# РЫНОЧНОЕ РАВНОВЕСИЕ В ЗАДАЧЕ ФОРМИРОВАНИЯ ТОРГОВОЙ СЕТИ

**Губко М.В.**
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
mgoubko@mail.ru

## *Введение*

Одной из характерных черт современной мировой экономики является глобализация рынков. Непрерывное развитие коммуникаций между странами и регионами в сочетании с увеличением темпов обмена новыми технологиями приводит к тому, что покупателям одного региона могут предлагаться близкие по своим потребительским свойствам товары, произведенные совершенно разными компаниями, расположенными зачастую весьма далеко от места продажи. При этом конкурентоспособность товара определяется уже не только себестоимостью его производства, но и транспортными, таможенными расходами, связанными с его доставкой к месту продажи.

Таким образом, путь от производителя товара к его потребителю становится таким сложным, что зачастую не может поддерживаться только силами самих производителей. В условиях глобализации производители просто не могут сами заниматься сбытом своей продукции непосредственным потребителям.

Это приводит к появлению разветвленных, многозвенных дилерских сетей, занимающихся распределением товара, его «донесением» до конечного потребителя. Структура этих сетей играет решающую роль в определении того, какие именно товары будут предлагаться на том или ином рынке, по сути, определяет конкурентоспособность товаров и объемы потребления в различных регионах.

Представление о закономерностях процессов формирования торговых сетей необходимо в первую очередь участникам этих сетей – производителям, дилерам, конечным продавцам, а также новым компаниям, ищущим свое место на рынке. Однако и государственные структуры, формирующие налоговое и таможенное законодательство, должны учитывать эти процессы для прогнозирования воздействия своих решений на экономику страны.



Задачу исследования процессов формирования торговых сетей осложняет то, что эти сети складываются под воздействием многих заинтересованных сторон, функционирующих в ситуации конфликта интересов. Действительно, любая коммерческая компания, нацеленная на максимизацию собственной прибыли, действуя в роли продавца, заинтересована в продаже товара по максимальной цене. Но она же, действуя в роли покупателя товара, заинтересована в приобретении товара по минимальным ценам. Таким образом, формирование каждой торговой связи между компаниями представляет собой компромисс, учитывающий альтернативные возможности компаний по продаже или закупке товара.

Модели формирования сетей между производителями, посредниками и потребителями рассматривались зарубежными учеными. При этом различные авторы придавали большее значение разным аспектам и мотивам формирования торговых сетей. Так, например, в работах К. Бэгвелла и Р. Стейджера [1, 2], С. Гойала и С. Йоши [3] , Т. Фурусавы и Х. Кониши [4], а также других ученых исследуются вопросы формирования структуры соглашений о беспошлинной торговле (сетей свободной торговли, free trade networks) между странами и влияние этой структуры на общественное благосостояние. На формирование сетей свободной торговли существенное влияние оказывают так называемые *экстерналии*, когда выигрыш, получаемый страной А от заключения соглашения со страной Б, зависит от количества других стран, имеющих соглашения о свободной торговле со страной Б. Влияние сетевых экстерналий более общей природы на процессы переговоров между экономическими субъектами исследовалось, например, в работе К. Куботы [5].

Среди других причин образования торговых сетей называются издержки, связанные с получением и переработкой информации о поставщиках и покупателях. В статье С. Гуриева, И. Поспелова и М. Шаховой [6] исследуются процессы самообразования торговых сетей в экономиках с несовершенной инфраструктурой. В статье Р.

Крэнтон и Д. Майнхарт [7] рассматривается модель формирования торговых соглашений между поставщиками и покупателями, исследуется эффективность экономики, в которой свободная конкуренция ограничивается этими соглашениями.

Однако к данной работе большее отношение имеют статья [8] Х. Кониши и работа [9] Р. Джохари, Ш. Мэннор, и Дж. Тситсиклиса, в которых основной причиной формирования торговых сетей считаются транспортные расходы по перемещению товара от поставщиков к потребителям.

В настоящей статье исследуется модель формирования торговых сетей между географически распределенными компаниями-агентами, которые могут производить товар, продавать его на «своем» рынке или перепродавать другим компаниям, неся при этом транспортные издержки.

Основные задачи, решаемые в рамках данной модели, заключаются, во-первых, в поиске эффективных торговых сетей – сетей, максимизирующих совокупную прибыль агентов. Далее исследуется коалиционная модель взаимодействия агентов, позволяющая обосновать возможность устойчивого существования эффективной сети в условиях конфликта интересов агентов. Также обсуждается возможность реализации эффективных сетей с помощью некооперативной игры агентов, когда их действия считаются независимыми.

И, наконец, намечаются перспективы развития рассматриваемой модели формирования торговой сети.

### 1. Модель торговой сети

Рассмотрим множество $N=\{1,...n\}$ компаний (агентов), находящихся в различных географических регионах и занимающихся производством и продажей одного вида продукции[1]. Каждая компания $i \in N$ может производить товар в объеме $m_i \geq 0$. Себестоимость производства объема товара $m_i$ описывается гладкой выпуклой возрастающей функцией $c_i(m_i)$. Компания может продавать товар в своем регионе в объеме $s_i \geq 0$, получая доход $r_i(s_i)$. Функция $r_i(s_i)$ считается гладкой вогнутой. Кроме того, любая компания $i \in N$ может продавать товар другой компании $j \in N, j \neq i$ в объеме $v_{ij} \geq 0$. Цену передачи единицы товара $j$-й компании от $i$-й компании обозначим $p_{ij}$. В рассматриваемой модели цены $p_{ij}$ договорные, то есть являются результатом некоторых переговоров между компаниями.

Передача товара от $i$-й компании $j$-й в объеме $v_{ij}$ влечет транспортные расходы, описываемые гладкой выпуклой возрастающей функцией $t_{ij}(v_{ij}) \geq 0$. Для простоты будем считать, что транспортные расходы оплачивает компания, принимающая товар. Тогда чистый доход $i$-й компании от продажи товара $j$-й компании равен $p_{ij}v_{ij}$, а затраты $j$-й компании по приобретению единицы товара у $i$-й компании равны $p_{ij}v_{ij}+t_{ij}(v_{ij})$.

Если у некоторой компании $i \in N$ есть возможность продать товар компании $j \in N$ более выгодно, чем на внутреннем рынке, и $j$-й компании выгодно приобретать товар у $i$-й компании, то они могут заключить соглашение о поставке товара. Таким образом, формируется *торговая сеть* – набор направленных связей, соглашений между компаниями о поставке товара. В соответствии с этими соглашениями товар, произведенный одними агентами, передается между агентами до места своей продажи конечному потребителю.

Итак, торговая сеть $g$ представляет собой направленный граф, вершинами которого являются агенты, а каждой из дуг приписаны неотрицательные веса $v_{ij}$, $p_{ij}$ (соответственно, объем и цена товара, передаваемого от $i$-го агента $j$-му). Чтобы торговая сеть полностью описывала экономическую ситуацию, в определение сети необходимо включить вектора объемов $m=(m_i)_{i\in N}$ производства агентов и объемов продаж $s=(s_i)_{i\in N}$. Таким образом, торговая сеть полностью описывается матрицей объемов $v=(v_{ij})_{i\in N,\, j\neq i}$, матрицей

[1] *Содержательные интерпретации данной модели перечислены в* [*11*].

цен $p = (p_{ij})_{i,\, j \in N, i \neq j}$ , векторами производства $m = (m_i)_{i \in N}$ и продаж $s = (s_i)_{i \in N}$ .

Для каждого агента $i \in N$ должен выполняться товарный баланс закупок и продаж:

(1) $j_i(.) := \sum_{j \neq i} v_{ij} + s_i - \sum_{j \neq i} v_{ji} - m_i = 0$ .

Выполнение товарного баланса означает, что объем продаж $i$-го агента равен сумме его объемов закупки и объема производства.

Прибыль $i$-й компании в торговой сети $g =< v, p, m, s >$ представляет собой разность дохода от продажи товара и затрат по его приобретению или производству.

(2) $f_i(.) = r_i(s_i) + \sum_{j \neq i} p_{ij} v_{ij} - c_i(m_i) - \sum_{j \neq i} [p_{ji} v_{ji} + t_{ji}(v_{ji})]$ .

<u>Пример 1.</u> Можно привести много экономических примеров торговых сетей. Так, крупнейшие производители электроники располагаются в регионе юго-восточной Азии. Объемы их производства во много раз превышают потребности местных рынков – основное производство ведется на экспорт. При этом весьма редкой является ситуация, в которой производитель заключает договора купли-продажи с непосредственными потребителями. Покупателями являются крупные дилеры, которые берут на себя транспортные расходы по перевозке товара, скажем, в центральный регион России. Там товар реализуется региональным дилерам, которые распределяют его по торговым точкам, где его приобретают конечные потребители.

Другим примером может служить нефтегазовая отрасль. Добывающие компании реализуют нефть компаниям, владеющим транспортными сетями, которые, в свою очередь, заключают договоры с потребителями или переработчиками.

## *2. Эффективные торговые сети*

Определение 1. Торговая сеть $g =< v, p, m, s >$ *эффективна*, если при заданных условиях задачи (функциях дохода $r_i(.)$ , себестоимости $c_i(.)$ и транспортных издержек $t_{ij}(.)$ , $i, j \in N, j \neq i$ ) она максимизирует суммарную прибыль агентов $f(g) := \sum_{i \in N} f_i(g)$ .



Выражение для суммарной прибыли можно упростить, исключив из него слагаемые, связанные с взаиморасчетами агентов между собой:

(3) $f(g) = \sum_{i \in N} \{r_i(s_i) - c_i(m_i) - \sum_{j \neq i} t_{ji}(v_{ji})\}$ .

Отметим, что в выражение для суммарной прибыли не входят цены передачи товара между агентами.

Задача поиска эффективной сети сводится к максимизации вогнутой функции (3) по параметрам торговой сети при $n$ ограничениях товарного баланса (1) и требованиях неотрицательности всех переменных, что представляет собой стандартную задачу выпуклого программирования [10].

Запишем Лагранжиан для этой задачи:

(4) $$\begin{aligned}&\Phi(g) = f(g) - \sum_{i \in N} l_i j_i(g) = \\ &= \sum_{i \in N} [r_i(s_i) - c_i(m_i) - \sum_{j \neq i} t_{ji}(v_{ji}) - l_i(\sum_{j \neq i} v_{ij} + s_i - \sum_{j \neq i} v_{ji} - m_i)].\end{aligned}$$

Условия Куна-Таккера первого порядка выглядят следующим образом:

(5) $\dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial s_i} = r_i'(s_i) - l_i \leq 0$ , $\dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial s_i} s_i = 0$ , для всех $i \in N$ ,

(6) $\dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial m_i} = -c_i'(m_i) + l_i \leq 0$ , $\dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial m_i} m_i = 0$ , для всех $i \in N$ ,

(7) $\dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial v_{ji}} = -t_{ji}'(v_{ji}) - l_j + l_i \leq 0$ , $\dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial v_{ji}} v_{ji} = 0$ , $i \in N$ , $j \neq i$ .

(8) $\dfrac{\partial \Phi(x)}{\partial l_i} = 0$ , то есть $\sum_{j \neq i} v_{ij} + s_i - \sum_{j \neq i} v_{ji} - m_i = 0$ для всех $i \in N$ .

Решая получившуюся систему уравнений (5)-(8), можно найти параметры эффективной торговой сети: вектор объемов производства $m^*$, вектор продаж $s^*$, матрицу объемов транспортировки $v^*$. Также в результате решения этой системы получаем вектор $l^* = (l_i^*)_{i \in N}$ множителей Лагранжа, называемых еще теневыми ценами (shadow prices) [10]. Как будет показано в следующем разделе, эти множители имеют непосредственное отношение к реальным ценам передачи товара, устанавливающимися между агентами.

Пример 2. Если мы наложим дополнительные ограничения на функции, а именно, предположим, что $r_i'(0)=+\infty$, $c_i'(0)=0$, $t_{ij}'(0)=0$, $i\in N$, $j\neq i$, то задача поиска эффективной сети имеет внутреннее решение, в котором все объемы производства и продаж строго положительны. Разрешим отрицательные объемы транспортировки, положив $t_{ij}(-x)=t_{ji}(x)$.

В этом случае система уравнений (5)-(8) существенно упрощается, преобразуясь к виду:

$\dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial s_i}=r_i'(s_i)-l_i=0$ для всех $i\in N$,

$\dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial m_i}=-c_i'(m_i)+l_i=0$ для всех $i\in N$,

$\dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial v_{ij}}=-t_{ij}'(v_{ij})-l_i+l_j=0$ для всех $i\in N$, $j\neq i$,

$\sum_{j\neq i}v_{ij}+s_i-\sum_{j\neq i}v_{ji}-m_i=0$ для всех $i\in N$.

Из этой системы немедленно получаем, что для каждого агента предельная доходность его внутренних продаж должна равняться предельным издержкам производства:

(9) $c_i'(m_i)=r_i'(s_i)=l_i$ для всех $i\in N$.

Кроме того, имеем следующее условие на объемы транспортировки:

(10) $t_{ij}'(v_{ij})=l_j-l_i=c_j'(m_j)-c_i'(m_i)$.

Выразим объемы производства и транспортировки через объемы продаж:

(11) $m_i=[c_i']^{-1}(r_i'(s_i))$, $v_{ij}=[t_{ij}']^{-1}(r_j'(s_j)-r_i'(s_i))$.

Здесь $[c_i']^{-1}(.)$, $[t_{ij}']^{-1}(.)$ – это обратные отображения от производных функций $c_i(.)$, $t_{ij}(.)$ соответственно. В силу строгой монотонности производных эти обратные отображения будут однозначными. Таким образом, неизвестными остались только $n$ объемов продаж. Подставляем выражения (11) в уравнения (9), (10), и получаем систему $n$ нелинейных уравнений относительно $n$ неизвестных. Ее решение и дает эффективную торговую сеть. •



Пример 3. Рассмотрим двух агентов. Пусть $r_i(s_i)=2r_i\sqrt{s_i}$, $c_i(m_i)=c_im_i^2/2$, $t_{ij}(v_{ij})=v_{ij}^2/2t_{ij}$.

Положим $c_1=1, c_2=2, r_1=1, r_2=1, t_{12}=t_{21}=1$.

Аналогично примеру 2, выразим все переменные через объемы производства. Получим следующую систему:

$(r_i/c_im_i)^2=m_i+2\sum_{j\neq i}t_{ij}(c_im_i-c_jm_j)$ для $i=1,2$.

Численное решение этой системы дает объемы производства $m_1^*=1.288$, $m_2^*=0.816$. Поскольку $s_i=(r_i/c_im_i)^2$, $v_{ij}=t_{ij}(c_jm_j-c_im_i)$, $l_i=c_im_i$, можно вычислить $s_1^*=0.602, s_2^*=1.502$, $l_1^*=1.289$, $l_2^*=1.632$. Итого, торговая сеть выглядит следующим образом: Первый агент производит товар в объеме $m_1^*=1.288$, часть его (в объеме $s_1^*=0.602$) продает на своем рынке (с маргинальной доходностью $l_1^*=1.289$), остаток (в объеме $v_{12}^*=0.686$) продает второму агенту. Второй агент производит товар в объеме $m_2^*=0.816$, еще докупает у первого агента (в объеме $v_{12}^*=0.686$). Весь товар он продает на своем рынке (с маргинальной доходностью $l_2^*=1.632$). Также он несет транспортные расходы по перевозке товара. •

## *3. Ценообразование в торговых сетях*

Итак, в предыдущем разделе показано, каким образом находится эффективная торговая сеть. Однако, поскольку в выражение для суммарной прибыли не входят цены передачи товара, эти цены должны определяться из других соображений.

Заметим, что рассматриваемая модель формирования торговой сети представляет собой, по сути, классический рынок с производством [10]. В подобных моделях считается, что товар, находящийся в различных географических точках, представляет собой, на самом деле, разные товары, с разными, в общем случае, ценами. Так, в нашей модели, имеется $n$ регионов, и, следовательно, $n$ товаров с $n$ различными ценами.

На классическом рынке существует точка рыночного равновесия (равновесия Вальраса) – набор цен на товары, при которых спрос равен предложению. При этом показывается [10], что в точке равновесия экономика эффективна, то есть при данных ценах достигается максимум суммарной прибыли агентов, каждый из которых стремится максимизировать собственную прибыль.

В рамках нашей модели это означает, что существует набор цен передачи товара между агентами, при которых максимум прибыли каждого отдельного агента достигается на эффективной сети.

Покажем, что найденные в процессе поиска эффективной сети теневые цены $l^* = (l_i^*)_{i\in N}$ и представляют собой равновесные по Вальрасу цены в модели формирования торговой сети. Для этого мы будем считать, что все цены $p_{ij}$ передачи товара от $i$-го агента другим агентам сети равны между собой и совпадают с теневыми ценами: $p_{ij} = l_i^*$.

**Утверждение 1.** При фиксированных ценах $p_{ij} := l_i^*$ максимум прибыли произвольного агента (при условии выполнения товарного баланса) достигается на эффективной сети $m_i^*$, $s_i^*$, $v_{ij}^*$.

Доказательство: Задача $i$-го агента состоит в том, чтобы максимизировать свою прибыль

$$f_i = r_i(s_i) - c_i(m_i) + l_i^* \sum_{j\neq i} v_{ij} - \sum_{j\neq i} [l_j^* v_{ji} + t_{ji}(v_{ji})]$$

при условии выполнения товарного баланса и неотрицательных объемах.

Запишем Лагранжиан $F_i(.) = f_i(.) - m_i j_i(.)$ с коэффициентом Лагранжа $m_i$.

Запишем для этой задачи условия Куна-Таккера:

(12) $r_i'(s_i) - m_i \le 0$, $(r_i'(s_i) - m_i)s_i = 0$,

(13) $m_i - c_i'(m_i) \le 0$, $(m_i - c_i'(m_i))m_i = 0$,



(14) $m_i - l_j^* - t_{ji}'(v_{ji}) \le 0$, $(m_i - l_j^* - t_{ji}'(v_{ji}))v_{ji} = 0$, $j \neq i$.

(15) $\sum_{j\neq i} v_{ij} + s_i - \sum_{j\neq i} v_{ji} - m_i = 0$.

(16) $m_i = l_i^*$ или ($m_i \le l_i^*$ и $v_{ij} = 0$), $j \neq i$.

Если зафиксировать $m_i = l_i^*$, то окажется, что система (12)-(15) является частью системы (5)-(8), относящейся к $i$-му агенту. Значит, поскольку объемы $m_i^*$, $s_i^*$, $v_{ij}^*$ в сочетании с ценой $l_i = l_i^*$ удовлетворяют условиям (5)-(8), то она удовлетворяет и условиям (12)-(15) при $m_i = l_i^*$, и максимум целевой функции агента достигается при эффективной торговой сети. •

Таким образом, существуют цены, при которых формирование эффективной сети становится целью каждого отдельного агента, формируется эффективная сеть $m_i^*$, $s_i^*$, $v_{ij}^*$ и каждый агент получает прибыль

$$f_i^* := r_i(s_i^*) - c_i(m_i^*) + l_i^* \sum_{j\neq i} v_{ij}^* - \sum_{j\neq i} [l_j^* v_{ji}^* + t_{ji}(v_{ji}^*)].$$

Однако возникает вопрос – будут ли все группы агентов (коалиции) довольны получаемой ими в рыночном равновесии прибылью? Ведь может найтись группа агентов, которые получат «слишком мало», посчитают себя на этом рынке обделенными, и сформируют другой рынок, только внутри своей группы. Таким образом, при дележе суммарной прибыли между агентами должна учитываться сила коалиций. Эта идея формализуется в *теории кооперативных игр* [32] с помощью понятия характеристической функции игры и $C$-ядра кооперативной игры.

Определение 2. *Характеристической функцией* игры $n$ лиц называется вещественнозначная функция $v(T)$, определенная на подмножествах $T \subset N$, такая, что $v(\emptyset)=0$.

Характеристическая функция определяет выигрыш, получаемый коалицией агентов $T \subset N$ (если такая коалиция образовалась) при рациональных действиях ее участников.

Очевидно, что в рассматриваемой задаче цель произвольной коалиции агентов заключается в максимизации суммарной прибыли ее участников. При этом понятно, что участники коалиции не могут рассчитывать на благожелательность агентов, не входящих в коалицию. Скорее коалиции следует рассчитывать на полную изоляцию со стороны остальных агентов. Таким образом, коалиция максимизирует прибыль своих участников при условии, что товар может передаваться только между участниками коалиции.

Суммарная прибыль участников коалиции $T$ определяется выражением:

$f_T(.) = \sum_{i\in T}\{r_i(s_i) - c_i(m_i) - \sum_{j\in T\setminus\{i\}} t_{ji}(v_{ji})\}$ ,

и задача коалиции состоит в том, чтобы максимизировать суммарную прибыль при условиях выполнения товарных балансов участников коалиции.

Определение 3. Дележом кооперативной игры называется распределение выигрыша максимальной коалиции (коалиции из всех агентов) между агентами, то есть дележ представляет собой некоторый вектор $(f_i)_{i\in N}$, такой, что $v(N) = \sum_{i\in N} f_i$ .

Так, например, вектор прибылей агентов в рыночном равновесии является дележом, поскольку сумма их прибылей дает суммарную прибыль всех агентов в эффективной сети, на которой и достигается максимум суммарной прибыли всех агентов.

Определение 4. $C$-ядром называется множество дележей, для которых для любой коалиции $T\subset N$ $v(T) \le \sum_{i\in T} f_i$ .

Таким образом, если дележ принадлежит $C$-ядру, ни одна коалиция не может гарантировать своим участникам прибыль, большую той, что они получают при этом дележе. Следовательно, наличие хотя бы одного дележа из $C$-ядра гарантирует, что агенты не будут «откалываться» от максимальной коалиции.

**Утверждение 2.** Дележ, определяемый рыночным равновесием, принадлежит $C$-ядру кооперативной игры агентов.

Доказательство. Предположим, что равновесные прибыли $(f_i^*)_{i\in N}$ не принадлежат $C$-ядру. Тогда, по определению $C$-ядра, должна существовать такая коалиция $T \subset N$ , что $\sum_{i\in T} f_i^* < v(T)$ .

Правая часть этого неравенства имеет вид

(17) $v(T) = \max\limits_{\substack{s_i, m_i, v_{ji},\\ i\in T,\, j\in T\setminus i}} \sum_{i\in T} f_i = \max\limits_{\substack{s_i, m_i, v_{ji},\\ i\in T,\, j\in T\setminus i}} \sum_{i\in T}[r_i(s_i) - c_i(m_i) - \sum_{j\in T\setminus i} t_{ji}(v_{ji})]$



при условиях выполнения товарных балансов

$j_i(.) = \sum_{j\ne i} v_{ij} + s_i - \sum_{j\ne i} v_{ji} - m_i = 0$ для всех $i \in T$ .

Поскольку $j_i(.) = 0$ для всех $i \in T$ , то и $\sum_{i\in T} l_i^* j_i(.) \equiv 0$ . Подставим этот тождественный ноль в максимизируемую функцию:

$$v(T) = \max_{\substack{s_i, m_i, v_{ji},\\ i\in T,\, j\in T\setminus i}} \sum_{i\in T}[f_i + l_i^* j_i(.)] =$$

$$\max_{\substack{s_i, m_i, v_{ji},\\ i\in T,\, j\in T\setminus i}} \sum_{i\in T}[(r_i(s_i) - l_i^* s_i) - (c_i(m_i) - l_i^* m_i) -$$

$$- \sum_{j\in T\setminus i}\{t_{ji}(v_{ji}) - (l_i^* - l_j^*) v_{ji}\}]$$

при условиях выполнения товарных балансов

$$j_i(.) = \sum_{j\ne i} v_{ij} + s_i - \sum_{j\ne i} v_{ji} - m_i = 0,\ i \in T .$$

Максимум суммы не превышает суммы максимумов. Кроме того, максимум с ограничениями товарного баланса не превышает максимума без ограничений. Далее, максимум по всем $v_{ij}$ таким, что $i \in T$ , $j \in T \setminus i$ не превышает максимума по всем $v_{ij}$ таким, что $i \in N$ , $j \in N \setminus i$ .

Значит,

$$v(T) \le \sum_{i\in T} \max_{\substack{s_i, m_i,\\ v_{ji}: j\ne i}} [(r_i(s_i) - l_i^* s_i) - (c_i(m_i) - l_i^* m_i) - \tag{18}$$

$$- \sum_{j\ne i}\{t_{ji}(v_{ji}) - (l_i^* - l_j^*) v_{ji}\}].$$

Но легко видеть, что[1] функции в правой части этого неравенства достигают максимума в точке рыночного равновесия. Значит, $v(T) \le \sum_{i\in T} f_i^*$ , что противоречит предположению. •

<u>Пример 4.</u> В условиях предыдущего примера найдем равновесные рыночные цены и покажем, что распределение прибыли в рыночном равновесии является одной из точек $C$-ядра. Как отмечено выше, в этом примере коэффициенты Лагранжа $l_1^* = 1.289$ ,

---

[1] *в рамках сделанных предположений относительно выпуклости функций себестоимости и транспортных расходов, вогнутости функции дохода.*

$l_2^* = 1.632$. Следовательно, первый агент будет продавать второму товар по цене $p_{12} = 1.289$. При этом прибыли агентов: $f_1^* = 1.61$, $f_2^* = 3.35$.

Так как агентов всего двое, для проверки того, что прибыли в рыночном равновесии принадлежат *C*-ядру, необходимо лишь проверить, что $f_1^* \geq v(\{1\})$, $f_2^* \geq v(\{2\})$. В одиночку выигрыши агентов равны, как легко посчитать, v({1}) = 1.50, v({2}) = 3.00. Следовательно, дележ $f_1^* = 1.61$, $f_2^* = 3.35$ принадлежит *C*-ядру, игры агентов. •

Заметим, что условия выпуклости функций затрат и вогнутости функций доходов являются существенными. Действительно, можно привести пример игры агентов, в которой *C*-ядро будет пустым, то есть не будет содержать ни одного дележа.

Пример 5. Рассмотрим трех агентов. Положим транспортные расходы равными нулю. Функции доходов агентов линейные с ограничением $S_i$ на максимальный объем продаж:

$$r_i(s_i) = \begin{cases} r_i s_i;\ s_i \leq S_i \\ r_i S_i;\ s_i > S_i \end{cases}.$$

Себестоимость производства любого положительного объема товара постоянна, причем имеется ограничение $M_i$ на максимальный объем производства:

$$c_i(m_i) = \begin{cases} 0; & m_i = 0 \\ c_i; & 0 < m_i \leq M_i \\ +\infty; & m_i > M_i \end{cases}$$

Агенты все одинаковые. Каждый агент может продать не более одной единицы товара в своем регионе по цене 1. Каждый агент может произвести не более двух единиц товара, причем любой положительный объем производства стоит 1. Построим характеристическую функцию игры агентов. Выигрыш коалиции из одного агента равен 0, так как доход агента от продаж на своем рынке не превышает 1, что не покрывает издержек производства. Выигрыш коалиции из двух агентов равен 1: один агент производит 2 едини-



цы товара, которые продаются на двух рынках, доход равен 2, себестоимость равна 1.

Рассмотрим коалицию трех агентов. Совокупный доход равен 3 при продаже 3-х единиц товара на всех рынках. При этом затраты равны 2. Доход равен 2 при продаже 2-х единиц товара, затраты равны 1. Продавая одну единицу товара, получим доход 1 при затратах 1. Значит, выигрыш коалиции всех агентов также равен 1. По теореме Бондаревой [13] критерий непустоты *C*-ядра для игры трех агентов имеет вид:

$v(12) + v(13) + v(23) \leq 2v(123)$. Очевидно, это условие не выполнено, и, значит, *C*-ядро пусто. •

### *4. Заключение*

Итак, задача формирования торговой сети была сведена к классической задаче о рынке, было найдено рыночное равновесие, показана его эффективность и коалиционная устойчивость.

Стоит отметить, что полученные выше результаты без труда обобщаются на случай многотоварной экономики. В этом случае все объемы производства, продаж и транспортировки превращаются в вектора, каждая компонента которых соответствует своему товару.

В то же время, существование рыночного равновесия в задаче формирования торговой сети ничего не говорит о том, каким именно образом агенты в процессе переговоров могут реализовать это равновесие. Для решения этой задачи необходимо предложить такой протокол переговоров агентов – последовательность их ходов, форму и содержание сообщений, которыми они будут обмениваться (скажем предложения цены передачи товара или заявки на требуемый объем товара) – который бы приводил к реализации рыночного равновесия, как исхода соответствующей этому протоколу некооперативной игры агентов.

Вопросы реализации рыночного равновесия некооперативной игрой широко освещались в литературе (см. например ссылки в обзоре М. Джексона [14]). Адаптация рассматриваемых там механизмов к задаче формирования торговой сети представляется перспективной задачей.

Рассмотренная выше модель допускает многочисленные обобщения. Так, например, можно «отделить» агентов от конкретных географических регионов, позволив им приобретать и транспортировать товар в любом регионе (хотя и с разными транспортными расходами). Задача поиска эффективной сети для подобной модели в линейном случае рассматривалась в [15].

В этой же работе рассматривалось влияние налогов на формирование торговой сети. Введение в рассмотрение налогов, которыми могут облагаться агенты, весьма усложняет как задачи поиска эффективной сети, так и поиска рыночного равновесия. Это связано с тем, что цены передачи товара между агентами уже не могут служить инструментом перераспределения между ними прибыли, а подчинены задачам минимизации налогообложения.

Тем не менее, введение в модель формирования сети налогов позволит на ее основе формулировать задачи выработки эффективной налоговой политики – задачи управления.

## Литература

1. K. Bagwell, R.W. Staiger. *Multilateral Tariff Cooperation during the Formation of Customs Unions* // Journal of International Economics 42, 1997. pp. 91-123.
2. K. Bagwell, R.W. Staiger. *Multilateral Tariff Cooperation during the Formation of Free Trade Areas* // International Economic Review 38, 1997. pp. 291-319.
3. S. Goyal, S. Joshi. *Bilateralism and Free Trade*. Unpublished manuscript, 2001.
4. T. Furusawa, H. Konishi. *Free trade networks*. Unpublished manuscript, 2002.
5. K. Kubota. *Trade negotiation in the presence of network externalities*. Papers of World Bank Country Economics Department, 1999.
6. S. Guriev, I. Pospelov, M. Shakhova. *Self-organization of Trade Networks in an Economy with Imperfect Infrastructure*. Series “Computing in Economics and Finance” of Society of Computational Economics,



1996.
7. R. Kranton, D. Minehart. *A theory of Buyer-Seller Networks*. Unpublished manuscript. 2000.
8. H. Konishi. *Uniqueness of User Equilibrium in Transportation Networks with Heterogeneous Commuters.* Unpublished manuscript. 2002.
9. Johari R., S. Mannor, J. Tsitsiklis. *A Contract-Based Model for Directed Network Formation*. Unpublished manuscript. 2003.
10. Интриллигатор М. *Математические методы оптимизации и экономическая теория*. М.: Прогресс, 1975. - 606 с.
11. Губко М.В. *Теоретико-игровая модель формирования торговой сети*. / Сборник трудов молодых ученых «Управление большими системами». М.: ИПУ РАН, 2004. Выпуск 4.
12. Губко М.В., Новиков Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами*. М.: Синтег, 2002. – 148 с.
13. Бондарева О.Н. *Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр* / Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 119 – 140. Физматгиз.
14. M. O. Jackson. *Crash Course on Implementation Theory*. Social Science Working Paper 1076. California Institute of Technology. 1997.
15. Губко М.В. *Модель формирования бизнес-схем в транснациональных корпорациях* // Системы управления и информационные технологии. 2003. 1-2(12). С. 44-48.