РЕФЛЕКСИВНЫЕ МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ

Овчинникова Т.И., Чхартишвили А.Г.
(*Институт проблем управления РАН, Москва,
МГУ им. М.В. Ломоносова*)
alexch@spa.msu.ru

Введение

В формальных моделях управления риском, в том числе – страхования (актуарная математика), как правило, не учитываются свойства активности страхователей и страховщиков, проявляющиеся в рефлексии, способности искажать информацию и т.д. Исключение составляют работы [1, 2], рассматривающие модели взаимного и смешанного страхования, в которых страховщик использует информацию, сообщаемую страхователями, для определения параметров страховых контрактов, и предлагается «механизм скидок», в котором каждому страхователю выгодно сообщение достоверной информации. В настоящем разделе рассматриваются модели взаимного страхования, в которых агенты – участники системы взаимного страхования – имеют иерархию представлений [3] о вероятностях наступления страховых случаев для каждого из них.

Рассмотрим объединение из n страхователей (которое в модели взаимного страхования будем считать страховщиком) – агентов, имеющих целевые функции (определяемые ожидаемыми полезностями)

(1) $Ef_i = g_i - r_i + p_i\,[h_i - Q_i],\ i \in N,$

где g_i отражает детерминированную прибыль от хозяйственной деятельности i-го страхователя; r_i – страховой взнос; h_i – страховое возмещение; p_i – вероятность наступления страхового случая (будем считать, что страховые случаи у различных агентов – независимые события); Q_i – потери при наступлении страхового случая, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество страхователей. Для простоты ограничимся описанием взаимодействия страхователей в течение

одного промежутка времени, на протяжении которого однократно производится сбор взносов и компенсация ущербов.

В соответствии с (1) предполагается, что все страхователи одинаково относятся к риску, но в общем случае различаются вероятностями наступления страхового случая и соответствующими потерями. Известно (см. [1, 2] и др.), что перераспределение риска взаимовыгодно только для агентов, отличающихся отношением к риску. Поэтому, с одной стороны, можно считать, что все страхователи нейтральны к риску, а, с другой стороны, что основными эффектами, требующими исследования в рассматриваемой модели взаимного страхования, являются рефлексия страхователей и неполная их информированность – так как все страхователи одинаково относятся к риску, то при условии, что все они обладают полной информацией друг о друге, допустимо произвольное его перераспределение между ними; если же информированность неполная или отсутствует общее знание [3], то возможно нарушение требования сбалансированности взносов и ожидаемых выплат.

В условиях полной информированности суммарный страховой взнос равен $R = \sum_{i \in N} r_i$, а ожидаемое страховое возмещение равно $H = \sum_{i \in N} p_i h_i$. Так как рассматривается взаимное (некоммерческое) страхование, то в силу принципа эквивалентности [1] должно иметь место $R = H$, то есть

(2) $\sum_{i \in N} r_i = \sum_{i \in N} p_i h_i$.

Отметим, что условие (2) отражает равенство суммарного страхового взноса математическому ожиданию выплат, то есть, задачи о разорении фонда взаимного страхования не рассматриваются.

Если осуществляется полное возмещение ущерба (предположение о неполном возмещении ущерба, то есть априорная фиксация предполагаемого уровня страхового возмещения, не изменит качественно основных результатов анализа механизмов взаимного страхования) при наступлении страхового случая ($h_i = Q_i$, $i \in N$, $H = \sum_{i \in N} p_i Q_i$), то в условиях полной информированности можно было бы использовать следующий механизм взаимного страхования:

(3) $r_i = p_i\, Q_i$, i Î N,

в рамках которого страховой взнос каждого страхователя в точности равен его ожидаемому ущербу (страховая сумма совпадает с потерями, а страховой тариф, равный нетто-ставке, определяется соответствующей вероятностью наступления страхового случая).

Однако, если индивидуальные параметры страхователей известны только им самим (и не наблюдаются другими страхователями), то использование механизма (3) невозможно. Поэтому рассмотрим две альтернативы. Первая – сообщение страхователями информации о вероятностях наступления страховых случаев [1]. Вторая – анализ механизма взаимного страхования, удовлетворяющего системе взаимных представлений агентов о существенных параметрах.

Механизмы с сообщением информации

Если оценки $\{s_i\}$ вероятностей наступления страховых случаев могут сообщаться страхователями друг другу, то все страхователи будут стремиться занизить вероятности наступления страхового случая, следовательно, одним из равновесий будет сообщение минимальных оценок. Поэтому рассмотрим несколько альтернативных механизмов взаимного страхования.

Обозначим $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ – вектор сообщений агентов. Пусть в страховом договоре оговаривается, что страховой взнос каждого страхователя определятся сообщенными оценками вероятностей наступления страхового случая, то есть $r_i(s_i) = s_i\, Q_i$, а после наступления страховых случаев возмещение осуществляется пропорционально собранному страховому фонду $R(s) = \sum_{i \in N} r_i(s)$, то есть

(4) $h_i(s) = a(s)\, Q_i$, i Î N,

где $a(s)$ – единая доля страхового возмещения (отношение страхового возмещения $h_i(s)$ к страховой сумме Q_i), определяемая исходя из соотношения между страховым фондом $R(s)$ и необходимым

объемом страхового возмещения H. Выбор зависимости $a(\cdot)$ является стратегией управления.

Подставляя (4) в (1), получаем, что условие выгодности участия во взаимном страховании для i-го страхователя можно записать в виде:

(5) s_i £ $a(s)\, p_i$, i Î N.

Если используется следующая стратегия управления:

(6) $a(s) = \min \{R(s) / H; 1\}$,

то получаем, что балансовое условие (2) выполнено всегда, а из (5) следует, что сообщение страхователя не превышает истинного значения вероятности наступления страхового случая: s_i £ $a(s)\, p_i$, i Î N.

Подставляя (4) и (6) в (1) и вычисляя производную по s_i, получим, что механизм (6) является манипулируемым, то есть сообщение достоверной информации невыгодно страхователям. Содержательно, каждый из страхователей стремится занизить вероятность наступления страхового случая, так как данное занижение сильнее уменьшает размер страхового взноса, чем долю страхового возмещения.

Альтернативой для (5) является использование следующего механизма взаимного страхования. Пусть страхователи заключают договор, в котором оговаривается, что в начале рассматриваемого периода они должны сообщить оценки вероятностей наступления страхового случая (страховые взносы в начале периода не собираются!), а затем в конце рассматриваемого периода (когда реализовались страховые случаи) они полностью компенсируют «пострадавшим» ущерб, а размер взноса каждого из страхователей определяется на основании сообщенных в начале периода оценок. Ожидаемое возмещение при этом равно $H = \sum_{i \in N} p_i Q_i$, следовательно, сумма взносов должна равняться H, то есть

(7) $\sum_{i \in N} r_i(s) = H$,

где зависимости $r_i(\cdot)$ являются механизмом управления. Ожидаемое значение целевой функции страхователя имеет вид:

(8) $Ef_i = g_i - r_i(s)$, i Î N,

а условие выгодности участия во взаимном страховании:

(9) $r_i(s)$ £ $p_i\ Q_i$, i Î N.

Если выбрать следующий механизм управления, при котором взнос каждого страхователя пропорционален сообщенному им ожидаемому ущербу:

(10) $r_i(s) = \dfrac{s_i Q_i}{\sum_{i \in N} s_i Q_i}\ H$, i Î N,

то максимум (8) достигается при минимальных сообщениях, то есть механизм (10) также является манипулируемым.

Анализ условий (9)-(10) подсказывает, что для того, чтобы уменьшить искажение информации следует выбрать такой механизм управления, в котором размер страхового взноса убывал бы с ростом заявки страхователя. Примером может служить механизм

(11) $r_i(s) = \dfrac{1/s_i}{\sum_{i \in N} (1/s_i)}\ H$, i Î N.

Подставляя (11) в (8), получаем, что механизм (11) не побуждает страхователей занижать заявки, но он и не обеспечивает сообщения достоверной информации.

Таким образом, каждый из механизмов (10) и (11) обладает своими преимуществами: механизм (10) сбалансирован и обеспечивает выполнение условия (7), но при его использовании страхователи занижают заявки; а механизм (11) побуждает страхователей завышать заявки, но не обеспечивает «сбалансированности» в смысле (7). Для того чтобы построить механизм, который одновременно обладал бы всеми этими привлекательными свойствами, наверное, следует пытаться добиться рационального баланса между возрастанием и убыванием целевой функции страхователя по его сообщению. Однако для взаимного страхования такой баланс невозможен по следующим причинам. Взаимное страхование, в силу своей некоммерческой направленности, является с точки зрения страхователей «игрой с нулевой суммой» (из условия (2) следует, что суммарные взносы должны быть равны ожидаемому суммарному возмещению), поэтому занижение страхового взноса одним из страхователей приводит к тому, что это занижение компенсируется всеми страхователями (в том числе и исказившим информацию, но в меньшей пропорции – см. (10) или (11)). Поэтому для «борьбы» с искажением информации необходимо привлечение дополнительных ресурсов, зависимость объема которых от сообщений страхователей должна побуждать их к сообщению достоверной информации. Примером таких ресурсов могут служить ресурсы третьих (по отношению к рассматриваемым выше участникам страхового контракта) лиц, используемые в смешанном страховании, анализ которого проведен в работе [1].

Рефлексивная модель

Рассмотрим ситуацию, когда координирующий орган (центр) обладает некоторой информацией о потерях от страховых случаев $\{\tilde{Q}_i\}$ и вероятностях их наступления $\{\tilde{p}_i\}$, причем величины $\{\tilde{Q}_i\}$ и $\{\tilde{p}_i\}$ являются общим знанием (при этом не обязательно $\tilde{Q}_i = Q_i$ и $\tilde{p}_i = p_i$). Каждый страхователь сообщает центру свой взнос s_i, либо отказывается от страхования. Если все страхователи сообщают свои взносы, центр проверяет, выполняется ли соотношение

(12) $\sum_{i \in N} s_i \geq H = \sum_{i \in N} \tilde{p}_i \tilde{Q}_i$.

Если (12) выполнено, заключается договор о взаимном страховании. Если хотя бы один страхователь отказался, либо неравенство (12) не выполнено, договор не заключается.

В описанной ситуации целевая функция i-го страхователя имеет следующий вид:

$$f_i(p_i, s_i, \dots, s_n) = \begin{cases} p_i \tilde{Q}_i - s_i, & \sum_{i \in N} s_i \geq H, \\ -e_i \quad, & \sum_{i \in N} s_i < H, \end{cases}$$

где e_i – произвольная положительная константа (организационные затраты в случае, если договор о страховании не будет заключен). Будем также считать, что в случае отказа страхователя от участия он получает нулевой выигрыш.

Информация участников игры описывается их представлениями о параметрах p_i – вероятностях наступления страховых случаев. Обозначим за p_{ij} – представления i-го агента (страхователя) о значении p_j; p_{ijk} – представления i-го агента о представлениях j-го агента о значении p_k, и т. д., $i, j, k \hat{I} N$. В совокупности эти представления образуют структуру информированности [3].

Информационные равновесия в этой рефлексивной игре [3] страхователей описываются следующим утверждением, в формулировке которого за Σ обозначено множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N (в том числе пустая последовательность).

Утверждение 1. Пусть страхователи обладают конечной структурой информированности. Набор действий s_{si}^*, $s \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием (и договор о взаимном страховании будет заключен), если и только если условия

$$\sum_{j \in N} s_j^* = H \text{ и } \forall\, i \in N \;\; s_i^* \le p_i\, \tilde{Q}_i$$

являются общим знанием. Последнее означает по определению, что для любого $s \in \Sigma$ выполнено

(13) $\forall\, i \in N \;\; \sum_{j \in N} s_{sij}^* = H$ и $s_{si}^* \le p_{si}\, \tilde{Q}_i$.

Доказательство утверждения 1. Пусть набор действий s_{si}^*, $s \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием (и договор о взаимном страховании будет заключен). Зафиксируем произвольные значения $s \in \Sigma$ и $i \in N$. Действие s_{si}^* максимизирует по s_{si} целевую функцию si-агента $f_i(p_{si}, s_{si1}^*, \dots, s_{si,i-1}^*, s_{si}, s_{si,i+1}^*, \dots, s_{si1}^*)$. Поэтому он выбрал минимальное действие, при котором выполняется условие $\sum_{j \in N} s_{sij}^* \ge H$; очевидно, при этом неравенство обращается в равенство. Целевая функция должна принимать неотрицательное значение (иначе si-агенту лучше было бы отказаться от участия в договоре), откуда получаем условие $p_{si}\, \tilde{Q}_i - s_{si}^* \ge 0$.

Далее, пусть для любого $s \in \Sigma$ выполнено (13). Тогда каждое действие s_{si}^* максимизирует целевую функцию si-агента $f_i(p_{si}, s_{si1}^*, \dots, s_{si,i-1}^*, s_{si}, s_{si,i+1}^*, \dots, s_{si1}^*)$. Поэтому набор действий s_{si}^*, $s \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием. Утверждение 1 доказано.

Отметим, что если хотя бы один реальный или фантомный (существующий в чьих-то представлениях, см. [3]) агент откажется от участия, то, договор не будет заключен. При этом отказ всех агентов формально также будет равновесием – отсюда необходимость оговорки в скобках в формулировке утверждения 1.

Ранги рефлексии страхователей и информационные равновесия

Рассмотрим вопрос о том, насколько сложными должны быть субъективные представления страхователя, чтобы были достижимы все возможные информационные равновесия. В работе [3] эта задача была названа задачей о нахождении максимального целесообразного ранга рефлексии. Следующее утверждение показывает, что в данном случае этот ранг равен единице.

Утверждение 2. Все возможные действия i-го реального агента, $i \in N$, в рефлексивной игре страхователей достигаются в рамках его субъективного общего знания о наборе $(p_1, \dots, p_n)$, т.е. в рамках структуры информированности, для которой

$$\forall\, s \in \Sigma \;\; \forall\, j \in N \;\; p_{isj} = p_{ij}.$$

Доказательство утверждения 2. Для действия, состоящего в неучастии агента, утверждение очевидно (достаточно объявить в качестве общего знания $p_{ij} = 0$ для всех $j \in N$).

Далее будем рассматривать ситуацию с точки зрения i-го агента, $i \in N$. Пусть его действие s_i^* субъективно является равновесным в некотором равновесии s_{isj}^*, $s \in \Sigma$ $j \in N$. Тогда, согласно утверждению 1, для всех $j \in N$ выполняются соотношения

$$\sum_{j \in N} s_{ij}^* = H, \quad 0 \le s_{ij}^* \le \tilde{Q}_j .$$

Положим $p_{isj} = 1$ для всех $s \in \Sigma$, $j \in N$ (т. е. сформируем структуру информированности, при которой с точки зрения i-го агента имеет место общее знание). Тогда, как нетрудно видеть, для набора действий $w_{isj}^* = s_{ij}^*$ субъективно (с точки зрения i-го агента) выполнено условие (13). Поэтому набор w_{isj}^*, $s \in \Sigma$, $i, j \in N$, субъективно является информационным равновесием, причем действие

i-го агента в этом равновесии совпадает с его действием в исходном равновесии s^*_{isj}. Утверждение 2 доказано.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследована модель взаимного страхования с информационной рефлексией страхователей. Описано множество информационных равновесий, в которых может состояться договор о страховании. Показано, что все равновесные действия страхователя достигаются в условиях субъективного общего знания страхователей друг о друге.

Литература

1 Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Кулик О.С., Новиков Д.А. Механизмы страхования в социально-экономических системах. М.: ИПУ РАН, 2001. – 109 с.

2 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997. – 188 с.

3 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. М.: Синтег, 2003. – 160 с.