РЕФЛЕКСИВНАЯ ИГРА «АККОРДНАЯ ОПЛАТА ТРУДА»

А.Г. Чхартишвили

(*МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва*)

alexch@spa.msu.ru

Рассмотрим организационную систему, состоящую из центра и *n* агентов, осуществляющих совместную деятельность. Стратегией *i*-го агента является выбор действия y_i Î $A_i = \Re^1_+$, *i* Î *N*, стратегией центра – выбор системы стимулирования, определяющей размер вознаграждения каждого агента в зависимости от результата их совместной деятельности. Предположим, что технология взаимодействия агентов такова, что для достижения требуемого результата необходимо, чтобы сумма их действий была не меньше заданной величины *q* Î *W*. В этом случае *i*-й агент получает от центра фиксированное вознаграждение s_i, *i* Î *N*, в случае же $\sum_{i \in N} y_i < q$ вознаграждения всех агентов равны нулю.

Выбор действия y_i ³ *0* требует от *i*-го агента затрат $c_i(y, r_i)$, где $r_i > 0$ – его тип (параметр, описывающий индивидуальные характеристики), *i* Î *N*.

Относительно функций затрат агентов предположим, что $c_i(y, r_i)$ – непрерывная возрастающая по y_i и убывающая по r_i функция, причем " y_{-i} Î $A_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} A_j$, " $r_i > 0$ $c_i(0, y_{-i}, r_i) = 0$, *i* Î *N*.

Описанную модель взаимодействия будем далее называть игрой «Аккордная оплата труда».

Определим множество индивидуально рациональных действий агентов: *IR* = {*y* Î $A' = \prod_{i \in N} A_i$ | " *i* Î *N* s_i ³ $c_i(r_i)$}.

В случае, если затраты агентов сепарабельны, то есть затраты $c_i(y_i, r_i)$ каждого агента зависят только от его собственных действий и не зависят от действий других агентов, получаем, что $IR = \prod_{i \in N} [0; y_i^+]$, где y_i^+ = max {y_i ³ *0* | $c_i(y_i, r_i)$ £ s_i}, *i* Î *N*.

Обозначим *Y*(*q*) = {*y* Î *A'* | $\sum_{i \in N} y_i = q$}, $Y^*(q)$ = Arg $\min_{y \in Y(q)} \sum_{i \in N} c_i(y, r_i)$.

Рассмотрим последовательно различные варианты информированности агентов о значении параметра *q* Î *W*. Как мы увидим, даже небольшое усложнение структуры информированности может существенно изменить множество информационных равновесий рассматриваемой рефлексивной игры [1].

Вариант I. Предположим, что значение *q* Î *W* является общим знанием. Тогда равновесием игры агентов является параметрическое равновесие Нэша, принадлежащее множеству равновесий Нэша:

(1) $E_N(q)$ = *IR* Ç *Y*(*q*).

Определим также множество эффективных по Парето действий агентов:

(2) *Par*(*q*) = *IR* Ç $Y^*(q)$.

Так как " *q* Î *W* $Y^*(q)$ Í *Y*(*q*), то из (1) и (2) следует, что множество эффективных по Парето действий является одним из равновесий Нэша. Но множество равновесий Нэша может оказаться шире – в частности, при *q* ³ $\max_{i \in N} y_i^+$ оно всегда содержит вектор нулевых действий.

Пусть функции затрат агентов являются функциями затрат типа Кобба-Дугласа: $c_i(y_i, r_i) = r_i$ *j* (y_i / r_i), где *j* (×) – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, удовлетворяющая *j* (*0*) = *0*.

Тогда эффективной по Парето является единственная точка: $y^*(q)$ = { $y_i^*(q)$}, где $y_i^*(q) = q\, r_i / \sum_{j \in N} r_j$, *i* Î *N*.

Вычислим $y_i^+ = r_i$ $j^{-1}(s_i / r_i)$, *i* Î *N*, тогда при

(3) s_i ³ r_i *j* $(q / \sum_{j \in N} r_j)$, *i* Î *N*,

множество Парето не пусто.

Множества равновесий Нэша в игре *n* = *2* агентов для двух значений *q*: $q_2 > q_1$ приведены на рисунке 1 (точка (*0*; *0*) является равновесием Нэша в обоих случаях).

Итак, мы рассмотрели простейший вариант информированности агентов, соответствующий ситуации, когда значение параметра *q* Î *W* является общим знанием. Рассмотрим следующий (в порядке возрастания сложности структуры информированности агентов) вариант информированности, в рамках которого общим знанием являются индивидуальные представления $\{q_i\}$ агентов о значении параметра q Î W.

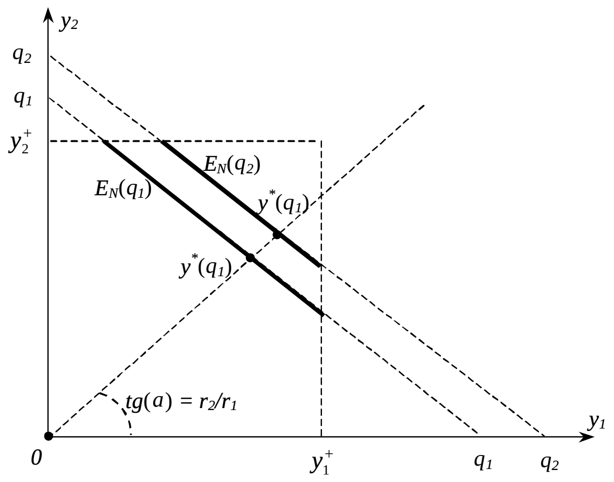

Рис. 1. Параметрическое равновесие Нэша игры агентов

<u>Вариант II.</u> Предположим, что представления агентов о неопределенном параметре попарно различны (и при этом являются общим знанием). Не ограничивая общности, занумеруем агентов таким образом, чтобы их представления возрастали: $q_1 < \ldots < q_n$. Структура возможных равновесий в этой ситуации описывается следующим утверждением.

<u>Утверждение 1.</u> В игре «Аккордная оплата труда», для которой $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$, равновесными (в зависимости от соотношения между параметрами) могут быть следующие $(n + 1)$ исходов: $\{y^* \mid y_i^* = 0, i \in N\}$; $\{y^* \mid y_k^* = q_k ,\ y_i^* = 0, i \in N, i \neq k\}, k \in N$. Содержательно это означает следующее: либо никто не работает, либо работает один k-й агент, выбирая действие q_k.

Доказательство утверждения 1. Пусть вектор действий $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ является равновесием (очевидно, при этом

$y_i^* \leq y_i^+$ для любого i Î N). Пусть существует такое $k \in N$, что $y_k^* > 0$. Покажем, что в этом случае $\sum_{i \in N} y_i^* = q_k$.

Действительно, если $\sum_{i \in N} y_i^* < q_k$, то k-й агент не рассчитывает на получение вознаграждения и, следовательно, может увеличить свой (субъективно ожидаемый) выигрыш с отрицательного до нулевого, выбрав нулевое действие. Если же $\sum_{i \in N} y_i^* > q_k$, то k-й агент рассчитывает на получение вознаграждения, однако он может увеличить свой выигрыш, выбрав вместо y_k^* действие $\max\{0, q_k - \sum_{i \in N \setminus \{k\}} y_i^*\} < y_k^*$. Таким образом, при $\sum_{i \in N} y_i^* \neq q_k$ k-й агент может увеличить свой выигрыш, что противоречит равновесности вектора y^*.

Мы показали, что, если $y_k^* > 0$, то $\sum_{i \in N} y_i^* = q_k$. Но в силу условия $q_i \neq q_j$, $i \neq j$, это равенство может выполняться лишь для одного $k \in N$. Поэтому если $y_k^* > 0$, то $y_i^* = 0$ для всех $i \neq k$. При этом, очевидно, $y_k^* = q_k$. Утверждение 1 доказано.

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких соотношениях между параметрами q_i, y_i^+, $i \in N$, реализуется каждое из равновесий, перечисленных в формулировке утверждения 1.

Вектор $(0, \ldots, 0)$ является равновесным в случае, когда никакой i-й агент не может собственными усилиями выполнить достаточную (с его точки зрения) для получения вознаграждения работу (либо это усилие составляет в точности y_i^+, так что выигрыш i-го агента остается нулевым). Это условие формально записывается следующим образом: $y_i^+ \leq q_i$ для любого i.

Вектор $\{y^* \mid y_k^* = q_k ,\ y_i^* = 0, i \neq k\}$ является равновесным, если $q_k \leq y_k^+$, а все агенты с номерами $i > k$, считая, что вознаграждения не будет, являются недостаточно эффективными, чтобы собственными усилиями компенсировать величину $q_i - q_k$. Формально: $q_k + y_i^+ \leq q_i$ для любого $i > k$.

Возможные равновесия в игре двух агентов изображены на рисунке 2. Заметим, что, в отличие от варианта I, существует область, в которой равновесие отсутствует.

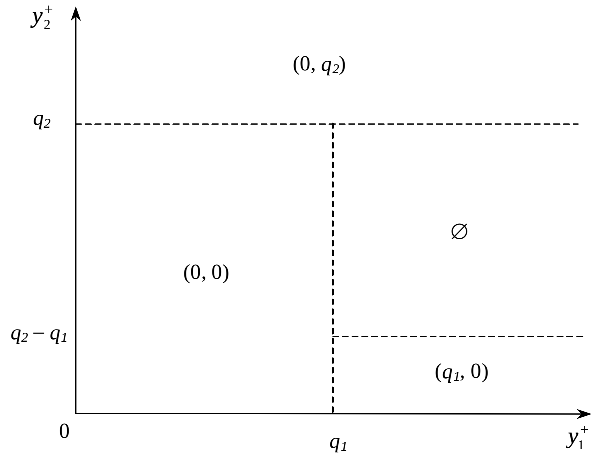

Рис. 2. Равновесия в игре двух агентов
(область, где равновесия нет, обозначена символом «∅»)

Рассмотрим теперь общий случай, когда представления агентов могут и совпадать: $q_1 \leq \ldots \leq q_n$. В этом случае может появиться целая область равновесий, аналогично варианту I. Пусть, например, выполняются соотношения $q_m = q_{m+1} = \ldots = q_{m+p}$, $q_i {}^{1} q_m$ при $i \notin \{m, \ldots, m + p\}$. Тогда при выполнении условий $\sum_{k=m}^{m+p} y_k^* \geq q_m$ и $q_m + y_i^+ \leq q_l$, $i > m$, равновесным является любой вектор $\{y^* \mid \sum_{k=m}^{m+p} y_k^* = q_m,\quad y_k^* \leq y_k^+,\quad k \in \{m, \ldots, m+p\};\quad y_i^* = 0,$ $i \notin \{m, \ldots, m + p\}\}$. Содержательно это означает, что в равновесии всю работу выполняют агенты, которые одинаково представляют себе необходимый для получения вознаграждения объем работы.

Вариант III. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину 2, но каждый агент считает, что играет в игру с асимметричным общим знанием. В этом случае множество возможных равновесных ситуаций становится максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0;\, y_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. В игре «Аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0;\, y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два (при которой каждый агент субъективно играет в игру с асимметричным общим знанием), что вектор y^* является единственным равновесием.

Доказательство утверждения 2. Достаточно для каждого $i \in N$ положить $q_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0; \\ y_i^+ + e, & y_i^* = 0 \end{cases}$ (здесь e – произвольное положительное число) и выбрать любые $q_{ij} > \sum_{i \in N} y_i^+$, $j \in N \setminus \{i\}$. Тогда i-й агент ожидает от оппонентов нулевых действий, а его собственным субъективно равновесным действием является y_i^*. Утверждение 2 доказано.

Замечание 1. Построенное в доказательстве утверждения 2 равновесие является (объективно) Парето-эффективным, если сумма $\sum_{i \in N} y_i^*$ равна истинному значению неопределенного параметра q.

Замечание 2. Действие $y_i^* = y_i^+$ является равновесным, если $q_i = y_i^+$. Однако при этом равновесным будет и действие $y_i^* = 0$ – в обоих случаях субъективно ожидаемый i-м агентом выигрыш равен нулю.

Вариант IV. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину два, и на нижнем уровне имеется симметричное общее знание. Иными словами, каждый фантомный агент считает: неопределенный параметр равен q, и это общее знание.

Оказывается, что и в этом случае множество равновесных ситуаций является максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0;\, y_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. В игре «аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \hat{I} \prod_{i \in N} [0;\, y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два с симметричным общим знанием на нижнем уровне, что вектор y^* является единственным равновесием.

Доказательство утверждения 3. Возьмем любое значение $q > \sum_{i \in N} y_i^+$ и будем считать, что это значение является общим знанием среди фантомных агентов. Тогда единственным равновесием в игре фантомных агентов является выбор каждым из них нулевого действия.

Далее, для каждого $i \in N$ положим

$$q_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0 \\ y_i^+ + e, & y_i^* = 0 \end{cases},$$

где e – произвольное положительное число. Тогда, как нетрудно видеть, наилучшим ответом i-го агента на ожидаемые им нулевые действия оппонентов является выбор действия y_i^*. Утверждение 9 доказано.

Замечания 1 и 2, сделанные при анализе варианта III, можно повторить дословно и для варианта IV.

Таким образом, в данной работе мы исследовали структуру информационных равновесий игры «Аккордная оплата труда» при различных вариантах информированности агентов. Полученные результаты полностью подтверждают интуитивно правдоподобный качественный вывод: в коллективе работников совместная работа возможна (является равновесной) лишь в том случае, когда имеется общее знания о том, какой объем работ необходимо выполнить для получения вознаграждения.

Литература

1.НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. М.: Синтег, 2003. – 160 с.