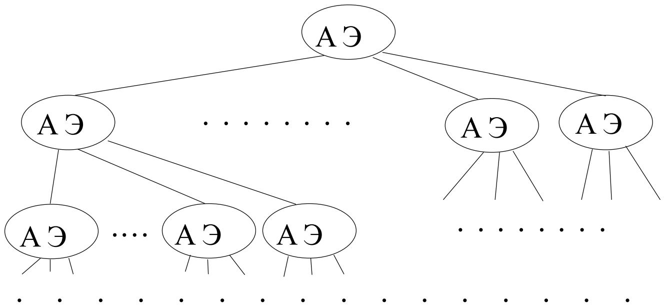
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА В ИЕРАРХИЧЕСКИХ АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Караваев А.П.
(Волгоградский государственный университет, Волгоград)

1. Общее описание модели

В организационных системах большую роль играют иерархические системы. Одной из задач, решаемых в теории иерархических систем, является задача о распределении ресурсов.

Рассмотрим иерархическую систему следующего вида:



Пусть в данной организации активных элементов имеется ровно n уровней, а каждый элемент на i уровне имеет ровно m_i подэлементов.

Предположим, что процесс распределения ресурса в системе выглядит следующим образом. Активные элементы на нижнем уровне на основании потребностей в ресурсе и дополнительных соображений (опыт о соответствии заявок и выделяемого ресурса в предыдущих циклах) делают заявку вышестоящему элементу. Тот, в свою очередь, на основании заявок подчиненных элементов делает свою и т.д. Целью каждого элемента является получить ровно необходимое количество ресурса, завысив или занизив свое требование в заявке.

После сбора всех заявок центр на основании собственных соображений распределяет имеющееся ограниченное количество ресурса между подчиненными элементами на основании заявок. Те, в свою очередь, распределяют полученный ресурс между своими подчиненными элементами и т.д. до последнего уровня.

Предполагается, что ресурс между подчиненными элементами распределяется относительными долями (т.е. если ресурса в 2 раза больше, то и каждый из подчиненных элементов получит ровно в 2 раза больше).

В дальнейшем будем предполагать, что заявок нет (или они не оказывают влияния на распределение ресурса).

2. Закон распределения получаемого активным элементом ресурса

Пусть активные элементы на одном уровне имеют одинаковый механизм (вероятностный) распределения ресурса между подчиненными элементами. Другими словами количество получаемого ресурса одинаково распределено у различных элементов одного уровня.

Для конкретного элемента можно (и единственным образом) построить цепочку элементов от центра до него самого. Обозначим в этой цепочке центр за первый элемент, следующий – за второй и так далее до последнего.

Тогда количество ресурса, получаемого конкретным активным элементом нижнего уровня, есть

(1) $h_n = N z_2 z_3 \ldots z_n$,

где N – общее количество ресурса, а z_i – относительное количество ресурса ($1 \geq z_i \geq 0$), полученного i-м элементом от элемента с номером $i-1$.

Прологарифмировав данное выражение, имеем:

(2) $\log h_n = \log N + \log z_2 + \ldots + \log z_n$.

Если к последовательности случайных величин $\log z_i$ можно применить центральную предельную теорему, то существуют такие коэффициенты b_n, что $b_n * (\log h_n - M(\log h_n)) \Rightarrow N(0,1)$ $(n \to \infty)$, что говорит о логнормальности в пределе случайной величины $\log h_n$.

Центральная предельная теорема применима, в частности, если $\log z_i$ есть последовательность невырожденных независимых случайных величин с конечной дисперсией.

3. Закон распределения ресурса среди элементов

Ясно, что случайные величины, равные количеству ресурса, полученному различными элементами одного уровня, являются зависимыми (чем больше получил один, тем меньше получил другой).

Обозначим общее количество ресурса за *1*.

Пусть *N(i)* –количество всех элементов на *i* уровне,, а *N(r,i)* – количество элементов на *i* уровне, которые получили не более *r* единиц ресурса, $T(x,i) = \dfrac{M(N(e^x, i))}{N(i)}$. Пусть $Q_i(k)$ – математическое ожидание числа элементов на уровне $i+1$, получивших не более *r*k* единиц ресурса и подчиненных одному элементу уровня *i*, который получил ровно *r* единиц ресурса.

Сделаем следующие предположения:

1. Функция распределения ресурса одного элемента на *i* уровне по подчиненным не зависит от распределения на предыдущих уровнях (и других элементов того же уровня).

2. Существует такое $d > 0$, что

$$(3)\quad \frac{1}{D_i^{2+d}} \sum_{k=1}^{i-1} \int_R |x - A_k|^{2+d} dS_k(x) \to 0 \qquad (i \to \infty),$$

где $D_i^2 = \sum_{k=1}^{i-1} B_k^2$, $A_i = \int_R x dS_i(x)$, $B_i^2 = \int_R (x - A_i)^2 dS_i(x)$, а мера $S_k(u) = \dfrac{Q_k(e^u)}{Q_k(1)}$.

Тогда (подробнее в [2], но применяя ЦПТ с условием Ляпунова)

$$(4)\quad \frac{T(x,n) - \sum_{k=1}^{n-1} A_k}{\sqrt{D_n^2}} \to \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

что говорит о том, что имеется сходимость к логнормальному закону распределения.

Замечание. В связи со сходимостью при $n \to \infty$ нельзя говорить о точно логнормальном распределении, но становится естественным предположении о логнормальности распределения ресурса в подобных моделях.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Механизмы функционирования организационных систем*. М.: Наука, 1981. – 384 с.

2. КОЛМОГОРОВ А.Н. *О логарифмически-нормальном распределении частиц при дроблении* // ДАН СССР 31. 1941. С 99-101.

3. КРАМЕР Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1976.

4. НОВИКОВ Д.А., ПЕТРАКОВ С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999. – 108 с.

5. GAVIN BROWN, SANDRES J.W. *Lognormal genesis* // J. Appl. Prob. Vol 18. 1981. P. 542-547.