ОЦЕНКА МОЩНОСТИ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Рожихин П.В.[1]

(Волгоградский государственный университет, Волгоград)

Введение

Динамичность организационных систем (ОС) является наблюдаемым свойством, однако разнообразие эмпирических и аналитических моделей организационной динамики говорит скорее о неразвитости соответствующего аналитического аппарата, нежели об их содержательном богатстве. Динамический подход к моделированию больших социально-экономических систем используется достаточно широко в силу их большой динамической определенности, статистической детерминированности и относительной устойчивости тенденций развития. Однако по мере их измельчения традиционный динамический подход становится все менее продуктивным из-за потери ими (регионами, отраслями, организациями, группами и т.п.) самодостаточности, и подчинения случайностям взаимодействия с крупными и детерминированными внешними системами. В их развитии усиливается роль случайностей как внутреннего, так и внешнего происхождения. Особенно трудными для анализа являются модели ОС с переменной структурой.

Всякой ОС можно поставить в соответствие ряд взаимосвязанных иерархически-сетевых структур: организационную, функциональную, целевую, управленческую и т.д., при этом вид одной из них может определять правила изменения другой. Попытка решения основной задачи динамики – описания изменений каждой из них во времени – требует адекватного языка описания пространства состояний структур и его топологии, правил изменения состояний, траекторий и т.д. Таким образом, плодотворность динамического подхода к моделированию ОС определяется синхронизацией двух направлений исследований: эмпирического обоснования числа и вида агрегированных гомеостатических функций и синтеза адекватного аналитического аппарата динамики иерархически-сетевых структур.

[1] *Работа выполнена при поддержке гранта 18-2005-а/ВГИ ВолГУ.*

В настоящей работе представлено решение частной задачи изучения пространства состояний иерархической структуры – оценка мощности его базового подпространства – совокупности деревьев с общими листьями (монодерева) [3]. Эта задача, представляя самостоятельный интерес, в частности характеризует сложность задач управления системами, структуры которых представляются деревьями.

1. Монодерево и число его состояний

Мы будем понимать под деревом с корнем r конечный ориентированный граф D=(X,U), удовлетворяющий условиям:

1. из каждой вершины $x \neq r$ выходит единственная дуга;
2. из r не выходит ни одна дуга;
3. (X,U) не содержит контуров;
4. в каждую вершину D кроме листьев входит не менее двух дуг.

Некоторые свойства графов, удовлетворяющих условиям 1-3 были описаны в [1]. В работе [2] достаточно систематично изучались системы, описываемые графами, удовлетворяющими условиям 1-4. Далее в работе будут рассматриваться только деревья в смысле определения, данного выше.

Определение. Множество M всех деревьев с общим корнем и листьями назовем *монодеревом*. Каждый граф этого множества назовем *состоянием монодерева*. Число листьев монодерева (одинаковое для всех, входящих в него графов) назовем его *размерностью*.

Найдем число состояний монодерева заданной размерности. Обозначим s – размерность монодерева, $l(s)$ – число различных состояний монодерева размерности s. Очевидно, $l(2)=1$. Также, легко найти $l(3)=4$.

Определение. Разбиением целого положительного числа s назовем представление s в виде суммы целых положительных чисел $s = k_1 + k_2 + ... + k_m$, $k_i > 0$, $i = \overline{1,m}$.

Обозначим $R(s)$ множество всех разбиений числа s. Пусть некоторое разбиение числа s состоит из l_1 слагаемых, равных k_1, l_2 слагаемых, равных k_2, и так далее l_m слагаемых, равных k_m, то есть

$s = l_1k_1 + l_2k_2 + ... + l_mk_m$. Обозначим такое разбиение $(k_1^{l_1}, k_2^{l_2}, ..., k_m^{l_m}) \in R(s)$. Очевидно, любое разбиение числа s можно представить в таком виде.

Обозначим $m(k_1^{l_1}, k_2^{l_2}, ..., k_m^{l_m})$ – количество способов разбиения множества из $l_1k_1 + l_2k_2 + ... + l_mk_m$ различных элементов на $l_1 + l_2 + ... + l_m$ непересекающихся подмножеств, где l_1 подмножеств содержат k_1 элементов, l_2 подмножеств содержат k_2 элементов, и вообще l_i подмножеств содержат k_i элементов, $i = \overline{1, m}$. Кроме того, $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Лемма.

(1) $$m(k_1^{l_1}, k_2^{l_2}, ..., k_m^{l_m}) = \frac{(l_1k_1 + l_2k_2 + ... + l_mk_m)!}{l_1!l_2!...l_m!(k_1!)^{l_1}(k_2!)^{l_2}...(k_m!)^{l_m}}$$

Доказательство.

Обозначим для краткости $n = l_1k_1 + l_2k_2 + ... + l_mk_m$. Требуемое разбиение множества можно провести в два этапа. Сначала разбить множество из n элементов на m непересекающихся подмножеств, где подмножество i содержит l_ik_i элементов, $i = \overline{1, m}$. Обозначим число способов такого разбиения m_0. Затем разбить множество из l_ik_i элементов на l_i непересекающихся подмножеств, содержащих k_i элементов каждое, $i = \overline{1, m}$. Обозначим m_i количество способов такого разбиения. Тогда общее число способов разбиения будет равно

(*) $$m(k_1^{l_1}, k_2^{l_2}, ..., k_m^{l_m}) = m_0m_1m_2...m_m.$$

Найдем m_0. Первое подмножество можно выбрать $C_n^{l_1k_1}$ способами. После того как первое подмножество выбрано, второе подмножество можно выбрать $C_{n-l_1k_1}^{l_2k_2}$ способами. И так далее, после того как выбрано подмножество $i-1$, подмножество i можно выбрать $C_{n-l_1k_1-l_2k_2-...-l_{i-1}k_{i-1}}^{l_ik_i}$ способами. Тогда получим

$$m_0 = C_n^{l_1k_1} C_{n-l_1k_1}^{l_2k_2} ... C_{n-l_1k_1-l_2k_2-...-l_{n-1}k_{n-1}}^{l_nk_n} = \frac{n!}{(l_1k_1)!(l_2k_2)!...(l_nk_n)!}.$$

Найдем m_i. Первое подмножество можно выбрать $C_{l_ik_i}^{k_i}$ способами. После того как первое подмножество выбрано, второе подмножество можно выбрать $C_{l_ik_i-k_i}^{k_i}$ способами. И так далее, после того как выбрано подмножество $i-1$, подмножество i можно выбрать $C_{l_ik_i-(i-1)k_i}^{k_i}$ способами. Тогда получим $C_{l_ik_i}^{k_i} C_{l_ik_i-k_i}^{k_i} ... C_{l_ik_i-(l_i-1)k_i}^{k_i} = \frac{(l_lk_i)!}{(k_i!)^{l_i}}$. В этой величине каждое разбиение множества на подмножества будет учтено $l_i!$ раз, поскольку учитывался порядок выбора подмножеств. Поэтому

$$m_i = \frac{(l_lk_i)!}{l_i!(k_i!)^{l_i}}.$$

Подставляя найденные значения m_0 и m_i ($i = \overline{1, m}$) в (*), получим требуемое. Лемма доказана. •

Утверждение. Число различных состояний монодерева размерности $s \geq 2$ равно

(2) $$l(s) = \sum_{(k_1^{l_1}, k_2^{l_2}, ..., k_m^{l_m}) \in R(s)} m(k_1^{l_1}, k_2^{l_2}, ..., k_m^{l_m}) \big(l(k_1)\big)^{l_1} \big(l(k_2)\big)^{l_2} ... \big(l(k_m)\big)^{l_m},$$

где сумма взята по всем разбиениям числа s.

Доказательство.

Предположим, что уже построены всевозможные состояния монодеревьев всех размерностей меньше s и число состояний описывается формулой (2). Построим всевозможные состояния монодерева размерности s. Сначала разобьем множество листьев N на подмножества, мощность которых строго меньше мощности N, всеми возможными способами. Число способов равно $\sum_{(k_1^{l_1}, k_2^{l_2}, ..., k_m^{l_m}) \in R(s)} m(k_1^{l_1}, k_2^{l_2}, ..., k_m^{l_m})$. Пусть очередное разбиение состоит из подмножеств $N_1, N_2, ..., N_{l_1}$, содержащих k_1 элементов, $N_{l_1+1}, N_{l_1+2}, ..., N_{l_1+l_2}$, содержащих k_2 элементов, и так далее

$N_{l_1+l_2+...+l_{m-1}+1}, N_{l_1+l_2+...+l_{m-1}+2},..., N_{l_1+l_2+...+l_{m-1}+l_m}$, содержащих k_m элементов. Число таких разбиений $m(k_1^{l_1}, k_2^{l_2},..., k_m^{l_m})$. Для каждого множества листьев N_i построим монодерево M_i, $i=\overline{1, l_1+l_2+...+l_m}$. Размерность каждого монодерева меньше s, поэтому число состояний описывается формулой (1.1). Выберем из каждого монодерева M_i некоторое дерево D_i. Из каждого монодерева $M_1, M_2,..., M_{l_1}$ можно выбрать $l(k_1)$ различных деревьев, из каждого монодерева $M_{l_1+1}, M_{l_1+2},..., M_{l_1+l_2}$ можно выбрать $l(k_2)$ различных деревьев и вообще из каждого монодерева $M_{l_1+l_2+...+l_{i-1}+1}, M_{l_1+l_2+...+l_{i-1}+2},..., M_{l_1+l_2+...+l_{i-1}+l_i}$ можно выбрать $l(k_i)$ различных деревьев, $i=\overline{1,m}$. Выбор дерева из любого монодерева не зависит от выбора деревьев из других монодеревьев. Тогда число различных наборов деревьев из монодеревьев $M_1, M_2,..., M_{l_1+l_2+...+l_m}$ равно $(l(k_1))^{l_1}(l(k_2))^{l_2}...(l(k_m))^{l_m}$. После того, как выбран очередной набор деревьев $D_1, D_2,..., D_{l_1+l_2+...+l_m}$, построим дерево D. Возьмем $D_1, D_2,..., D_{l_1+l_2+...+l_m}$ в качестве поддеревьев дерева D и проведем дугу из корня каждого дерева $D_1, D_2,..., D_{l_1+l_2+...+l_m}$ в корень дерева D. Построенное дерево D и будет очередным состоянием монодерева размерности s. Число таких деревьев для заданного разбиения множества листьев N на подмножества будет равно $(l(k_1))^{l_1}(l(k_2))^{l_2}...(l(k_m))^{l_m}$. Учитывая, что число способов разбиения множества N на подмножества равно $\sum_{(k_1^{l_1}, k_2^{l_2},..., k_m^{l_m})\in R(s)} m(k_1^{l_1}, k_2^{l_2},..., k_m^{l_m})$, получим для числа состояний монодеревьев формулу (1.2). Утверждение доказано.

Для построения всевозможных разбиений числа можно воспользоваться алгоритмами, изложенными в [4]. В таблице 1 приведены значения для числа состояний монодеревьев малых размерностей.

Размерность	Число состояний	Размерность	Число состояний
2	1	8	660 032
3	4	9	12 818 912
4	26	10	282 137 824
5	236	11	6 939 897 856
6	2752	12	188 666 182 784
7	39208	13	2 266 907 739 317

Таблица 1. Число состояний монодерева заданной размерности

Заключение

Полученные результаты потенциально позволяют оценить мощность виртуального подпространства состояний иерархической структуры. Однако, вычисление числа состояний монодеревьев больших размерностей по формулам (1), (2) практически невозможно. В связи с этим планируется нахождение соответствующих приближенных оценок.

Литература

1. БЕРЖ К. *Теория графов и ее применения*. М.: Иностранная литература, 1962.
2. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Оптимальные иерархические структуры*. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 214 с.
3. ВОРОНИН А.А., РОЖИХИН П.В. *Модель структурной динамики иерархических систем* / Труды VIII Международной научно-практической конференции “Системный анализ в проектировании и управлении”. Санкт-Петербург: Нестор, 2004. С. 67 – 68.
4. РЕЙНГОЛЬД Э., НИВЕРГЕЛЬТ Ю., ДЕО Н. *Комбинаторные алгоритмы: теория и практика*. М.: Мир, 1980.