ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ АКТИВОВ НА ФОНДОВОМ РЫНКЕ

Старостенко В.В.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
v@starostenko.info

Введение

В настоящее время при моделировании ценообразования активов на фондовом рынке наибольшее распространение приобрели два подхода: фундаментальный и технический анализ.

Фундаментальный анализ основывается на предположении существования равновесной цены и используется для вычисления справедливой стоимости активов. Неявными предположениями при использовании данного подхода являются гипотеза о полной информированности и рациональности рыночных агентов.

Технический анализ состоит в использовании истории торгов на фондовом рынке с целью предсказания будущих значений стоимости активов. В качестве наиболее перспективного направления технического анализа можно выделить эконометрическое моделирование динамики стоимости активов – регрессионный анализ. Данный подход состоит в выборе функциональной зависимости между рыночными переменными, наиболее хорошо согласующейся с реальными данными. Наиболее часто для данной цели используется метод максимального правдоподобия.

Однако помимо фундаментального и технического анализа с целью прогнозирования будущей стоимости финансовых активов можно также использовать теоретико-игровой подход.

Данный подход основывается на моделировании рынка как активной системы. Игроки – рыночные агенты – формируют спрос на активы на основе своих априорных представлений о ситуации на рынке, а также бюджетных ограничений. В конечном итоге в результате взаимодействия активных агентов на рынке устанавливается цена, балансирующая спрос и предложение актива.

Данный подход все более часто используется в работах современных экономистов. Как правило, основной предпосылкой всех данных работ является предположение о типах активных агентов, совершающих действия на фондовом рынке и их структуре информированности. Основы теории рефлексивных игр изложены в [1].

Основополагающей и наиболее широко известной работой в данной области работа Джорджа Сороса «Алхимия Финансов» [2]. Автор высказывает предположение о неверности концепции рыночного равновесия, которая является основной в современной экономической теории и широко используется в фундаментальном анализе. Сорос представляет фондовый рынок как активную систему, в основе функционирования которой лежит понятие рефлексивности. Рефлексивность рынка по Соросу заключается в том, что для каждого агента существуют две функции. Первая функция (активная) представляет собой влияние действий агента на ситуацию на рынке. Вторая функция (когнитивная) представляет собой влияние рынка на действия агента. Таким образом, Сорос утверждает, что рефлексивность является главной характеристикой рынка, которая позволяет моделировать целый ряд процессов, которые невозможно объяснить с использованием стандартного подхода. Ключевыми понятиями здесь являются основной тренд и самоусиливающийся процесс, которые, согласно Соросу определяют динамику стоимости рыночного актива.

На основе книги Джорджа Сороса в работе Ф.И. Ерешко [3-5] построена математическая модель, которая связывает две основные переменные фондового рынка: стоимость акции и величину чистой прибыли на одну акцию. Автор моделирует эту связь посредством разностных уравнений. С помощью выбора коэффициентов удавалось получить различные типы динамики стоимости рыночного актива, были также указаны наборы коэффициентов, которые приводят к динамике цены, полностью совпадающей с примерами, описанными Соросом. Основным результатом данной работы является моделирование стоимости активов посредством выбора достаточно небольшого числа коэффициентов. Недостаток модели состоит в том, что она может хорошо описывать динамику лишь в течение очень короткого интервала времени. Для того, чтобы модель описывала рынок в течение продолжительного периода времени необходимо вводить зависимость коэффициентов в модели от времени. Однако, интерпретация коэффициентов в модели крайне затруднительна. На стоимость финансовых активов влияет огромное количество факторов, и редуцирование количества исследуемых факторов до двух вряд ли может быть оправдано.

В данной работе используется подход к моделированию фондового рынка как активной системы, в которой присутствуют активные агенты разных типов, обладающие различными представлениями о ситуации на рынке. За основу в работе принята модель американского экономиста А. Шлейфера [7]. В модель фондового рынка вводятся активные агенты, обладающие различными представлениями относительно будущей динамики цен. Рассматриваются два актива, один из которых имеется в ограниченном количестве. Похожие предположения о структуре рынка и информированности рыночных агентов приняты в [6]. Основным результатом работы является выражение в явном виде динамики стоимости этого актива как функции времени в зависимости от параметров модели.

1. Постановка задачи

Агенты. Пусть агенты живут два периода времени. В первом периоде они получают единицу денег, которую инвестируют в активы на фондовом рынке. Во втором периоде времени они продают все купленные в первом периоде активы и покупают на вырученные средства потребительские товары.

Полезность агентов является функцией вырученных во втором периоде жизни денег и имеет следующий вид: $U = -e^{-gw}$, где w – количество денег, на которые приобретаются потребительские товары.

Агенты имеют одинаковые ожидания относительно динамики цены на активы в последующие моменты времени. Предположим, что имеется два актива: рискованный (unsafe) и безрисковый (safe). Относительно динамики стоимости безрискового актива агенты информированы полностью. Стоимость рискованного актива p_t с точки зрения агентов следует процессу случайного блуждания и может быть записана в виде:

(1) $p_{t+1} = p_t + e_{t+1}$, где

(2) $e_t \sim N(m, s_e^2)$.

В действительности же стоимость этого актива определяется рынком таким образом, чтобы уравновесить спрос и предложение актива.

В каждом поколении агенты делятся на два типа. Считаем, что каждое поколение состоит из континуума агентов, который моделируется отрезком [0; 1].

Долю l составляют агенты первого типа, которые не обладают полной информацией о структуре рынка. Неосведомленность агентов моделируется тем, что они обладают неправильным представлением относительно того, из каких агентов состоит рынок (не знают о существовании агентов других типов), и предъявляют спрос на актив исходя из максимизации ожидаемой полезности.

Долю $1 - l$ составляют агенты второго типа, которые адекватно информированы о структуре рынка: они понимают, что агенты первого типа составляют рыночную долю l, а также знают о том, что цена товара в каждом периоде времени уравновешивает спрос и предложение на рынке.

Активы. Предположим, что первый актив (безрисковый) дает фиксированную доходность r в каждом периоде времени. Предложение данного актива на рынке бесконечно.

Второй актив (рискованный) представлен на рынке в ограниченном количестве. Будем считать предложение этого актива равным единице. В каждом периоде времени цена актива определяется из условия баланса спроса и предложения на рынке. Актив второго типа не приносит фиксированной доходности, доходность этого актива определяется лишь изменением его цены.

2. Равновесие

Опишем условия, которые определяют баланс на рынке.

Выпишем бюджетные ограничения, с которыми сталкиваются агенты:

(3) $w_{t+1} = (1+r)s_t + p_{t+1}u_t$

(4) $1 = w_t = s_t + p_t u_t$,

где w_t – количество денег, которое агент получает в первом периоде жизни

u_t – количество единиц безрискового актива, которое он покупает

s_t – количество единиц рискованного актива

Условие баланса спроса и предложения на рынке рискованного актива может быть записано в следующем виде:

(5) $l_1 u_t^1 + (1 - l_1)u_t^2 = 1$

Все описанные выше условия вместе с условиями, накладываемыми на действия агентов (решение задачи максимизации ожидаемой полезности) позволяют найти равновесную траекторию цены рискованного актива на рынке. Поэтому рассмотрим поведение агентов.

Задача агентов первого типа. Агенты первого типа максимизируют ожидаемую полезность

$$E_t U^1_{t+1} \to \max_{u_t^1, s_t^1} ,$$

с учетом бюджетных ограничений, а также своих представлений относительно будущей динамики цены рискованного актива.

Задача агентов второго типа. Агенты второго типа максимизируют ожидаемую полезность

$$E_t U^2_{t+1} \to \max_{u_t^2, s_t^2} ,$$

с учетом бюджетных ограничений, своих представлений относительно будущей динамики цены рискованного актива, а также условия баланса на рынке, которое не было известно агентам первого типа.

(6) $l\, u_t^1 + (1 - l\,)u_t^2 = 1$.

Отметим, что агенты второго типа знают, какую задачу решают агенты первого типа, поэтому они могут решить их задачу максимизации и найти выражения для предъявляемого спроса на рискованный актив.

Решение задач агентов. Решим задачу агентов первого типа. Подставляя бюджетные ограничения в задачу максимизации ожидаемой полезности, получаем:

(7) $E_t\{-e^{-g((1+r)(1-u_t p_t)+u_t p_{t+1})}\} \to \max_{u_t}$

Используем соотношение $Ee^x = e^{\{m + \frac{s^2}{2}\}}$ если $x \sim N(m, s^2)$, а также упростим максимизируемое выражение, исключив из него постоянные множители. После проведения этих операций получим задачу:

$$-g(1+r)(1-u_t p_t) - g\,u_t p_t - g\,u_t m + \frac{1}{2}g^2 u_t^2 s^2 \to \min_{u_t}$$

(8)

решение которой записывается в виде:

(9) $u_t^{1opt} = \dfrac{m - p_t r}{g s^2}$

Проинтерпретируем полученный результат. Решение положительно зависит от переменной m и отрицательно зависит от всех остальных параметров: p_t, r, g, s^2 .

Результат хорошо соотносится с экономической интуицией. Параметр m представляет собой меру оптимистичности агентов, поэтому чем выше значение этого параметра, тем больший спрос агенты предъявляют на актив, p_t – стоимость актива сегодня. Чем выше значение этой переменной, тем ниже спрос на актив. r – доходность безрискового актива, а следовательно и альтернативные издержки от вложения в рискованный актив. Чем выше эти издержки, тем меньше будет спрос на актив. Зависимость решения по g отрицательная, поскольку g представляет собой степень отвращения к риску. Чем выше этот параметр, тем меньше желание агента инвестировать в рискованный актив. s^2– мера неопределенности будущей цены. Поскольку агенты избегают риска (функция полезности вогнутая), этот параметр оказывает отрицательное влияние на спрос.

Стоит отметить, что спрос на рискованный актив будет положительным только при условии $m - p_t r > 0$. Это условие говорит о том, что ожидаемое увеличение стоимости рискованного актива должно быть больше того, что агенты могут получить посредством вложения средств в безрисковый актив. Далее мы будем считать, что это условие выполняется, и агенты первого типа предъявляют строго положительный спрос на рискованный актив.

Решим задачу агентов второго типа. Из уравнения баланса видно, что агенты второго типа своим выбором спроса на рискованный актив определяют его стоимость в данном периоде времени.

Поэтому они могут в явном виде получить функцию стоимости рискованного актива в зависимости от своей заявки и решить задачу максимизации ожидаемой полезности.

$$l\,\frac{m-p_t r}{g s^2}+(1-l)u_t^2=1 \tag{10}$$

$$u_t^2(p_t)=\frac{1-l\,\frac{m-p_t r}{g s^2}}{(1-l)} \tag{11}$$

Мы получили функцию спроса агентов второго типа на рискованный актив в зависимости от его стоимости. Поскольку эта функция является линейной, введем следующие обозначения и перепишем ее в виде:

$$u_t^2(p_t)=a+bp_t, \tag{12}$$

где

$$a=\frac{1-l\,\frac{m}{g s^2}}{(1-l)}, \tag{13}$$

$$b=\frac{l\,\frac{r}{g s^2}}{(1-l)}. \tag{14}$$

Эта функция подставляется в задачу оптимизации, решением которой является динамика цены на рискованный актив:

$$-g(1+r)(1-u_t p_t)-g u_t p_t-g u_t m+\frac{1}{2}g^2 u_t^2 s^2\to\min_{u_t} \tag{15}$$

В итоге получается задача

$$-g(1+r)(1-(a+bp_t)p_t)-g(a+bp_t)p_t-$$
$$-g(a+bp_t)m+\frac{1}{2}g^2(a+bp_t)^2 s^2\to\min_{p_t} \tag{16}$$

Квадратный трехчлен относительно p_t имеет вид:

$$p_t^2\left(\frac{1}{2}g^2 s^2 b^2+g br\right)+p_t\,(g ar-g bm+abs^2 g^2)+const(p_t) \tag{17}$$

Задача на экстремум имеет решение вида

$$p_t=\frac{bm-ar-abs^2 g}{(g s^2 b^2+2br)}=const(t) \tag{18}$$

После подстановки в это уравнение выражений для параметров a и b получаем:

$$p_t=\frac{m}{r}-\frac{g s^2}{l\,r(2-l)}. \tag{19}$$

Мы получили выражение для стоимости рискованного актива как функцию от параметров l, g, s^2, m, r. Стоит отметить, что зависимость является монотонной по параметрам l, g, s^2, m, r.

Этот результат хорошо согласуется с результатами, полученными в модели А. Шлейфера [7]. Интересным является вывод, что цена актива увеличивается с увеличением доли агентов первого типа (которые обладают меньшим количеством информации)

Любопытно также отметить, что цена является положительной функцией от l. Это свидетельствует о том, что чем больше количество слабо информированных агентов, тем более высокая цена в итоге установится.

Следует сделать еще одно важное замечание. Поскольку в каждом периоде времени агенты решают одинаковые задачи, и их ожидания относительно будущей динамики стоимости рискованного актива не зависят от того, что они наблюдают в реальности, цена на рискованный актив всегда остается постоянной во времени.

В этом заключается основной недостаток модели, который нужно исправлять посредством эндогенизации представлений относительно динамики стоимости рискованного актива. Наиболее логичным является предположение о том, что представления агентов относительно динамики цены зависят от того, какие значения стоимости актива наблюдались в прошлом.

Рассмотрим модификацию исходной модели, в которой представления агентов относительно будущей цены рискованного актива находятся в зависимости от прошлых значений.

Будем считать, что представления агентов описываются следующей зависимостью

(20) $p_{t+1} - p_t = m + a(p_t - p_{t-1}) + e_{t+1}$, где

(21) e_{t+1} – нормально распределенная случайная величина со средним значением *0* и дисперсией s^2.

Снова рассматривая задачу максимизации ожидаемой полезности агентами первого типа, получаем спрос со стороны этих агентов на рискованный актив в виде

$$u_t^{1opt} = \frac{m + p_t(a - r) - a\,p_{t-1}}{gs^2} \quad (22)$$

Как мы видим, теперь решение является не только функцией цены в данном периоде времени, но также и цены в прошлом периоде.

Зная функцию спроса агентов первого типа на рискованный актив, запишем соотношение между ценой на актив и спросом на него со стороны агентов второго типа

$$u_t^2(p_t) = \frac{1 - l\,\dfrac{m + p_t(a - r) - a\,p_{t-1}}{gs^2}}{(1 - l)} \quad (23)$$

Как и в предыдущем случае, мы можем выразить эту зависимость в виде

(24) $u_t^2(p_t) = a + bp_t$,

где

$$a = \frac{1 - l\,\dfrac{m - a\,p_{t-1}}{gs^2}}{(1 - l)} \quad (25)$$

$$b = \frac{l\,\dfrac{r - a}{gs^2}}{(1 - l)} \quad (26)$$

В итоге получаем уравнение для цены актива, которое является функцией от прошлых значений цены.

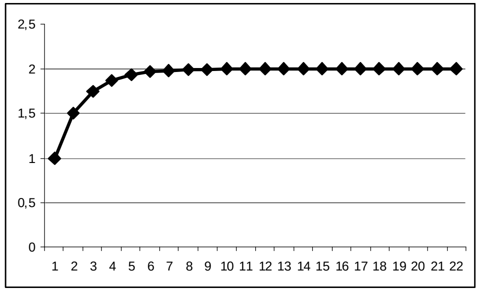
$$p_t = \frac{bm - a(r - a) - ga\,p_{t-1}b - abs^2 g}{gs^2 b^2 + 2b(r - a)} \quad (27)$$

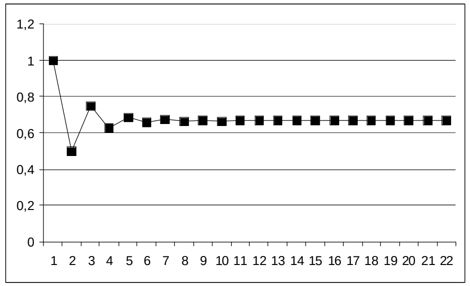
После подстановки в это выражение коэффициентов a и b, получаем уравнение для динамики стоимости рискованного актива в виде

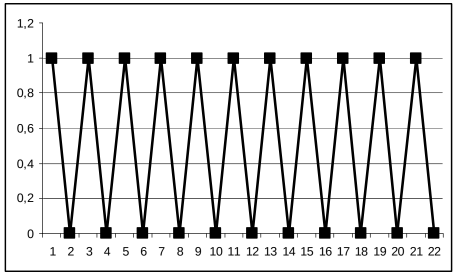
(28) $p_t = A + Bp_{t-1}, B < 0$

Стоит отметить, что при *a = 0* получаем решение для случая со статическими ожиданиями.

С помощью симуляций при различных параметрах модели получаются следующие виды динамики актива:







В заключение отметим, что при «улучшении» памяти агентов, т.е. введении в их представления значений стоимости актива в прошлые моменты времени, можно получить колебания более «причудливой» формы.

Литература

1. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. М.: Синтег, 2003 – 149 с.
2. СОРОС Д. *Алхимия финансов*. М.: ИНФРА-М, 1999. – 416 с.
3. ЕРЕШКО Ф.И. *Моделирование рефлексивных стратегий в управляемых системах*. М.: ВЦ РАН, 2001. – 37 С.
4. ЕРЕШКО Ф.И., ЛОХНЫГИНА Ю.В. *Исследование моделей рефлексивных стратегий в управляемых системах*. М.: ВЦ РАН, 2001. – 37 с.
5. ЕРЕШКО Ф.И., ЛОХНЫГИНА Ю.В. *Рефлексивные стратегии в системах управления* / Труды Юбилейной международной научно-практической конференции «Теория активных систем». Общая редакция – В.Н. Бурков, Д.А. Новиков. М.: Синтег, 1999. С. 211 – 213.
6. KYLE A. *Continuous Auctions and Insider Trading* // Econometrica. 1985. Vol. 53. P. 1315 – 1355.
7. SHLEIFER ANDREI. *Inefficient Markets: An Introduction to Behavioral Finance.* Oxford University Press, 2000.