

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФИНАНСОВЫМИ РЕСУРСАМИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Павлов О.В.

(Самарский государственный аэрокосмический  
университет, Самара, [pavlov@ssau.ru](mailto:pavlov@ssau.ru))

## Введение

Рассматривается задача управления финансовыми ресурсами производственной фирмы на временном интервале  $[0, T]$ . Используются следующие гипотезы. Предполагается что фирма может развиваться за счёт «внутренних» источников (прибыли), и «внешних» финансовых ресурсов (государственных инвестиций из бюджета, средств различных инвестиционных фондов, банковских кредитов). Фирма выпускает один вид продукции, при неизменной технологии производства. Производственная деятельность фирмы описывается однофакторной производственной функцией. Предполагается мгновенное освоение капиталовложений, отсутствие временного лага между осуществлением затрат и началом функционирования производственных фондов. Считается, что вся произведенная продукция фирмы реализуется на рынке.

Определяются оптимальные условия привлечения «внутренних» и «внешних» финансовых ресурсов для развития основных фондов фирмы.

## 1. Постановка задачи оптимального управления

Динамика производственных фондов фирмы на временном интервале  $[0, T]$  описывается дифференциальным уравнением

$$(1) \frac{dK(t)}{dt} = -mK(t) + \frac{u_1(t)}{p_\phi} + \frac{u_2(t)}{p_\phi}$$

где  $K(t)$  – количество основных производственных фондов в момент времени  $t$ , выраженный в натуральных единицах;  $m$  – коэффициент выбытия основных фондов;  $u_1(t)$  – часть прибыли, инвестируемая в основные фонды в стоимостном выражении;  $u_2(t)$  – внешние инвестиции, полученные в момент времени  $t$  в стоимостном выражении;  $p_\phi$  – цена основных производственных фондов.

Известно количество основных фондов в начальный момент времени, в натуральных единицах

$$(2) K(0) = K_0.$$

Уравнение (1) показывает, что «внутренние» и «внешние» инвестиции используются на восстановление и на увеличение основных производственных фондов.

Чистая прибыль фирмы в момент времени  $t$  определяется следующим выражением

$$(3) Pr(t) = p_n Q(t) - Z(t) - A(t) - N(t)$$

где  $Pr(t)$  – чистая прибыль фирмы в момент времени  $t$ ;  $p_n$  – цена продукции фирмы;  $Q(t)$  – объём выпуска продукции;  $Z(t)$  – производственные затраты;  $A(t)$  – амортизационные отчисления;  $N(t)$  – налоговые выплаты.

Объём выпуска продукции, производственные затраты, амортизационные отчисления, налоговые выплаты определяются следующими выражениями:

$$(4) Q(t) = fK(t)$$

$$(5) Z(t) = cQ(t)$$

$$(6) A(t) = mK(t)$$

$$(7) N(t) = p_n * n_1 Q(t) - n_2 [p_n Q(t) - cQ(t)]$$

где  $f$  – показатель фондоотдачи;  $c$  – себестоимость продукции;  $n_1$  – ставка налога на добавленную стоимость;  $n_2$  – ставка налога на прибыль.

Подставляя (4)-(7) в (3) получим следующее выражение:

$$(8) Pr(t) = [fa - mp_\phi]K(t)$$

где коэффициент  $a$  определяется следующим выражением

$$a = p_n (1 - n_1 - n_2) - c(1 - n_2).$$

Экономический смысл коэффициента  $a$  – прибыль фирмы от продажи единицы продукции.

В качестве критерия оптимальности примем прибыль фирмы идущей на «потребление», т.е. ту часть прибыли, которая остаётся после инвестиций в основные фонды

$$(9) J = \int_0^T [Pr(t) - u_1(t) - u_2(t)(1+r)] dt \rightarrow \max$$

где  $r$  – величина кредитной ставки.

Подставим выражение (8) в критерий (9):

$$(10) J = \int_0^T [(fa - mp_a)K(t) - u_1(t) - u_2(t)(1+r)] dt \rightarrow \max$$

В качестве управляющих функций рассматриваются объёмы внутренних  $u_1(t)$  и внешних  $u_2(t)$  инвестиций. На управляющие функции наложены следующие ограничения

$$(11) 0 \leq u_1(t) \leq i_1(t)$$

$$(12) 0 \leq u_2(t) \leq i_2(t)$$

$$(13) 0 \leq u_1(t) + u_2(t) \leq i(t)$$

Экономический смысл ограничений (11)-(13) заключается в том, что существует предельные величины  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i(t)$ , характеризующие возможности фирмы в освоении «внутренних» и «внешних» капиталовложений. Сформулируем задачу оптимального управления. Необходимо, выбирая объёмы «внутренних» и «внешних» инвестиций перевести динамическую систему (1) из начального состояния (2) в конечное состояние в момент времени  $T$ , таким образом, чтобы критерий оптимальности (10) был максимальным.

## 2. Решение задачи оптимального управления

Для решения сформулированной задачи оптимального управления применим принцип максимума Понтрягина [1], [2]. Запишем функцию Гамильтона

$$H(t) = \Psi(t) \left[ -mK(t) + \frac{u_1(t)}{P_\phi} + \frac{u_2(t)}{P_\phi} \right] + (fa - mp_\phi)K(t) - u_1(t) - u_2(t)(1+r)$$

где  $\Psi(t)$  – вспомогательная переменная, удовлетворяет уравнениям

$$(14) \frac{d\Psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t)}{\partial k(t)} = \Psi(t)m - fa + mp_\phi$$

и условиям трансверсальности

$$(15) \Psi(T) = 0.$$

Перепишем функцию Гамильтона

$$(16) H(t) = \left( \frac{\Psi(t)}{P_\phi} - 1 \right) u_1(t) + \left( \frac{\Psi(t)}{P_\phi} - 1 + r \right) u_2(t) + [fa - mp_\phi - \Psi(t)m]K(t)$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона достигает максимума относительно управляющих параметров.

Анализируя выражение (16) замечаем, что гамильтониан линейно зависит от управляющих функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ . Следовательно оптимальное управление инвестициями определится следующими соотношениями

$$(17) u_1(t) = \begin{cases} i_1(t), & \text{если } \frac{\Psi(t)}{P_\phi} - 1 > 0 \\ 0, & \text{если } \frac{\Psi(t)}{P_\phi} - 1 < 0 \end{cases}$$

$$(18) u_2(t) = \begin{cases} i_2(t), & \text{если } \frac{\Psi(t)}{P_\phi} - 1 + r > 0 \\ 0, & \text{если } \frac{\Psi(t)}{P_\phi} - 1 + r < 0 \end{cases}$$

Таким образом, оптимальное управление является релейным. Оптимальной стратегией для фирмы является либо инвестирование получаемой прибыли или привлекаемых кредитных ресурсов с максимальной интенсивностью в основные фонды, либо полный отказ от расширения основных фондов. Для определения условий оптимальной стратегии для фирмы решим дифференциальное уравнение (14) методом разделения переменных:

$$\frac{d\Psi(t)}{m\Psi(t) - fa + p_2m} = dt.$$

Интегрируя, получаем выражение

$$\Psi(t) = Ce^m + \frac{fa - p_\phi m}{m}.$$

Константу  $C$  определим из условия трансверсальности (15), окончательно получим

$$(19) \Psi(t) = \frac{fa - p_\phi m}{m} (1 - e^{-m(T-t)})$$

Функция Гамильтона с учётом (19) запишется

$$(20) H(t) = \left( \frac{(fa - p_\phi m)(1 - e^{-m(T-t)})}{mp_\phi} - 1 \right) u_1(t) + \left( \frac{(fa - p_\phi m)(1 - e^{-m(T-t)})}{mp_\phi} - (1 + r) \right) u_2(t) + \left[ fa - mp_\phi - m \left( \frac{fa - p_\phi m}{m} (1 - e^{-m(T-t)}) \right) \right] K(t)$$

Оптимальные условия инвестирования с учётом (19) запишутся

$$(21) u_1(t) = \begin{cases} i_1(t), & \text{если } fa - p_\phi m > \frac{mp_\phi}{1 - e^{-m(T-t)}} \\ 0, & \text{если } fa - p_\phi m < \frac{mp_\phi}{1 - e^{-m(T-t)}} \end{cases}$$

$$(22) u_1(t) = \begin{cases} i_1(t), & \text{если } fa - p_\phi m > \frac{mp_\phi(1+r)}{1 - e^{-m(T-t)}} \\ 0, & \text{если } fa - p_\phi m < \frac{mp_\phi(1+r)}{1 - e^{-m(T-t)}} \end{cases}$$

Таким образом, полученные условия (21) и (22) определяют оптимальную стратегию фирмы по использованию «внутренних» и «внешних» ресурсов.

### Литература

1. ПОНТЯГИН Л.С., БОЛТЯНСКИЙ В.Г., ГАМКРЕЛИДЗЕ Р.В., МИЩЕНКО Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. М.: «Наука», 1983. – 392 с.
2. ИНТРИЛИГАТОР М. *Математические методы оптимизации и экономическая теория*. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 576 с.