретаций.

Наконец, исследуем один важный с практической точки зрения класс допустимых множеств:

Определение 7. Множество Ω_f всех иерархий, в которых имеется вершина с заданным коллективом $K_G(v) = f$, называется классом иерархий, реализующих функцию *f*.

Так как для произвольного графа $G \in \Omega_f$ его базовый граф содержит коллектив *f*, то Ω_f удовлетворяет условиям теоремы 1. Однако для задачи поиска оптимальной на Ω_f иерархии можно сформулировать и более сильное условие оптимальности:

Теорема 2. Если в задаче поиска оптимальной иерархии на Ω_f минимум в (1) достигается, а функционал стоимости строго монотонный, то любой оптимальный граф является ордеревом[1].

Доказательство. Пусть задана оптимальная иерархия $G = \langle V, E \rangle \in \Omega_f$. В ней есть вершина *v* с коллективом *f*. Рассмотрим граф $H = \langle V \cap f, E \cap f \times f \rangle$. Из этого графа удалили все вершины, из которых нет пути в *v*, а также входящие и исходящие дуги этих вершин. Ациклический граф *H* по-прежнему содержит вершину v, и ее коллектив

[1] *Ордерево – это ориентированный граф, в котором из каждой вершины, кроме одной, терминальной, выходит ровно одна дуга. Коллектив терминальной вершины совпадает с множеством всех вершин графа, и дуг из нее не выходит.*

не изменился. Следовательно, $H \in \Omega_f$. Кроме того, в графе H вершина v – единственная терминальная вершина, так как ее коллектив совпадает с множеством всех вершин графа.

Поскольку G оптимален, то $H = G$, так как иначе в силу строгой монотонности функционала стоимость H строго меньше, что противоречит оптимальности графа G. Таким образом, в оптимальном графе коллектив единственной терминальной вершины совпадает с множеством всех вершин графа, то есть из любой вершины есть путь в терминальную вершину. Предположим, что в графе G найдется вершина v_0, из которой выходит более одной дуги, то есть множество $R_G(v_0)$ содержит как минимум два элемента – v' и v''. Удалим дугу (v_0, v'). Коллектив терминальной вершины v не изменился, так как из вершины v'' по-прежнему есть путь в v, а из v_0 есть путь в v''. В то же время, в силу строгой монотонности функционала стоимость графа строго уменьшилась, а это невозможно, так как G оптимален. Следовательно, оптимальный граф G является ордеревом. •

Теорема 3. Если все иерархии из Ω_f конечные, а функционал стоимости монотонный, то для любой иерархии из Ω_f имеется ордерево из Ω_f не большей стоимости.

Доказательство. Возьмем произвольную иерархию G из Ω_f и аналогично доказательству теоремы 2 удалим все вершины, из которых нет пути в вершину v с коллективом f. Если в получившемся графе из каждой вершины выходит одна дуга, то получили искомое ордерево. В противном случае вершин, из которых выходит более одного ребра конечное число, и мы можем для каждой из них удалить все исходящие дуги кроме одной (произвольной). Получившееся ордерево будет принадлежать Ω_f и в силу монотонности функционала иметь не большую стоимость, чем G. •

Следствие 1. Если в условиях теоремы 3 минимум в выражении (1) достигается, то существует оптимальное на Ω_f ордерево.

Данные результаты позволяют сделать вывод, что при поиске оптимальной иерархии на Ω_f при монотонном функционале стоимости достаточно ограничиться классом ордеревьев из Ω_f.

Литература

1. *ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева* // Вестн. Волг. ун-та. 2001. Сер. 1: Математика. Физика. С. 93 – 113.

2. *МИШИН С.П. Оптимальное управление структурой организационной системы* / Сборник трудов международной научно-технической конференции «Современные сложные системы управления». Липецк, 12–14 марта 2002. С. 101 – 102.

3. *ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы* // Автоматика и телемеханика. 2002. №5. С. 120 – 132.

4. *ГУБКО М.В., МИШИН С.П. Оптимальная структура системы управления технологическими связями* / Сборник трудов международной научно-технической конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол, 27-29 ноября 2002. С. 50 – 55.

5. *ГУБКО М.В. Структура оптимальной организации континуума исполнителей* // Автоматика и телемеханика. 2002. №12.

6. *МИШИН С.П. Модели и методы оптимизации иерархических организационных структур* // Диссертация на соискание степени к.ф.м.н., Волгоградский государственный университет, 2003.

7. *КУЗНЕЦОВ О.П., АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ Г.М. Дискретная математика для инженера*. М.: Энергоатомиздат, 1988.

8. *КУЗЬМИН В.Б. Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений*. М.: Наука, 1982.