Учет кооперативных взаимодействий в механизмах планирования

Губко М.В., Спрысков Д.С.
(Московский Физико-Технический Институут, Москва)

Введение

В теории активных систем было исследовано большое количество механизмов управления социально-экономическими системами. При исследовании их свойств, за редкими исключениями, считалось, что активные элементы (АЭ) не могут действовать совместно, а играют лишь «сами за себя». Тем не менее, на практике совместные (или, иначе говоря, кооперативные) действия АЭ, выражающиеся в виде создания различного рода коалиций, достаточно распространены. Таким образом, назрела необходимость исследования влияния кооперативных возможностей АЭ на результаты управления. Основными вопросами подобного исследования можно назвать следующее:

1) Как изменится игровое равновесие при добавлении в игровую модель возможности кооперативных взаимодействий (как изменятся стратегии игроков и их полезности)?
2) Как при этом изменится эффективность управления?
3) Как создать механизм управления, учитывающий возможность кооперативных действий АЭ?

В данной статье излагаются результаты исследования механизмов планирования с точки зрения кооперативных действий АЭ на примере задач распределения ресурса и активной экспертизы.

1. Игровая модель кооперативных взаимодействий

В качестве игровой модели кооперативных взаимодействий была принята модель описания игры в форме характеристической функции, используемая *теорией кооперативных игр* [1].

В теории кооперативных игр разделяют *игры с нетрансферабельной полезностью* (*НТП-игры*), в которых запрещена передача полезности между игроками, и *игры с трансферабельной полезностью* (*ТП-игры*), в которых такая передача разрешена. В практике управления возможны обе эти ситуации, поэтому необходимо использовать результаты, полученные как для ТП-игр [2], так и для НТП-игр [2]. Тем не менее, поскольку в данной статье анализируются в основном ТП-игры, приведем только определение характеристической функции ТП-игр.

Определение 1: *Характеристической функцией* игры n лиц называется вещественнозначная функция $v(T)$, определенная на подмножествах $T\subset N=\{1\ldots n\}$, такая, что $v(\varnothing)=0$.

Игра полностью описывается множеством игроков N и характеристической функцией v.

Содержательно характеристическая функция определяет полезность, получаемую коалицией T (если в процессе игры такая коалиция образовалась) при рациональных действиях ее участников. Что считать рациональными действиями игроков, определяется используемым в задаче принципом рационального поведения.

Ниже для построения характеристической функции игры будут использоваться *принцип максимального гарантированного результата* и *принцип равновесия Нэша*. Подробное рассмотрение методики построения характеристической функции по нормальной форме игры можно найти в [2].

2. С-ядро, как концепция решения игры

Среди концепций решения, используемых теорией кооперативных игр, одним из наиболее распространенных является C-ядро [1]. Анализ C-ядра особенно важен, если мы хотим определить условия, при которых в игре возможна полная кооперация игроков, то есть образование коалиции N, состоящей из всех игроков.

C-ядро определяется, как множество таких распределений полезности $v(N)$ максимальной коалиции N между всеми игроками, при которых любая потенциальная коалиция $T\subset N$ не может гарантировать своим участникам более выгодного для всех них распределения полезности $v(T)$, которую коалиция T могла бы получить, отделившись от максимальной коалиции N.

Достоинством C-ядра, как концепции решения является его простота и содержательность. Среди недостатков можно назвать то, что непустое C-ядро существует не для всех игр, и в случае его пустоты неясно, каким образом игроки должны себя вести.

Тем не менее, при непустом C-ядре, рациональные игроки должны образовывать максимальную коалицию, поскольку только коалиция N может дать им доход, не доминируемый никакой другой коалицией. С точки зрения управления системой такое поведение очень важно, поскольку только в этом случае активную систему можно представить, как единый организм, деятельность которого направлена на достижение одной цели. Этой целью является максимизация суммарной полезности системы. Во многих механизмах управления, часть которых будет рассмотрена ниже, это и есть одна из целей центра. Среди прочих целей центра можно назвать [3] выполнение активными элементами плана, сообщение элементами достоверной информации и т.д. Влияние кооперативных взаимодействий на достижение этих целей необходимо анализировать в каждом конкретном случае.

С точки зрения анализа управляемости системы важны не столько конкретные распределения коалиционной полезности (*дележи*), принадлежащие C-ядру, сколько сам факт его пустоты или непустоты. Введем некоторые определения.

Определение 2: *Собственной* называется любая коалиция, отличная от максимальной коалиции N. *Множество собственных коалиций* обозначим через D.

Определение 3: *Сбалансированным покрытием* множества игроков N называется отображение d: $D \to [0, 1]$ такое, что

(1) $\sum_{T: T \in D, i \in T} d_T = 1$ для произвольного игрока i.

Теорема Бондаревой [2] (критерий непустоты ядра):
C-ядро игры (v, N) не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного покрытия d выполняется

(2) $\sum_{T \in D} d_T v(T) \le v(N)$.

Используя введенные понятия, приступим к рассмотрению конкретных механизмов планирования.

3. Задача распределения ресурса

Это одна из наиболее часто возникающих задач планирования. Распределение сырья между подразделениями производственного объединения, распределение финансирования между филиалами корпорации и многое другое – это все примеры задач распределения ресурса. Задачей центра в таких задачах обычно считается максимизация суммарной полезности (например, прибыли) системы в целом, поэтому анализ условий реализуемости максимальной коалиции особенно важен в данном случае.

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ [4]

Центр должен распределить некоторое количество ресурса R между n АЭ. Для этого он собирает от них заявки $s_i \in [0, R]$ на ресурс, то есть количество ресурса, которое i-тый АЭ хотел бы получить, и на основе этих заявок выдает i-му АЭ ресурс в объеме $x_i = p_i(s_1, \ldots, s_n)$, определяемом *механизмом планирования* p. Целевая функция АЭ $f_i = f_i(x_i)$ зависит от количества x_i получаемого им ресурса. Рассматривались только <u>вогнутые</u> <u>однопиковые</u> целевые функции. Точки максимума этих функций обозначаются r_i. Каждый игрок знает свою функцию полезности и функции полезности всех прочих игроков. Центр знает только общий вид функций полезности, то есть то, что они вогнутые и однопиковые.

Механизм распределения ресурса p обычно считается <u>*монотонным относительно заявок*</u> и <u>*непрерывным*</u>. При фиксированном механизме распределения центр не является одним из игроков, так как его воздействие фиксировано и известно игрокам.

Обычно предполагается, что сумма *точек пика* r_i больше имеющегося у центра количества ресурса, то есть имеется дефицит. Понятно, что при этом одновременно все АЭ не могут получить ресурс в желаемом объеме. Игроки начинают манипулировать своими заявками, чтобы увеличить количество получаемого ими ресурса. Некоалиционное рассмотрение [4] показывает, что по результатам игры игроков можно разбить на две группы – «диктаторов» и «не диктаторов». Диктаторы получают ресурс в необходимом им объеме, «не диктаторы» получают меньше, чем им хотелось бы. «Не диктаторы» делают максимальные заявки, чтобы получить максимально возможное для них количество ресурса, диктаторы же делают такие заявки, чтобы получить ровно оптимальное для них количество r_i.

3.2. ТРАНСФЕРАБЕЛЬНОСТЬ РЕСУРСА И ПОЛЕЗНОСТИ

Любое рассмотрение кооперативных взаимодействий игроков должно включать возможность совместного выбора ими стратегий (заявок на ресурс), заключения соглашений о заявках.

Прочие кооперативные взаимодействия в этой задаче можно разбить на два следующих типа:

- Перераспределение игроками полученного от центра ресурса.
- Передача игроками друг другу полезности (например, денег).

В зависимости от того, в каких сочетаниях разрешены эти взаимодействия, можно выделить четыре класса моделей.

1) Нетрансферабельный ресурс, нетрансферабельная полезность. То есть, возможны только договоры и обмен информацией.
2) Трансферабельный ресурс, нетрансферабельная полезность. Игроки могут перераспределять ресурс, но не полезность. Это, например, случай, когда ресурс – это деньги, а полезность – сделанная работа, как в задаче финансирования филиалов.
3) Нетрансферабельный ресурс, трансферабельная полезность. Ресурс игроки передавать не могут, но могут брать взятки за изменение своей заявки.
4) Трансферабельный ресурс, трансферабельная полезность. Возможны как обмены ресурсом, так и полезностью, совместное принятие решений, взятки, совместное производство и купля-продажа ресурса за деньги.

Первый и второй классы моделей относятся к классу НТП-игр, третий и четвертый классы моделей – к классу ТП-игр.

Для класса моделей 1 довольно легко показать, что, независимо от наличия соглашений между игроками, отклонения от некооперативного равновесия невыгодны, т.к. равновесие Нэша является одновременно и *сильным равновесием Нэша* [2] этой игры.

Для класса 2 легко показать, что при наличии некоторых отношений между игроками, не охватываемых моделью (симпатии, антипатии), возможно изменение равновесия. При этом диктаторы повышают свои заявки на ресурс, а полученные излишки ресурса распределяют между игроками, которым они симпатизируют. Более точно понять, кому пойдет ресурс, невозможно, так как (в рамках модели) при таких действиях диктаторов их полезность не изменяется. В равновесии все заявки равны R и смысл сообщения заявок полностью пропадает. Если мы считаем, что для изменения заявки игроком необходимо, чтобы в новом равновесии его полезность стала строго больше, чем в старом, то равновесие этой игры совпадает с некооперативным. Класс 3 пока почти не исследован.

В четвертом классе моделей налицо практически неограниченные возможности для сотрудничества, поэтому следует ожидать значительных изменений в поведении игроков. Ниже проводится подробное исследование именно этого класса моделей.

3.3. ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Для произвольной коалиции $T \subseteq N$ обозначим

$x_T := \sum_{i \in T} x_i = \sum_{i \in T} p_i$ – получаемое коалицией количество ресурса

$r_T := \sum_{i \in T} r_i$ – оптимальное для коалиции количество ресурса

$Z(x_T, T) := \{y_T(x_T) = (y_{iT})_{i \in T} : \sum_{i \in T} y_{iT} = x_T\}$ – множество возможных распределений ресурса x_T между участниками коалиции.

Для r_N будем использовать также обозначение $r := r_N$.

(3) $f_T(x_T) = \max_{y_T} \sum_{i \in T} f_i(y_{iT}(x_T))$ – целевая функция коалиции, как функция получаемого ею ресурса. Коалиция максимизирует суммарную полезность распределением полученного ресурса x_T между своими участниками. При этом максимум этой функции достигается при $x_T = r_T$, когда все члены суммы (3) одновременно достигают своего максимума. При $x_T < r_T$ целевая функция монотонно возрастает, при $x_T > r_T$ – монотонно убывает.

Таким образом, для определения характеристической функции необходимо определить количество ресурса x_T, получаемого коалицией T в равновесии. Игроки имеют полную информацию о функциях полезности друг друга, поэтому логично рассматривать равновесие Нэша в качестве решения игры. Для построения x_T воспользуемся *методом анализа множеств диктаторства* [5].

При построении характеристической функции коалиции T считается, что все остальные игроки объединились в коалицию $N\backslash T$. Тогда равновесие Нэша в игре коалиций T и $N\backslash T$ будет равновесием Нэша игры двух лиц с векторными стратегиями. Перейдем от векторных стратегий коалиций к скалярным, воспользовавшись непрерывностью и монотонностью механизма распределения.

Пусть некоторая векторная заявка $\underline{s}_T$ коалиции T при фиксированной заявке $s_{N\backslash T}$ дает суммарное значение ресурса коалиции T $x_T = \sum_{i \in T} x_i = \sum_{i \in T} p_i(s_T, s_{N\backslash T})$.

Тогда, по лемме о непрерывности, для коалиции T существует такая допустимая скалярная заявка $u_T(x_T)$ что, если все участники коалиции заявят $u_T(x_T)$, то коалиция получит столько же, сколько и при исходных заявках. Для доказательства положим сначала $u_T=0$. При этом, по свойствам монотонных механизмов, ресурс в распоряжении коалиции T не больше, чем при произвольной векторной заявке. Затем положим $u_T=R$ (при этом ресурс не меньше, чем при произвольной векторной заявке) и заметим, что рост заявки u_T от 0 до R приводит к непрерывному росту $x_T(u_T, s_{N\backslash T})$.

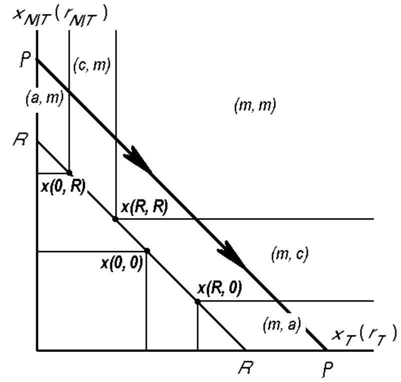

Рис. 1.

При этом коалиция $N\backslash T$ не заинтересована в изменении своих заявок, так как получаемое ими количество ресурса не меняется. Аналогично и их заявки можно заменить единой заявкой $u_{N\backslash T}$. Таким образом, равновесие Нэша для этой игры будет совпадать с равновесием Нэша игры двух лиц со скалярными стратегиями u_T, $u_{N\backslash T}$ и целевыми функциями f_T и $f_{N\backslash T}$. На рис.1 приведено рассмотрение множеств диктаторства для двух игроков. По осям откладывается ресурс, получаемый коалициями T и $N\backslash T$ в зависимости от их заявок. Точки $x(0, 0)$, $x(0, R)$, $x(R, 0)$, $x(R, R)$ представляют собой ресурс, получаемый коалициями при их заявках (0, 0), (0, R) и т.д. Так как механизм сбалансирован, эти точки (как и остальные точки отображения множества заявок игроков на множество получаемых ими ресурсов), лежат на прямой $x_T+x_{N\backslash T} = R$. Кроме того, из монотонности механизма следует, что точка $x(0, R)$ лежит левее и выше точки $x(0, 0)$, а $x(R, 0)$ – правее и ниже. Соответственно точка $x(R, R)$ лежит на прямой между точками $x(0, R)$ и $x(R,0)$. На этой же плоскости отложим точку $r=(r_T, r_{N\backslash T})$ максимума целевых функций коалиций. Так как их сумма r превышает имеющееся количество ресурса R (дефицит), эта точка лежит правее и выше прямой $x_T+x_{N\backslash T}=R$. Можно показать [5], что если эта точка лежит в области (a, m), то равновесные заявки игроков будут (0, R), и распределение ресурса будет $x(0, R)$. В области (m, a) наоборот, равновесные заявки будут (R, 0), а распределение ресурса – $x(R, 0)$. Если r лежит в области (m, c), то игрок $N\backslash T$ будет диктатором и получит ресурс в необходимом ему объеме, тогда как игрок T в равновесии будет сообщать максимальную заявку. В области же (c, m) наоборот, игрок T будет диктатором, а $N\backslash T$ будет сообщать максимальную заявку. В области (m, m) равновесные заявки обоих игроков максимальны, и распределение ресурса между ними будет $x(R, R)$.

Для фиксированного r построим все сочетания оптимальных точек предпочтений игроков. Все они лежат на прямой $r_T+r_{N\backslash T}=r$, которая проходит последовательно через все описанные зоны. Для любой ее точки известны количества ресурса, получаемые коалициями в равновесии. График зависимости x_T, от точки пика r_T коалиции приведен на рис.2. Теперь мы можем пользоваться зависимостью $x_T = x_T(r_T, T)$ для произвольной коалиции T.

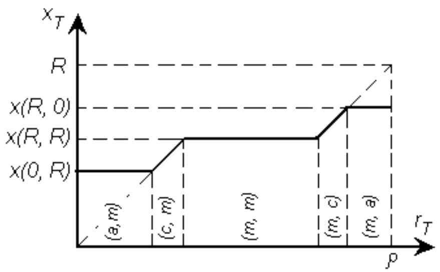

Рис. 2.

Подставляя полученную зависимость в (3), получаем характеристическую функцию коалиции T в зависимости от ее состава и положения оптимальной точки r_T ее целевой функции.

(4) $v(T) = \sum_{i \in T} f_i(y_{iT})$, *где* $y_T = \arg\max_{z_T \in Z(r_T, T)} \sum_{i \in T} f_i(z_{iT}(x_T(r_T, T)))$.

3.4. ОБЩИЙ ВИД ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПУСТОГО С-ЯДРА

При некооперативном рассмотрении этой задачи [4] для предсказания стратегий игроков не нужно знать точного вида их целевых функций, достаточно знать их точки пика r_i. Чтобы в кооперативной модели определить случаи, когда C-ядро не пусто, уже необходимо знание точного вида целевых функций. Однако на

практике определение точного вида целевых функций часто невозможно, поэтому интересным представляется получение достаточных условий непустоты C-ядра, основанных на анализе только точек пика игроков. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1: Для любого сбалансированного покрытия d и произвольных величин $\{A_i: i \in N\}$ справедливо равенство

(5) $\sum_{T \in D} d_T \sum_{i \in T} A_i = \sum_{i \in N} A_i$.

Доказательство: Порядок суммирования в (5) можно изменить, суммируя сначала коалициям, содержащим некоторого игрока i, а затем по всем игрокам из N.

$$\sum_{T \in D} d_T \sum_{i \in T} A_i = \sum_{i \in N} \sum_{T: i \in T} d_T A_i = \sum_{i \in N} A_i \sum_{T: i \in T} d_T$$

По формуле (1), $\sum_{T: i \in T} d_T = 1$ для всех i. Следовательно

$$\sum_{T \in D} d_T \sum_{i \in T} A_i = \sum_{i \in N} A_i \sum_{T: i \in T} d_T = \sum_{i \in N} A_i . \square$$

Теорема 1: Если для любого сбалансированного покрытия $\sum_{T \in D} d_T x_T(r_T, T) \le R$, то C-ядро не пусто.

Доказательство: Подставляя в (2) выражение (4) имеем:

(6) $\sum_{T \in D} d_T \sum_{i \in T} f_i(y_{iT}) \le \sum_{i \in N} f_i(y_{iN})$.

Заменим местами порядок суммирования:

(7) $\sum_{i \in N} \sum_{T: i \in T} d_T f_i(y_{iT}) \le \sum_{i \in N} f_i(y_{iN})$.

Для любой вогнутой функции f_i справедливо свойство [6].

$$\forall x_k \ (k = 1...M), \quad \forall d_k > 0: \sum_k d_k = 1 \quad \sum_k d_k f(x_k) \le f(\sum_k d_k \cdot x_k)$$

По формуле (1), в качестве коэффициентов этой взвешенной суммы можно взять элементы сбалансированного покрытия и сделать верхнюю оценку левой части (7):

(8) $\sum_{i \in N} \sum_{T: i \in T} d_T f_i(y_{iT}) \le \sum_{i \in N} f_i(\sum_{T: i \in T} d_T y_{iT})$.

Если обозначить $Y_i := \sum_{T: i\in T} d_T y_{iT}$, $Y := \sum_{i\in N} Y_i$, то достаточное условие непустоты ядра запишется как

(9) $\sum_{i\in N} f_i(Y_i) \le \sum_{i\in N} f_i(y_{iN})$.

Заметим, что, по определению y_T,

(10) $Y = \sum_{i\in N}\sum_{T: i\in T} d_T y_{iT} = \sum_{T\in D} d_T \sum_{i\in T} y_{iT} = \sum_{T\in D} d_T x_T(r_T, T)$.

То есть в левой части неравенства (9) стоит, по сути, выигрыш максимальной коалиции N при некотором распределении между ее участниками ресурса Y. В правой части стоит выигрыш максимальной коалиции N при оптимальном распределении между ее участниками ресурса R. В условиях дефицита большее количество ресурса в распоряжении максимальной коалиции дает большую полезность. Значит, если $Y \le R$, то, даже если распределение Y_i является оптимальным распределением ресурса между участниками максимальной коалиции, все равно будет выполняться $\sum_{i\in N} f_i(Y_i) \le \sum_{i\in N} f_i(y_{iN})$. Значит, искомое достаточное условие непустоты ядра запишется, как $Y \le R$, то есть

(11) $\sum_{T\in D} d_T x_T(r_T, T) \le R$ для любого сбалансированного покрытия. □

К сожалению, большинство используемых механизмов распределения ресурса не гарантирует непустоты C-ядра для произвольных профилей точек максимума $r=(r_i)_{i\in N}$ полезности игроков, то есть, возможны такие профили, при которых условие (11) нарушается. Чтобы быть уверенным в том, что такие профили игроков возникнуть не могут, центр должен иметь некоторую дополнительную информацию о диапазонах точек пика игроков. Например, центр может иметь информацию о том, что точки пика r_i принадлежат некоторым подмножествам P_i действительной оси.

При определенных ограничениях на эти множества центр может гарантировать, что C-ядро всегда не пусто.

3.5. ПРИМЕРЫ КОНКРЕТИЗАЦИИ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим некоторые частные случаи подобных ограничений, которые гарантируют не пустое C-ядро.

Теорема 2: если для всех коалиций T оптимальная точка r коалиций T и $N\backslash T$, лежит в (m, m) (см. рис.2) то C-ядро игры не пусто.

Доказательство: если точка пика коалиций T и $N\backslash T$, лежит в области (m, m), то равновесные заявки всех игроков равны R. Игроки при этом получают ресурс $x_i = p_i(R,\dots,R)$. Следовательно, условие непустоты C-ядра (11) запишется в виде

(12) $\sum_{T\in D} d_T \sum_{i\in T} p_i(R,\dots,R) \le R$.

Положим $A_i := p_i(R,\dots,R)$, тогда, по лемме 1, перепишем (12) как

(13) $\sum_{i\in N} p_i(R,\dots,R) \le R$.

Но в левой части (13) стоит общее количество распределяемого ресурса при заявках игроков $s_i=R$. Так как механизм сбалансирован, это количество равно R, неравенство (13), таким образом, обращается в тождество и C-ядро не пусто. □

Условие этой теоремы выполняется, например, если все точки пика $r_i \ge R/N$. При этом $P_i=[R/N, +\infty)$.

Теорема 3: если есть такой игрок k, что для всех коалиций T, содержащих его, оптимальная точка r функций полезности коалиций T и $N\backslash T$ лежит в области (m, c) (см. рис. 2), а для остальных коалиций – в области (c, m) то C-ядро не пусто.

Доказательство: Разобьем множество D собственных коалиций на два подмножества:

$D_I = \{T : (r_T, r_{N\backslash T}) \in (c, m)\}$, $D_{II} = \{T : (r_T, r_{N\backslash T}) \in (m, c)\}$

По условию теоремы, $D=D_I \cup D_{II}$. Из рис.2 следует, что если некоторая коалиция $T\in D_I$, то $N\backslash T\in D_{II}$. Коалиции $T\in D_I$ – диктаторские, то есть $x_T = r_T$. Следовательно, $x_{N\backslash T} = R-r_T$.

Условие непустоты ядра (11) в данном случае запишется как

(14) $\sum_{T\in D_I} d_T r_T + \sum_{T\in D_{II}} d_T (R - r_{N\backslash T}) \le R$. Так как $r_{N\backslash T} = r - r_T$, имеем

$$\sum_{T\in D_I} d_T r_T + \sum_{T\in D_{II}} d_T (R - r_{N\setminus T}) = \sum_{T\in D_I} d_T r_T + \sum_{T\in D_{II}} d_T (R - r + r_T) =$$
$$= \sum_{T\in D} d_T r_T + (R - r) \sum_{T\in D_{II}} d_T .$$

По лемме 1 для $A_i=r_i$, $\sum_{T\in D} d_T r_T = r$. По определению теоремы, коалиции $T\in D_{II}$ и только они содержат игрока k. Тогда условие $T\in D_{II}$ можно переписать как $T{:}k\in T$. Но, по определению сбалансированного покрытия, для любого k имеем $\sum_{T:k\in T} d_T = 1$. Значит,

$$\sum_{T\in D} d_T r_T + (R - r) \sum_{T\in D_{II}} d_T = r + R - r = R . \ \square$$

Для класса механизмов распределения, таких, что заявка $s_i=0$ гарантирует игроку i получение ресурса $x_i=0$, предположения, необходимые для выполнения условий теоремы 3 выглядят так:

$$P_i = [0, R/N] \ для \ i \neq k, \quad P_k = [R/N, +\infty) .$$

3.6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Множество всех точек пика игроков (или, иначе, множество *профилей* точек пика) $r=(r_1, \ldots, r_n)\in R^n_+$ можно разбить на множество C точек, где C-ядро не пусто и множество $C\backslash R^+$ точек пика r, таких, что можно подобрать некоторые вогнутые функции полезности с пиками в r_i, что C-ядро получившейся игры будет пусто. Можно показать, что для монотонного непрерывного механизма всегда можно подобрать профиль функций полезности АЭ, при котором C-ядро будет пусто. Это значит, что множество $C\backslash R^+$ содержит хотя бы один элемент. Множество C полностью определяется неравенством (11). Чтобы определить, пусто ли C-ядро для некоторого профиля r, необходимо подставить этот профиль в (11) и максимизировать левую часть по сбалансированным покрытиям d. Это задача линейного программирования с ограничениями (1). Если искомый максимум меньше, чем распределяемое количество ресурса R, то профиль r принадлежит C.

Эта процедура, тем не менее, может оказаться довольно сложной из-за большой размерности задачи оптимизации. Поэтому

интересными представляются результаты, подобные теоремам *2* и *3*, которые дают простые условия, «вырезающие» некоторые подмножества множества C. Аналогично этим теоремам, могут быть получены многие другие следствия теоремы 1 для различных предположений информированности центра, для механизмов распределения, обладающих различными свойствами (например, анонимностью). Все они дают условия, при которых центр может, не задумываясь о конкретном виде функций полезности и, имея лишь некоторые предположения относительно точек пика целевых функций АЭ, с уверенностью ожидать, что C-ядро игры не пусто.

Следующим этапом подобных исследований мог бы быть синтез механизмов, гарантирующих непустоту C-ядра для произвольных профилей точек пика игроков. Как отмечено выше, этот механизм должен быть либо разрывным, либо не монотонным. Пока единственный пример такого механизма – это «механизм авторитарного распределения», где вне зависимости от заявок каждому АЭ дается фиксированное количество ресурса x_i. Он представляет собой предельный случай для нестрого монотонных механизмов, в котором промежутков строгого возрастания количества получаемого ресурса в зависимости от заявки нет вообще.

4. Задача активной экспертизы

Другой, не менее важной задачей планирования является задача активной экспертизы. Задачей центра здесь является получение информации о каком-нибудь объекте, например, об эффективности функционирования предприятия или об оценке эффективности инвестиций. При этом центр либо не является специалистом в данной области своих интересов, либо считает более целесообразным, в частности, более дешевым, прибегать к оценкам экспертов. При этом каждый эксперт являются активным, и его целевая функция достигает своего максимума в случае, если итоговая оценка, определяемая центром на основании обработки сообщений всех экспертов, совпадает с оценкой данного эксперта. Таким образом, возникает проблема искажения информации экспертами.

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется Центр – организатор экспертизы и n активных элементов – экспертов. Оцениваемый экспертами параметр находится в интервале [*d, D*]. Истинное значение параметра для эксперта *i* равно r_i. Эксперт сообщает центру оценку s_i данного параметра, на основании которой, используя механизм принятия решений $p(\bar{s})$, (где $\bar{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ – вектор заявок), центр определяет итоговую оценку $x^* = p(\bar{s})$. Рассматриваются только непрерывные, монотонные механизмы принятия решений, удовлетворяющие принципу единогласия [3]. Частным случаем подобного механизма может, например, являться механизм среднего арифметического $p(\bar{s}) = \sum_{i=1}^{n} s_i / n$ или линейный механизм $p(\bar{s}) = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$, при котором мнения экспертов взвешены с коэффициентами a_i.

Примем, что функции полезности экспертов вогнутые однопиковые, причем максимум достигается при равенстве итоговой оценки истинному мнению эксперта, то есть это функции вида: $f_i(r_i, x^*) = f_i(|r_i - x^*|)$, причем $\arg\max_{x^*} f(r_i, x^*) = r_i$.

В равновесии Нэша часть экспертов сообщают оценку *d*, часть – оценку *D*, при этом может существовать «диктатор», заявка которого s_d совпадает с итоговой оценкой x^*.

Основным результатом теории активной экспертизы является

Т е о р е м а [3] : Для любой процедуры экспертизы существует эквивалентная ей процедура открытого управления. При этом итоговая оценка строится по формуле

(15) $x^* = \max_k \min(r_k, W_{k-1})$

где $W_k = p\left(\underbrace{d, d, \ldots, d}_{k}, \underbrace{D, D, \ldots, D}_{n-k}\right), k = \overline{0, n}$, $W_0 = D$, $W_n = d$.

4.2 ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРЕСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ *С*-ЯДРА

Если эксперты априори не знают предпочтений друг друга и имеют возможность сделать заявку лишь один раз, принцип максимального гарантированного результата будет более предпочтительной концепцией решения, чем равновесие Нэша. В то же время логично предположить, что коалиция знает предпочтения всех ее членов. В этих предположениях характеристические функции коалиций *T* и *N**T* определяется как:

(16) $V(T) = \max_{\bar{s}_T} \min_{\bar{s}_{NT}} \sum_{i \in T}^{n} f_i(\bar{s}_T, \bar{s}_{NT}, r_i)$,

(17) $V(N \setminus T) = \max_{\bar{s}_{NT}} \min_{\bar{s}_{NT}} \sum_{i \in N \setminus T} f_i(s_T, s_{N \setminus T}, r_i)$,

где $\bar{s}_T$ – вектор заявок коалиции *T*, $\bar{s}_{NT}$ – вектор заявок игроков, не вошедших в коалицию *T*.

Аналогично процедуре, использованной при построении характеристической функции для задачи распределения ресурса, можно от векторных заявок $\bar{s}_T$ и $\bar{s}_{NT}$ перейти к единым заявкам s_T и $\bar{s}_{NT}$, сведя задачу *n* переменных к задаче двух переменных.

Тогда характеристическая функция коалиции T запишется как

(18) $V(T) = \max_{s_T} \min_{s_{NT}} \sum_{i \in T} f_i(s_T, s_{NT}, r_i)$,

В качестве простого примера можно рассмотреть экспертизу трех игроков с функциями полезности $f_i = -(x^* - r_i)^2$, где $0 \le r_i \le 1$, а в качестве механизма определения итоговой оценки $p(\bar{s})$ взять среднее арифметическое.

Решив задачу (18), мы для каждой коалиции *T* можем найти характеристические функции. Вообще же зависимость характеристической функции от истинных значений параметров r_i экспертов, вошедших в коалицию, имеет довольно сложную структуру.

Наличие пустого или непустого *С*-ядра зависит от вида характеристических функций и в общем случае довольно трудоемко. Однако относительно существования *С*-ядра можно сделать вывод: полная коалиция в задаче активной экспертизы выгодна экспертам в том случае, если значения их истинных оценок r_i лежат близко к границам оцениваемого параметра, то есть близко к *d* или *D*.

Для нашего примера в случае если $0 \le r_1, r_2, r_3 < 1/3$ или $2/3 < r_1, r_2, r_3 \le 1$, то *С*-ядро не пусто.

Непустота *С*-ядра в этом случае вытекает из того факта, что эксперты не могут своей игрой полностью застраховаться от наихудшей для них игры противников. Так, при $0 \le r_1, r_2, r_3 < 1/3$ коалиция первого и второго игроков даже при заявке $s_1 = s_2 = 0$ может гарантировать себе лишь $x^* = \frac{1}{3}$, что больше, чем r_1 и r_2, то есть полностью не страхуются от «плохой» для них игры третьего.

Объединение в максимальную коалицию будет не выгодным для экспертов (*С*-ядро пусто), в случае, если

а) в некооперативной игре существует диктатор

б) в некооперативной игре есть эксперт или коалиция экспертов, способных полностью застраховаться от неблагоприятной игры противников.

В случае а) диктатор в некооперативной игре достигает максимума своей функции полезности (напомним, что в этом случае $x^* = r_d$), в то время, как выигрыш максимальной коалиции будет строго меньше (мы исключаем случай, когда $\forall i : r_i = r$), то есть объединение в коалицию не выгодно диктатору.

В случае б) игроку или коалиции, гарантирующей себе максимум функции полезности в кооперативной игре (назовем его субдиктатор), не выгодно вступать в коалицию по тем же причинам, что и в случае а).

Для нашего примера в случае, если $\exists i : 1/3 \le r_i \le 2/3$ - то *С*-ядро пусто. Необходимо отметить, что в данном примере диктатором является игрок с истинной оценкой $r_d = \arg\max_k \min(r_k, W_{k-1})$, а субдиктатором – игрок для которого $1/3 \le r_i \le 2/3$.

В остальных случаях *С*-ядро может быть как пустым, так и не пустым. Пустота или непустота *С*-ядра определяется видом функций полезности экспертов и механизма определения итоговой оценки $p(\bar{s})$.

Для нашего примера, в случае, если $0 \le r_1, r_2 < 1/3$, $r_3 > 2/3$ или $0 \le r_1 < 1/3$, $r_2, r_3 > 2/3$, *С*-ядро может быть как пустым, так и не пустым.

4.3. МЕХАНИЗМЫ ОТКРЫТОГО УПРАВЛЕНИЯ

Важной задачей теории активных систем является нахождение механизмов открытого управления, то есть таких механизмов, когда активные элементы заинтересованы в сообщении достоверной информации о себе, причем искомый механизм должен учитывать не только индивидуальные действия экспертов, но и возможность их кооперативного взаимодействия.

Для начала выясним, будет ли механизм открытого управления для случая некооперативного взаимодействия учитывать возможность объединения экспертов. Экспертам известно, что центр руководствуется механизмом (15), однако, принимая во внимание возможность кооперативного взаимодействия, эксперты входящие в коалицию *T* будут сообщать вместо своего истинного мнения r_i, некую заявку r_i', максимизмрующую полезность коалиции Т, то есть механизм определения итоговой оценки перепишется как:

(19) $x^* = \max_k \min(r_k', W_{k-1})$

где $r_i' = r_i$, если $i Ë T$ и $r_i' = \arg\max_{r_i'} V_T(x^*(\bar{r}_i'))$

К сожалению, устойчивость механизма активной экспертизы относительно кооперативного взаимодействия экспертов, проявляется лишь для очень узкого класса функций полезности. Например, можно сделать следующее утверждение:

В случае если функции полезности экспертов квадратичные: $f_i(x^*, r_i) = -(x^* - r_i)^2$, и в некооперативной игре существовал диктатор с истинным мнением $W_{n-1} < r_d < W_1$, либо *С*-ядро пусто, либо оно вырождено (т.е. состоит из единственной точки, дающей экспертам ту же полезность, что и при некооперативной игре).

Действительно, если существует диктатор, то для некооперативной игры $x^* = r_d$. и полезность диктатора $f_d = 0$

Если мы теперь предположим существование ядра, то максимум характеристической функции максимальной коалиции *N* будет достигаться при $\tilde{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$ (очевидно, что эксперты могут добиться такой итоговой оценки, если все подадут заявку $s_N = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$). Выигрыш максимальной коалиции в этом случае будет равен

$$\text{(20)}\ V_N = -\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i - r_j\right)^2$$

Теперь рассмотрим коалицию *N-1* эксперта без диктатора. Очевидно, что максимум характеристической функции V_{N-1} для этой коалиции будет достигаться при $\tilde{x}^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i\neq d} r_i$, и при этом значение характеристической функции равно:

$$\text{(21)}\ V_{N-1} = -\sum_{j\neq d}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq d} r_i - r_j\right)^2 .$$

Эксперты, входящие в коалицию *N-1* могут гарантировать себе достижение этой оценки, если все сообщат заявку $s_{N-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i\neq d} r_i$.

По свойствам *C*-ядра, дележ должен удовлетворять условию: $\sum_{l=1}^{n} x_l = V_N$, $\sum_{l\neq d} x_l \geq V_{N-1}$, откуда следует, что $x_d \leq V_N - V_{N-1}$.

Следовательно

$$x_d \leq V_N - V_{N-1} = -\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i - r_j\right)^2 + \sum_{j\neq d}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq d} r_i - r_j\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{j\neq d} r_i - (n-1)r_j\right)^2 \leq 0,$$

то есть мы получаем, что диктатор при дележе получит не больше, чем в некооперативной игре.

В том случае, если $\sum_{j\neq d} r_i - (n-1)r_j \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i \neq r_d$, диктатор получает строго меньше, чем в некооперативной игре.

В случае, если $\sum_{j\neq d} r_i - (n-1)r_j = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i = r_d$, если *C*-ядро не пусто, то $\bar{x}^* = x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$, что совпадает с некооперативным случаем. Это означает, что если *C*-ядро и не пусто, то оно вырожденно и состоит лишь из одной точки – точки значений некооперативных функций полезности.

Получаем тогда, что в случае, если функции полезности экспертов квадратичные: $f_i(\bar{x}^*, r_i) = -(\bar{x}^* - r_i)^2$ и в некооперативной игре существовал диктатор с истинным мнением $W_{n-1} < r_d < W_1$, экспертам не выгодно объединяться в коалиции, а выгодно играть индивидуально, а значит механизм (15) остается механизмом открытого управления.

К сожалению, во множестве других случаев корпоративного взаимодействия экспертов, *C*-ядро не пусто и экспертам выгодно объединяться в коалиции. Так, например, легко проверить, что ядро существует в случае экспертизы трех экспертов с функциями полезности.

$$f_1 = -(x^* - 0.1)^2, \quad f_2 = -(x^* - 0.4)^2, \quad f_3 = -100(x^* - 0.9)^2.$$

Действительно, в этом случае третьему игроку выгодно подкупать первого и второго игроков с тем, чтобы они сообщили заявки, близкие к его истинному мнению.

4.4 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные результаты показывают, что в большинстве случаев рассмотрения кооперативного взаимодействия экспертов, *C*-ядро не пусто, то есть эксперты сочтут для себя выгодным объединяться в коалиции. В отличие от задачи распределения ресурса, где объединение игроков в коалиции шло на пользу Центру, приводя к увеличению эффективности функционирования активных элементов, в задаче активной экспертизы, возможность объединения в коалиции является для Центра вредом, способствуя искажению экспертами информации об своих истинных мнениях. Более того, имеющийся механизм (15) перестает быть механизмом открытого управления, так как экспертам в случае возможности кооперативного взаимодействия становится невыгодно сообщать свои истинные мнения. Перспективным является построение механизма открытого управления, который бы учитывал возможность кооперативного взаимодействия.

5. Резюме

Обоснована необходимость рассмотрения кооперативных взаимодействий в задачах управления активными системами. Для задач планирования предложена схема анализа кооперативных взаимодействий. Показана сфера применимости для анализа задач планирования *C*-ядра, как концепции решения кооперативной игры. Предложенная схема исследования реализована для задач распределения ресурса и активной экспертизы.

Для распределения ресурса исследованы различные модели взаимодействий АЭ. Для трансферабельных полезности и ресурса доказано достаточное условие непустоты *C*-ядра и предложены его следствия для различных вариантов информированности центра. Перспективным представляется синтез механизмов распределения ресурса, гарантирующих непустое *C*-ядро, а также рассмотрение других концепций решения, помимо *C*-ядра.

Для задачи активной экспертизы построена характеристическая функция. Исследованы условия непустоты *C*-ядра на примере частного случая трех экспертов. Проведено обсуждение возможности построения неманипулируемого прямого механизма экспертизы с учетом кооперативных возможностей экспертов.

Литература

1. ОУЭН Г. *Теория игр*. М.: Мир, 1971. – 230 с.
2. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., СЕМИНА Е.А. *Теория игр*. М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.

3. НОВИКОВ Д.А., ПЕТРАКОВ С.Н. *Курс теории активных систем*. М.: СИНТЕГ, 1999. – 108 с.
4. БУРКОВ В.Н., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Механизмы функционирования организационных систем*. М.: Наука, 1981. – 384 с.
5. ПЕТРАКОВ С.Н. *Неманипулируемость механизмов планирования и множества диктаторства.* / Теория активных систем. Труды Юбилейной международной научно-практической конференции. М.: СИНТЕГ, 1999. – 320 с.
6. КОЛМОГОРОВ А.Н., ФОМИН С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1989. – 624 с.