P-ДОМИНАНТНОЕ РАВНОВЕСИЕ В ЗАДАЧЕ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНТРОЛЕМ

Залесов А.И.
(*Московский Физико-Технический Институт*)
zalesov@mail.ru

Введение

Теория игр, продолжая активно развиваться, в последнее время фактически стала основным инструментом для решения не только задач теории активных систем (ТАС), но и задач экономики, управления и даже психологии. За последние десять лет было предложено большое количество как принципиально новых концепций равновесия [10, 11], так и модификаций существующих [1-3, 10, 11], в частности, модификаций равновесия Нэша [1-3]. Цель многих подобных исследований заключается в нахождении универсальной концепции решения, которая давала бы единственное решение любой игры и достаточно хорошо описывала реальные ситуации [11].

В настоящей работе рассматривается сравнительно новая концепция равновесия «p-dominance» (p-доминирование), впервые предложенная Д. Харшаньи и Р. Зельтеном в 1988 году [11], развитая С. Моррисом, Р. Бобом, Х.С. Шином в 1995 году [3] и С. Моррисом в соавторстве с А. Кажи в 1997 году [2].

Концепция p-dominance представляет собой модификацию равновесия Нэша. Равновесными по Нэшу называются такие наборы стратегий игроков, что ни один игрок, как бы он не менял свою стратегию, не может увеличить свой выигрыш, при условии, что остальные оставляют свои стратегии неизменными. Концепция p-dominance несколько усиливает равновесие Нэша, предполагая, что, даже если остальные участники могут с некоторыми (задаваемыми вектором p) вероятностями отклоняться от равновесных стратегий, все равно изменением своей стратегии игрок не сможет увеличить математическое ожидание собственного выигрыша.

Из усиления требований к равновесию естественным образом вытекает, что множество p-доминантных равновесий должно быть более узким, чем множество равновесий Нэша.

В рассматриваемой ниже задаче стимулирования в системе с распределенным контролем как раз и удается при некоторых параметрах модели уменьшить количество равновесий.

1. p-Доминантное равновесие

Пусть игроки могут выбирать свои стратегии с некоторыми вероятностями, и пусть нам известны распределения этих вероятностей: $\lambda_i: X_i \to [0; 1]$, $\sum_i \lambda_i = 1,\ i = 1..n$.

Вектор x^* является **p**-доминантным равновесием, если для любого $i=1..n$, для любого $x_i \in X_i$ и для любого распределения вероятностей, такого, что $\lambda_j(x_j^*) \geq p_j,\ \forall j \neq i$, выполняется:

$$\sum K(x_i^*, x_{-i}) \cdot \lambda(x_{-i}) \geq \sum K(x_i, x_{-i}) \cdot \lambda(x_{-i}), \qquad (1.1)$$

где $\lambda(x_{-i}) = \lambda_1(x_1) \cdot \lambda_2(x_2) \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-1}(x_{i-1}) \cdot \lambda_{i+1}(x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}(x_{n-1}) \cdot \lambda_n(x_n)$, а суммирование ведется по всему множеству X_{-i}.

Итак, p-доминантным равновесием называется такое параметрическое равновесие с вектором параметров **p**, что при условии выбора игроками равновесных стратегий с вероятностями не меньшими вероятностей, определяемых вектором **p**, каждый игрок получает максимальное математическое ожидание выигрыша.

p-Доминантное равновесие отличается от равновесия Нэша следующим. В равновесии Нэша игроку невыгодно отклонение от равновесной стратегии при условии, что остальные участники игры сохраняют свои стратегии неизменными, то есть выбирают их с вероятностью единица. В p-доминантном равновесии игроку невыгодно менять свою стратегию и в том случае, если игроки могут отклоняться от выбранных стратегий, но с некоторыми, обычно небольшими, вероятностями. Это более сильное требование, чем требование, предъявляемое равновесием Нэша, поэтому множество p-доминантных равновесий является более узким, чем множество равновесий Нэша.

Отметим, что любое p-доминантное равновесие является равновесием Нэша. Действительно, выбрав распределения λ_i таким образом, что $\lambda_i(x_i^*) = 1$, $\lambda_i(x_i \neq x_i^*) = 0$, получим определение равновесия Нэша.

Отметим также, что при выборе вектора $\boldsymbol{p} = (1, \ldots, 1)$, определения p-доминантного равновесия и равновесия Нэша совпадают.

Если вектор $\boldsymbol{p} = (0, \ldots, 0)$, то определение p-доминантного равновесия совпадает с определением равновесия в доминантных стратегиях. Действительно, если по очереди выбирать распределения λ_i такими, что вероятность какой-либо одной стратегии i-го игрока равна единице, а вероятность остальных равна нулю, таким образом, перебрав все возможные стратегии всех игроков, то мы получим как раз определение равновесия в доминантных стратегиях.

Итак, p-доминантное равновесие является промежуточной концепцией между равновесием Нэша и равновесием в доминантных стратегиях. Поэтому при приближении вектора $\boldsymbol{p}$ к нулевому количество p-доминантных равновесий будет уменьшаться, а при приближении к единичному вектору – увеличиваться. Именно это свойство и позволяет в некоторых случаях находить единственное равновесие, выбирая соответствующее значение $\boldsymbol{p}$.

2. Задача стимулирования в системе с распределенным контролем

Рассмотрим задачу стимулирования в активной системе (АС) с двумя центрами, осуществляющими распределенный контроль над единственным активным элементом (АЭ). Модель такой системы представлена на рисунке 1.

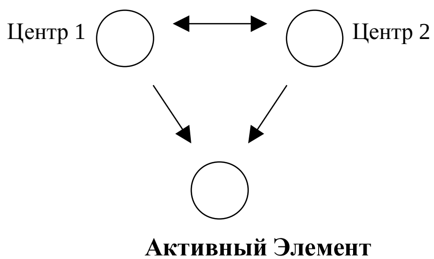

Рис. 1. Модель АС с распределенным контролем

Задача центров состоит в том, чтобы заставить активный элемент выполнить определенное действие. Выполнение этого действия активным элементом приносит центрам определенные выигрыши. Обозначим их H_1 и H_2 для первого и второго центров соответственно.

Сначала каждый центр назначает свой механизм стимулирования, то есть зависимость вознаграждения, выплачиваемого активному элементу от того, выполнено ли требуемое действие или нет.

Затем активный элемент, которому сообщаются механизмы стимулирования обоих центров, либо выполняет требуемое действие, если суммарное вознаграждение, получаемое им от центров, равно или превосходит его затраты на выполнение этого действия, либо нет, в противном случае.

Поскольку центрам необходимо стимулировать выполнение лишь одного действия, механизмы стимулирования центров должны выглядеть так: $s_i(x) = \begin{cases} s_{i0}, \text{если действие выполнено} \\ 0, \text{если действие не выполнено} \end{cases}$.

Пусть каждый центр может назначить стимулирование трех уровней: $s_{i0} = 0$, ½ и 1, где за единицу приняты затраты активного элемента на выполнение действия. Величины H_1 и H_2 тоже выражены в этих единицах.

Значения H_1 и H_2 должны удовлетворять соотношениям H_1 ³ 1 и H_2 ³ 1, то есть каждый центр имеет возможность в одиночку компенсировать активному элементу его затраты, и таким образом гарантировать себе выигрыш $H_i - 1$.

Между центрами возникает игра, в которой каждый центр должен выбрать свой уровень стимулирования. Эта игра может быть представлена матрицей, изображенной на рисунке 2. По вертикали размещены уровни стимулирования первого центра, по горизонтали – уровни стимулирования второго центра. В каждой ячейке матрицы стоят две величины – выигрыши первого и второго центров соответственно.

Матрица задает зависимость выигрышей центров от назначенных ими уровней стимулирования (то есть стратегий центров), поскольку на пересечении каждой строки и каждого столбца заданы соответствующие величины.

	$s_{20} = 0$	$s_{20} = ½$	$s_{20} = 1$
$s_{10} = 0$	$0;0$	$0;0$	$H_1; H_2\text{-}1$
$s_{10} = ½$	$0;0$	$H_1\text{-}½; H_2\text{-}½$	$H_1\text{-}½; H_2\text{-}1$
$s_{10} = 1$	$H_1\text{-}1;H_2$	$H_1\text{-}1; H_2\text{-}½$	$H_1\text{-}1; H_2\text{-}1$

Рис. 2. Матрица игры центров

Равновесиями Нэша в этой игре, очевидно, будут три пары стратегий: (0;1), (½;½) и (1;0). Они обозначены на рисунке 2 серым цветом.

Найдем теперь множества векторов **p**, на которых каждое из равновесий Нэша будет и **p**-доминантным равновесием (как мы уже отмечали, любое p-доминантное равновесие является равновесием Нэша, поэтому другие равновесия рассматривать не имеет смысла).

Обозначим вероятности выбора стратегий 0, ½ и 1 первым и вторым центрами соответственно p_1, $p_2 - p_1$, $1 - p_2$ и q_1, $q_2 - q_1$, $1 - q_2$. Величины p_i и q_i должны быть неотрицательны и не должны превосходить 1, кроме того, неотрицательными должны быть величины $p_2 - p_1$ и $q_2 - q_1$.

Пусть вероятностный вектор **p** = (p_0, q_0). Покажем, что пара (½;½) является p-доминантным равновесием в этой игре. Запишем условие (1.1) для каждого из центров. Для первого центра получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} (q_2 - q_1)(H_1 - ½) + (1 - q_2)(H_1 - ½) \geq (1 - q_2) H_1 \\ (q_2 - q_1)(H_1 - ½) + (1 - q_2)(H_1 - ½) \geq q_1 (H_1 - 1) + \\ \quad + (q_2 - q_1)(H_1 - 1) + (1 - q_2)(H_1 - 1) \end{cases}$$

Аналогичные неравенства выписываются и для второго центра. Получается система:

$$\begin{cases} (1 - q_1)(H_1 - ½) \geq (1 - q_2) H_1 \\ (1 - q_1)(H_1 - ½) \geq H_1 - 1 \\ (1 - p_1)(H_2 - ½) \geq (1 - p_2) H_2 \\ (1 - p_1)(H_2 - ½) \geq H_2 - 1 \end{cases}$$

Очевидно, что уравнения разделяются, поэтому рассмотрим только систему

$$\begin{cases} (1 - q_1)(H_1 - ½) \geq (1 - q_2) H_1 & \Rightarrow q_2 \geq 1/2H_1 + \\ \quad + (2H_1 - 1)\, q_1 / 2H_1 & (2.1) \\ (1 - q_1)(H_1 - ½) \geq H_1 - 1 & \Rightarrow q_1 \leq 1/(2H_1 - 1) \; (2.2) \\ q_2 - q_1 \geq q_0 & \Rightarrow q_2 \geq q_0 + q_1 \quad (2.3) \end{cases}$$

Система неравенств 2.1 – 2.3 на плоскости (q_1; q_2) изображена на рисунке 3. Серым цветом (светлым и темным) обозначено множество пар (q_1; q_2), удовлетворяющих неравенствам (2.1)-(2.2). На этом множестве математическое ожидание выигрыша первого центра при выборе им

стратегии ½ не меньше математических ожиданий его выигрыша при выборе других стратегий.

Темно-серым цветом обозначено множество пар (q_1; q_2), задающее распределения вероятностей выбора соответствующих стратегий вторым центром, причем вероятность выбора стратегии ½ не меньше q_0.

Точкой пересечения прямых $q_2 = q_0 + q_1$ и $q_1 = 1 / (2 H_1 - 1)$ определяется минимальное значение q_0, при котором множество (2.3) принадлежит множеству (2.1)-(2.2). При $q_0 \geq 2 (H_1 - 1) / (2 H_1 - 1)$ множество допустимых значений пар (q_1; q_2) целиком принадлежит множеству решений системы (2.1)-(2.2).

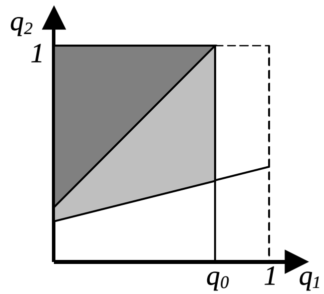

Рис. 3. Система неравенств (2.1)-(2.3) на плоскости (q_1;q_2)

Заметим, что для второго центра система неравенств, аналогичная системе (2.1)-(2.3), приводит к точно такому же результату, соответственно, $p_0 \geq 2 (H_2 - 1) / (2 H_2 - 1)$.

По определению p-доминантного равновесия для любого вектора $\boldsymbol{p} = (p, q)$, $p \geq p_0$, $q \geq q_0$, равновесие (½; ½) является p-доминантным равновесием. Это равновесие существует при любых значениях H_1 и H_2, больших единицы.

Рассмотрим равновесие (1; 0). Для первого центра

$$\begin{cases} H_1 - 1 \geq (1 - q_1)(H_1 - ½) \;\Rightarrow q_1 \geq 1/(2H_1 - 1) & (2.4) \\ H_1 - 1 \geq (1 - q_2) H_1 \quad \Rightarrow q_2 \geq 1/H_1 & (2.5) \\ q_1 \geq q_0 & (2.6) \\ q_2 - q_1 \geq 0 & (2.7) \end{cases}$$

Система (2.4)-(2.7) на плоскости $(q_1; q_2)$ изображена на рисунке 4. Серым цветом (светлым и темным) обозначено множество пар $(q_1; q_2)$, удовлетворяющих неравенствам (2.4)-(2.5). На этом множестве математическое ожидание выигрыша первого центра при выборе им стратегии 1 не меньше математических ожиданий его выигрыша при выборе других стратегий.

Темно-серым цветом обозначено множество пар $(q_1; q_2)$, задающее распределения вероятностей выбора соответствующих стратегий вторым центром, причем вероятность выбора стратегии 1 не меньше q_0.

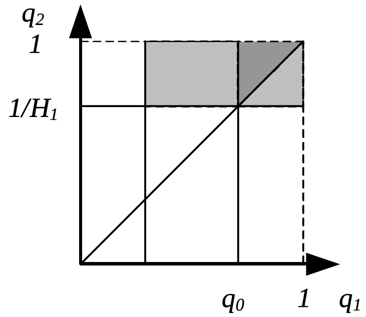

Рис. 4. Система неравенств (2.4)-(2.7) на плоскости $(q_1; q_2)$

Область (2.6)-(2.7) принадлежит области (2.4)-(2.5) при $q_0 \geq 1/H_1$.

Для второго центра

$$\begin{cases} (1 - p_2)\, H_2 \geq (1-p_2)(H_2 - ½) \\ \quad \Rightarrow\ p_2 \leq 1/(2H_2) + p_1\, (2H_2 - 1) / (2H_2) & (2.8) \\ (1 - p_2)\, H_2 \geq H_2 - 1 \\ \quad \Rightarrow\ p_2 \leq 1/H_2 & (2.9) \\ p_2 - p_1 \geq 0 & (2.10) \\ 1 - p_2 \geq p_0 & (2.11) \end{cases}$$

Система (2.8) – 2.11 на плоскости $(p_1;p_2)$ изображена на рисунке 5. Как и выше, серым цветом обозначено множество решений системы (2.8)-(2.9), а темно-серым – множество решений (2.10)-(2.11).

Область (2.10)-(2.11) принадлежит области (2.8)-(2.9) при $p_0 \geq (2H_2 - 1) / 2\, H_2$.

Равновесие (1; 0) является p-доминантным равновесием с вектором $\boldsymbol{p} = (p, q)$, $p \geq p_0$, $q \geq q_0$, $p_0 = (2\, H_2 - 1) / 2\, H_2$, $q_0 = 1 / H_1$. Равновесие существует при любых значениях H_1 и H_2, больших единицы.

Поскольку проверка равновесия (0; 1) приводит к системе неравенств, аналогичной (2.4) – (2.11), то мы сразу получаем, что это равновесие является p-доминантным с вектором $\boldsymbol{p} = (p, q)$, $p \geq p_0$, $q \geq q_0$, $p_0 = 1 / H_2$, $q_0 = (2\, H_1 - 1) / 2\, H_1$. Равновесие также существует при любых значениях H_1 и H_2, больших единицы.

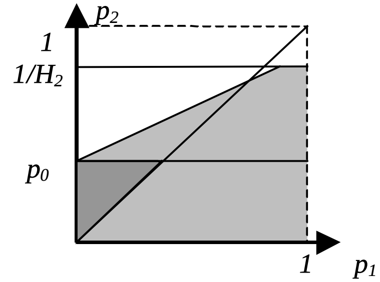

Рис. 5. Система неравенств (2.8)-(2.11) на плоскости $(p_1; p_2)$

Итак, мы показали, что все три равновесия существуют при всех допустимых значениях параметрах нашей модели H_1 и H_2, но множества векторов $\boldsymbol{p}$, при которых они существуют, различны у всех равновесий.

3. Анализ количества равновесий

Рассмотрим теперь множества допустимых векторов для каждого из равновесий при различных параметрах H_1 и H_2 на плоскости $(p; q)$. Взаимное расположение этих множеств существенным образом зависит от значений параметров H_1 и H_2.

Поскольку множества допустимых векторов ограничиваются только величинами вида $1 / H_i$, $(2\, H_i - 2) / (2\, H_i - 1)$ и $(2\, H_i - 1) / H_i$, то удобно упорядочить эти величины по возрастанию, разбив каждое из множеств H_1 и H_2 на три диапазона.

Границы диапазонов определяются условиями

$$1 / H_{01} = (2\, H_{01} - 1) / 2\, H_{01} \quad \Rightarrow \quad H_{01} = 3 / 2$$

и

$$1 / H_{02} = (2\, H_{02} - 2) / (2\, H_{02} - 1) \quad \Rightarrow \quad H_{02} = 1 + \sqrt{2}/2.$$

При H £ H_{01} выполнено

$$(2\,H-2)/(2\,H-1) \le (2\,H-1)/2\,H \le 1/H,$$

при H_{01} £ H £ H_{02} выполнено

$(2\,H-2)/(2\,H-1)$ £ $1/H$ £ $(2\,H-1)/2\,H$,

и, наконец, при H ³ H_{02} выполнено

$1/H$ £ $(2\,H-2)/(2\,H-1)$ £ $(2\,H-1)/2\,H$.

При H_1 £ H_{02} и H_2 £ H_{02} множества допустимых векторов на плоскости $(p; q)$ выглядят так, как показано на рисунке 6. Светло-серым цветом обозначено множество допустимых векторов для равновесия (½; ½), более темными оттенками обозначены множества допустимых векторов остальных равновесий. Конфигурация множеств, обозначенных более темными оттенками, может меняться в зависимости от отношения величин H_1 и H_2 к параметру H_{01}, однако общий вид множеств остается неизменным.

Множество, обозначенное светло-серым цветом, соответствует одному равновесию, два более темных многоугольника соответствуют двум и самый темный прямоугольник соответствует трем равновесиям.

Поскольку единственное равновесие существует на множестве, соответствующем только одному равновесию, мы можем сказать, что нашли единственное решение задачи в рамках концепции p-доминантного равновесия.

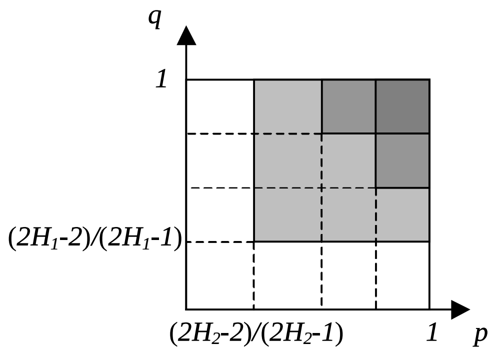

Рис. 6. Множества допустимых векторов на плоскости $(p; q)$ *при* H_1 £ H_{02} *и* H_2 £ H_{02}

Содержательно это решение означает следующее. В случае, если выигрыши центров ненамного превосходят затраты активного элемента на выполнение требуемого действия, центрам выгоднее всего действовать сообща, разделяя пополам затраты на стимулирование центра. Это решение соответствует «интуитивно ожидаемому», что означает хорошее соответствие нашей модели и реальности.

Пусть теперь H_1 £ H_{02}, а H_2 ³ H_{02}. Множества допустимых векторов в этом случае показаны на рисунке 7. Светло-серым цветом обозначены две области: там, где существует только равновесие $(0; 1)$ (вверху) и там, где существует только равновесие (½; ½) (внизу). Остальные области, обозначенные более темным цветом, соответствуют двум или трем равновесиям.

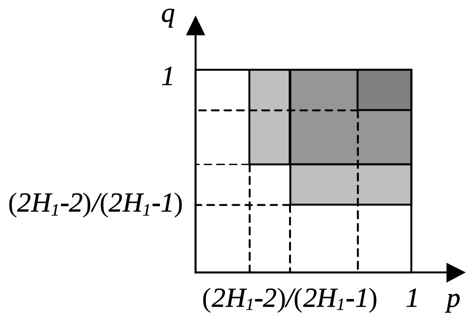

Рис. 7. Множества допустимых векторов на плоскости $(p; q)$ *при* H_1 £ H_{02} *и* H_2 ³ H_{02}

Таким образом, мы не можем выбрать одно из равновесий в качестве решения, однако нам удалось сузить множество равновесий с трех (равновесий Нэша) до двух (p-доминантных равновесий).

Содержательно найденные решения означают, что теперь, когда выигрыш второго центра возрос, в качестве альтернативы возможно его независимое поведение, когда он полностью компенсирует активному элементу его затраты, и гарантированно получает определенный выигрыш. Тем не менее, возможность сотрудничества не исключается, потому что такая стратегия приносит ему все-таки больший выигрыш.

Отметим снова, что найденные решения соответствуют нашим представлениям о рациональном поведении игроков, что еще раз подтверждает адекватность концепции р-доминантного равновесия.

В случае, когда H_1 ³ H_{02}, а H_2 £ H_{02}, ситуация аналогична ситуации с H_1 £ H_{02} и H_2 ³ H_{02}, с той лишь разницей, что уже у первого центра появляется альтернатива гарантировать себе выигрыш.

Вопрос о том, какое из двух равновесий выберет реальный игрок, остается открытым, поскольку концепция р-доминантного равновесия на него ответа не дает. Для нахождения единственного решения необходимо применять другие концепции.

Рассмотрим, наконец, ситуацию, когда H_1 и H_2 не меньше H_{02}. Структура допустимых множеств векторов показана на рисунке 8. В данном случае есть три множества допустимых векторов, на которых решение единственно. Как и в предыдущем случае, у нас нет оснований предпочесть одно из равновесий двум другим. Фактически, в этом случае концепция р-доминантного равновесия не позволяет нам даже сузить множество равновесий.

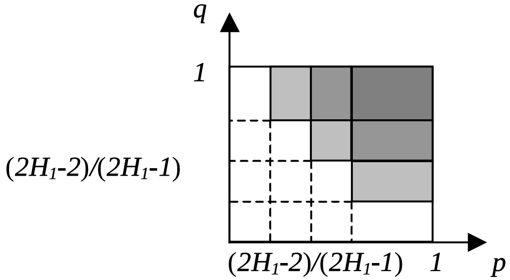

Рис. 8. Множества допустимых векторов на плоскости (p; q) при H_1 ³ H_{02} *и* H_2 ³ H_{02}

Изобразим теперь на плоскости (H_1; H_2) области параметров, при которых существует одно, два или три равновесия – см. рисунок 9.

Светло-серым цветом на рисунке 9 обозначено множество параметров H_1 и H_2, при которых в найдено три равновесия, более темным – множество, где количество решений удалось сузить до двух равновесий, и самым темным обозначено множество, на котором найдено единственное решение.

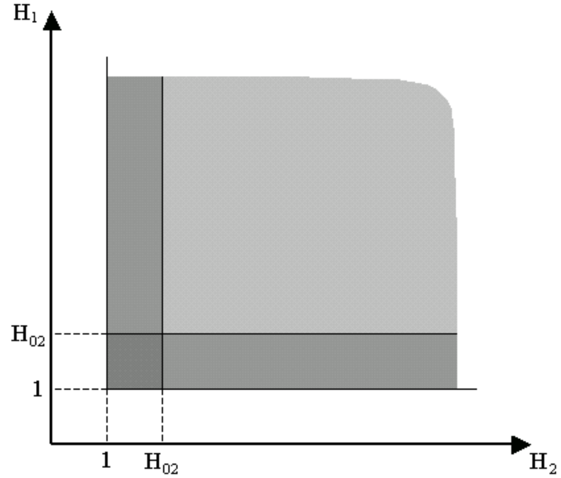

Рис. 9. Области параметров (H_1; H_2)*, при которых существует одно, два или три равновесия*

Заключение

В статье с помощью современной теоретико-игровой концепции р-доминантного равновесия решена задача стимулирования в системе распределенного контроля (два центра, три уровня стимулирования).

Показано, что при определенных параметрах задачи удается отыскать единственное равновесие или сузить количество равновесий с трех до двух.

Литература

1. DAISUKE O. ***Risk-Dominance, p-Dominance, Potentials, and Equilibrium Selection*** // Graduate School of Economics, University of Tokyo. 2000.
2. KAJII A., MORRIS S. ***The Robustness of Equilibria to Incomplete Information*** // Econometrica. 1997. Vol. 65. № 6. P. 1283– 1309.
3. MORRIS S., ROB R., SHIN H.S. ***p-Dominance and Belief Potential*** // Econometrica. 1995. Vol. 63. № 1. P. 145 – 157.
4. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Введение в теорию активных систем*. М.: ИПУ РАН, 1996. – 125 с.
5. ГУБКО М.В., КАРАВАЕВ А.П. *Согласование интересов в матричных структурах управления* // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 10. С.132 - 146.
6. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами*. М.: СИНТЕГ, 2002. – 148 с.
7. НОВИКОВ Д.А. *Стимулирование в социально-экономических системах* (*базовые математические модели*). М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.
8. НОВИКОВ Д.А. *Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах* // Автоматика и Телемеханика. 1997. №6. С. 3 – 26.
9. НОВИКОВ Д.А., ПЕТРАКОВ С.Н. *Курс теории активных систем*. М.: СИНТЕГ, 1999. – 108 с.
10. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., СЕМИНА Е.А. *Теория игр*. М.: Высшая школа, 1998.
11. ХАРШАНЬИ Д., ЗЕЛЬТЕН Р. *Общая теория выбора равновесия в играх*. СПб.: Экономическая школа, 2001. – 424 с.