ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕЧЁТКОГО КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ

Фёдорова И.В.
(*Воронежский государственный архитектурно – строительный университет, Воронеж*)
FEDOROVA_I@list.ru

Рассмотрим проект, состоящий из набора операций (работ), представленный в виде сети (U, D), $|U| = n$ без контуров с правильной нумерацией вершин. Среди множества вершин выделены входы сети U_0 и выходы сети U_n. При этом дуги сети соответствуют операциям, а вершины – событиям (моментам окончания одной или нескольких операций). В четком случае для каждой операции $(i; j)$ задана её продолжительность t_{ij}. Методы описания и исследования сетевых графиков изучаются в теории календарно-сетевого планирования и управления [2, 3, 4].

Предположим, что выполнение комплекса операций (проекта) начинается в нулевой момент времени. Обозначим U_i^- – множество событий (вершин) j сети, для которых существует дуга (j, i); U_i^+ – множество событий (вершин) j сети, для которых существует дуга (i, j).

В [1] рассмотрен нечёткий случай, при котором относительно продолжительностей операций имеется нечёткая информация, заданная функциями принадлежности $m_{ij}(\bullet):\Re_+ \to [0;1]$ нечёткой продолжительности операции (i, j), $i, j \in U$, которая может быть получена от экспертов в ситуации, когда проект и каждая операция являются уникальными.

В [1] для функций принадлежности нечёткого раннего времени свершения события $i \in U$ – $m_i^-(t)$, нечёткой длины критического пути $m_T(T)$, нечёткого позднего времени свершения события $i \in U$ – $m_i^+(t)$, нечёткой длины максимального пути из вершины i - $m_i^{\max}(t)$ и нечётких полных резервов времени – $m_i^{Dt}(t)$ были при-

ведены следующие формулы (ранние времена свершения событий – входов сети предполагались чёткими и равными нулю):

(1) $m_i^-(t) = \max\limits_{\{(t_j,t_{ji}),\, j\in U_i^- | \max\limits_{j\in U_i^-}(t_j+t_{ji})=t\}} \min\limits_{j\in U_i^-}[\min((m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))];$

(2) $m_T(T) = \max\limits_{\{(t_j),\, j\in U_n | \max\limits_{j\in U_n} t_j = T\}} \min\limits_{j\in U_n}[m_j^-(t_j)];$

(3) $m_i^+(t) = \max\limits_{\{(T,t_j)|T-t_j=t\}} \min[m_T(T); m_i^{\max}(t_j)]$, где

(4) $m_i^{\max}(t) = \max\limits_{\{(t_j,t_{ij}),\, j\in U_i^+ | \max\limits_{j\in U_i^+}(t_j+t_{ij})=t\}} \min\limits_{j\in U_i^+}[\min(m_{ij}(t_{ij}); m_j^{\max}(t_j))];$

(5) $m_i^{Dt}(t) = \max\limits_{\{(y_i,t_i)|y_i-t_i=t\}} \min[m_i^+(y_i,); m_i^-(t_i)].$

Во всех формулах предполагается, что $t_i \ge 0, t_{ij} \ge 0$ для $\forall i \in U,\ j \in U_i^+$.

Введём обозначение $W_i^- = \{(t_j, t_{ji}),\ j \in U_i^- \mid \max\limits_{j\in U_i^-}(t_j + t_{ji}) = t\}$, $\forall (t_j, t_{ji}) \in W_i^-$

(6) $\max\limits_{W_i^-} \min\limits_{j\in U_i^-}[\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \ge \min\limits_{j\in U_i^-}[\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))].$

Рассмотрим вектор (t''_j, t''_{ji}) такой, что $\forall j \in U_i^-$ $A_j = \min(m_{ji}(t''_{ji}); m_j^-(t''_j)) = \max\limits_{t_j+t_{ji}\le t}[\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))]$ для.

Если $(t''_j, t''_{ji}) \notin W_i^-$, то есть $t''_j + t''_{ji} < t$ для $\forall j \in U_i^-$, то построим по вектору (t''_j, t''_{ji}) вектор $(\tilde{t}_j, \tilde{t}_{ji}) \in W_i^-$. Для этого найдём t'_l и t'_{li} такие, что $B = \min(m_{li}(t'_{li}); m_l^-(t'_l)) = \max\limits_{t_l+t_{li}=t}[\min(m_{li}(t_{li}); m_l^-(t_l))] = \max\limits_{j\in U_i^-} \max\limits_{t_j+t_{ji}=t}[\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))]$. Ясно, что $B \le A_l$.

Полагаем $\tilde{t}_j = t''_j, \tilde{t}_{ji} = t''_{ji}$ $j \ne l; \tilde{t}_l = t'_l, \tilde{t}_{li} = t'_{li}$. $(\tilde{t}_j, \tilde{t}_{ji}) \in W_i^-$. Если $B \ge \min\limits_{j\in U_i^-} A_j$, то

$\min\limits_{j\in U_i^-} \min(m_{ji}(\tilde{t}_{ji}); m_j^-(\tilde{t}_j)) = \min[A_j,\ j \in U_i^- \setminus \{l\}; B] = \min\limits_{j\in U_i^-} A_j$;

иначе $\min\limits_{j\in U_i^-} \min(m_{ji}(\tilde{t}_{ji}); m_j^-(\tilde{t}_j)) = B$.

Поэтому, так как неравенство (6) выполняется и для $(\tilde{t}_j, \tilde{t}_{ji}) \in W_i^-$, то

$$(7)\ \max_{W_i^-} \min_{j\in U_i^-} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \geq$$

$$\geq \min \begin{bmatrix} \max\limits_{j\in U_i^-} \max\limits_{t_j + t_{ji} = t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \\ \min\limits_{j\in U_i^-} \max\limits_{t_j + t_{ji} \leq t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, $\forall j \in U_i^-, \forall (t_j, t_{ji}) \in W_i^-$

$\min\limits_{j\in U_i^-} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \leq \min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))$. $\Rightarrow \forall j \in U_i^-$

$$\min_{j\in U_i^-} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \leq \max_{t_j + t_{ji} \leq t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))\,].\ Þ$$

$$(8)\ \max_{W_i^-} \min_{j\in U_i^-} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \leq$$

$$\leq \min_{j\in U_i^-} \max_{t_j + t_{ji} \leq t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))].$$

Пусть для произвольного вектора $(t'_j, t'_{ji}) \in W_i^-$, l – это номер, для которого $t'_{li} + t'_l = t$. Тогда:

$$\min_{j\in U_i^-} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \leq \min(m_{li}(t'_{li}); m_l^-(t'_l)) \leq$$

$$\leq \max_{t_{li} + t_l = t} [\min(m_{li}(t_{li}); m_l^-(t_l))] \leq \max_{j\in U_i^-} \max_{t_{ji} + t_j = t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j)).\ \Rightarrow$$

$$(9)\ \max_{W_i^-} \min_{j\in U_i^-} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \leq$$

$$\leq \max_{j\in U_i^-} \max_{t_j + t_{ji} = t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))]$$

Из (8) и (9)следует

$$(10)\ \max_{W_i^-} \min_{j\in U_i^-} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \leq$$

$$\leq \min \begin{bmatrix} \max\limits_{j\in U_i^-} \max\limits_{t_j + t_{ji} = t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \\ \min\limits_{j\in U_i^-} \max\limits_{t_j + t_{ji} \leq t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \end{bmatrix},$$

а из (7) (10) следует

$$\max_{W_i^-} \min_{j\in U_i^-} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] =$$

$$= \min \begin{bmatrix} \max\limits_{j\in U_i^-} \max\limits_{t_j + t_{ji} = t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \\ \min\limits_{j\in U_i^-} \max\limits_{t_j + t_{ji} \leq t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \end{bmatrix}.$$

Таким образом, формула (1) может быть записана в следующем виде:

$$(11)\ m_i^-(t) = \min \begin{bmatrix} \max\limits_{j\in U_i^-} \max\limits_{t_j + t_{ji} = t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \\ \min\limits_{j\in U_i^-} \max\limits_{t_j + t_{ji} \leq t} [\min(m_{ji}(t_{ji}); m_j^-(t_j))] \end{bmatrix} =$$

$$= \min \begin{bmatrix} \max\limits_{j\in U_i^-} \max\limits_{t_j \leq t} \{\min(m_{ji}(t - t_j); m_j^-(t_j))\} \\ \min\limits_{j\in U_i^-} \max\limits_{t_j \leq t} \{\min(\max\limits_{t_{ji}\in[0;t-t_j]} (m_{ji}(t_{ji})); m_j^-(t_j))\} \end{bmatrix}.$$

Формулы (2)-(5) принимают следующий вид:

$$(12)\ m_T(T) = \min\left[\max_{j\in U_n} m_j^-(t); \min_{j\in U_n} \max_{t_j \leq t} m_j^-(t_j)\right];$$

$$(13)\ m_i^+(t) = \max_T \min[m_T(T); m_i^{\max}(T - t)],$$

где после преобразований, аналогичных преобразованиям для формулы (1),

$$(14)\ m_i^{\max}(t) = \min \begin{bmatrix} \max\limits_{j\in U_i^+} \max\limits_{t_j \leq t} \{\min(m_{ij}(t - t_j); m_j^{\max}(t_j))\}; \\ \min\limits_{j\in U_i^+} \max\limits_{t_j \leq t} \{\min(\max\limits_{t_{ij}\in[0;t-t_j]} (m_{ij}(t_{ij})); m_j^{\max}(t_j))\} \end{bmatrix};$$

$$(15)\ m_i^{Dt}(t) = \max_{t_i} \min[m_i^+(t + t_i,); m_i^-(t_i)].$$

В формулах (11), (14) при вычислении $\min\begin{bmatrix}\max\limits_j B_j(t)\\ \min\limits_j A_j(t)\end{bmatrix}$ для каждого допустимого j при фиксированном t происходит оптимизация по одной переменной при нахождении $B_j(t)$ и оптимизация по двум переменным при нахождении $A_j(t)$, что позволяет реализовать более простые и эффективные алгоритмы нахождения $m_i^-(t)$ и $m_i^{\max}(t)$.

Величину $m_i^{Dt}(0)\in[0;1]$ можно интерпретировать как степень принадлежности i-го события критическому пути, $i\in U$. Тогда при выполнении проекта первоочередное внимание должно уделяться событиям, у которых степени принадлежности критическому пути равны единице или близки к ней.

Рассмотрим иллюстративный пример нахождения функции принадлежности нечёткого критического пути для сети, представленной на рисунке 1.

$$m_{13}(t)=0.9\cdot\frac{1}{1+(t-6)^4}+0.5\cdot\frac{1}{1+(t-11)^4};$$

$$m_{02}(t)=0.9\cdot\left[\frac{1}{1+(t-2)^4}+\frac{1}{1+(t-6)^4}\right];$$

для остальных дуг $m_{ij}(t)=\dfrac{1}{1+(t-\tilde{t}_{ij})^4}$, где $\tilde{t}_{01}=1$; $\tilde{t}_{12}=4$; $\tilde{t}_{23}=3$.

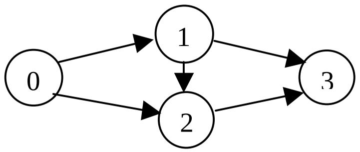

Рис. 1

На рисунках 2 и 3 изображены графики функций

$$m_{\max}(t)=\max_{j\in U_i^-}\max_{t_j+t_{ji}=t}[\min(m_{ji}(t_{ji});m_j^-(t_j))];$$

$$m_{\min}(t)=\min_{j\in U_i^-}\max_{t_j+t_{ji}\le t}[\min(m_{ji}(t_{ji});m_j^-(t_j))]$$

для вершины i = 2, а на рисунках 4 и 5 для вершины i = 3. На рис. 6 – 7 приведены графики $m_2^-(t)$ и $m_3^-(t)$ соответственно. В данном случае $m_T(t)=m_3^-(t)$.

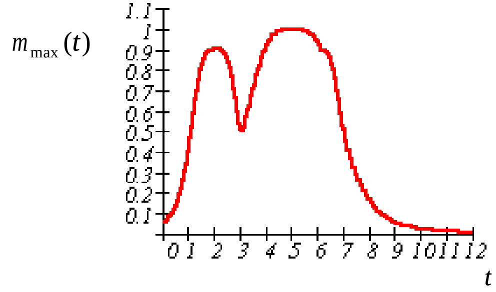

Рис. 2

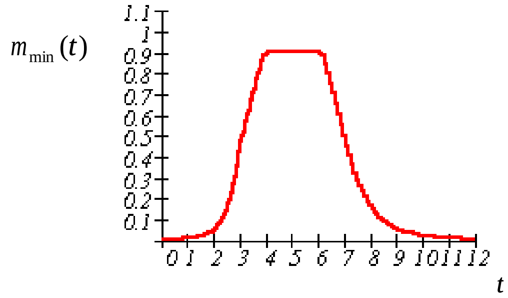

Рис. 3

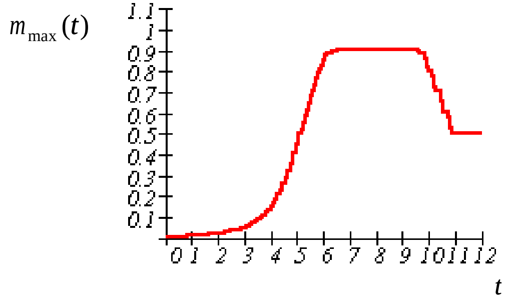

Рис. 4

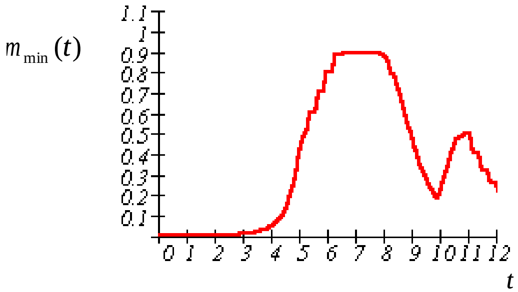

Рис. 5

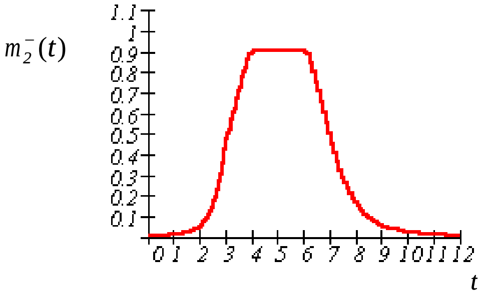

Рис. 6

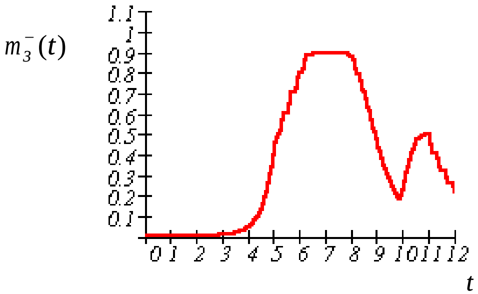

Рис. 7

Литература

1. БАЛАШОВ В.Г., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., ИВАЩЕНКО А.А., НОВИКОВ Д.А. *Механизмы управления организационными проектами*. М.: ИПУ РАН, 2003. – 84 с.

2. БУРКОВ В.Н., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., НОВИКОВ Д.А. *Теория графов в управлении организационными системами*. М.: Синтег, 2001. – 124 с.

3. БУРКОВ В.Н., ЛАНДА Б.Д., ЛОВЕЦКИЙ С.Е., ТЕЙМАН А.И., ЧЕРНЫШЕВ В.Н. *Сетевые модели и задачи управления*. М.: Советское радио, 1967. – 144 с.

4. ДЕБАЗЕЙ Г., КОФМАН А. *Сетевые методы планирования и их применение*. М.: Прогресс, 1968. –182 с.