О ПОИСКЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФА ОРГАНИЗАЦИИ

Рожихин П.В. (*ВолГУ, Волгоград*)

Введение

В работе [1] введено понятие иерархической организационной системы, описываемой графом с заданным на нем функционалом стоимости. Для некоторых классов функционалов решена задача поиска графа организации минимальной стоимости. В [2] поставлена и в некоторых частных случаях решена динамическая задача о поиске оптимального управления преобразованиями графа организации при изменении внешних условий. В настоящей работе рассматриваются траектории (последовательности) «непрерывных» изменений графа организации. Мы ограничиваемся рассмотрением организаций, описываемых деревьями. Поставлена и в частном случае решена задача о поиске оптимальной траектории «непрерывных» преобразований графа организации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим, вкратце, следующую модель организационной системы (см. более подробно [1], [2]). Система располагает некоторым дискретным конечным множеством исполнителей $a_1,\ldots,a_n$. Определим сложность (потенциал) $C(a_i)$ исполнителя a_i. Считаем, что исполнители одинаковы, то есть $C(a_1)=\ldots=C(a_n)=C_0$. Для функционирования системы исполнители должны быть организованы в группу $r=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Кроме того, могут быть организованы некоторые промежуточные группы – подмножества множества $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Система описывается ориентированным графом (деревом) организации. В вершинах находятся группы исполнителей, причем в корне дерева – группа r, в листьях – $a_1,\ldots,a_n$. Кроме того, для любых групп $g, g_1,\ldots,g_k$, связанных соотношением $g = g_1 \cup \ldots \cup g_k$ выполнено следующее. В графе организации

из вершин с группами $g_1,\ldots,g_k$ идут дуги в вершину с группой g. Будем говорить, что вершина с группой g – управляющая для вершин с группами $g_1,\ldots,g_k$, а те, в свою очередь, являются подчиненными вершине с группой g.

Определение. Элементарным преобразованием (усложнением или упрощением) организации назовем изменение соответствующего ей графа, состоящее в слиянии подчиненной вершины с непосредственно управляющей ей вершиной или появлении новой вершины, непосредственно подчиненной одной из существующих вершин.

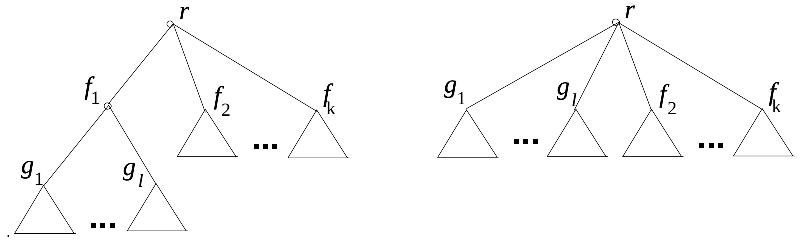

Рис. 1. Элементарное преобразование организации

На рисунке 1 элементарному упрощению отвечает переход от левой организации к правой (вершина f_1 удалена из организации). Элементарному усложнению отвечает переход от правой организации к левой (добавлена вершина f_1).

На рисунках треугольниками обозначим поддеревья организации, квадратами – множества исполнителей (в квадрате – указано число исполнителей).

Определение. Непрерывной траекторией (просто траекторией) назовем упорядоченное множество графов, в котором каждые два соседних графа, получаются один из другого элементарным преобразованием.

Определение. Траектории, отвечающие однонаправленному преобразованию организаций (упрощению или усложнению), назовем траекториями структурно чистых типов.

Пусть заданы начальный G_1 и конечный G_2 графы организации. Множество непрерывных траекторий, соединяющих G_1 и G_2, обозначим $T(G_1,G_2)$, или просто T, если это не приводит к путанице.

Определение. Функционалом стоимости траектории называется положительнозначная функция $\Phi : T(G_1,G_2) \to R_+ \cup \{+\infty\}$, ставящая в соответствие каждой траектории ее стоимость.

Задачу поиска на множестве $T(G_1,G_2)$ траектории минимальной стоимости назовем задачей об оптимальной траектории.

Рассмотрим частный случай функционала стоимости.

Для произвольной группы f определим ее сложность (потенциал) $C(f) = (\sum_{a_i \in f} C(a_i)^{1/a})^a$, где $a \in (0,\ +\infty)$.

Каждой вершине (кроме листьев) поставим в соответствие стоимость вершины. Пусть вершина содержит группу $g = g_1 \cup \ldots \cup g_k$. Тогда ее стоимость

(1) $P(g) = \left[C(g_1) + \ldots + C(g_k)\right]^b$

при $b > 1$ и $a > 1$.

Под стоимостью организации будем понимать суммарную стоимость всех вершин, кроме листьев, входящих в граф организации. Будем обозначать $S(r)$ стоимость поддерева с корнем r.

В работе [1] было показано, что организацией минимальной стоимости является веерная организация, в которой все листья непосредственно подчинены корню.

Зафиксируем некоторую не веерную организацию. Будем считать ее начальной. Рассмотрим все возможные траектории, приводящие начальную организацию к веерной.

Определение. Стоимостью траектории назовем суммарную стоимость всех входящих в нее организаций.

Будем решать задачу об оптимальной траектории с заданным функционалом стоимости среди траекторий структурно чистых типов.

2. Решение задачи об оптимальной траектории

Определение. Глубиной вершины в дереве организации назо-

вем расстояние от корня дерева до данной вершины. Корень дерева имеет глубину 0.

Будем говорить, что элементарное преобразование происходит на глубине k, если добавляется (удаляется) вершина глубины k.

Далее будем использовать неравенство:

(2) $(x_1 + \ldots + x_n)^z \geq x_1^z + \ldots + x_n^z$

для любых $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ при $z \geq 1$, которое представляет собой частный случай неравенства Минковского [3].

Лемма 1. В графе организации, содержащей только вершины глубины 1, наибольшее изменение его стоимости происходит в результате удаления вершины наибольшей сложности.

Доказательство. Будем считать, что граф организации содержит $k \geq 2$ вершин глубины 1. Обозначим корень дерева организации r, а вершины глубины 1 – $f_1, f_2, ..., f_k$. Будем считать, что вершине r подчинено непосредственно s элементарных вершин (листьев), а вершине f_i подчинено $x_i \geq 2$, $i = \overline{1,k}$. Тогда сложность вершины f_i равна $C(f_i) = \left(x_i C_0^{1/a}\right)^a = x_i^a C_0$, $i = \overline{1,k}$. Не уменьшая общности, будем считать, что $x_1 \geq x_i$, где $i = \overline{2,k}$, а значит $C(f_1) \geq C(f_i)$. Обозначим G_i организацию с корнем r_i, полученную в результате удаления вершины f_i, а $S(r_i)$ – ее стоимость. Покажем, что стоимость G_1 меньше стоимости G_i.

$$S(r_i) - S(r_1) = L^b + \left(x_1 C_0\right)^b - R^b - \left(x_i C_0\right)^b$$

где $L = C(f_1) + \ldots + C(f_{i-1}) + C(f_{i+1}) + \ldots + C(f_k) + (x_i + s)C_0$ и $R = C(f_2) + \ldots + C(f_k) + (x_1 + s)C_0$. Покажем, что $L \geq R$.

$$L - R = x_1^a C_0 + x_i C_0 - x_i^a C_0 - x_1 C_0$$

Поскольку, $x_1 \geq x_i \geq 2$ и $a - 1 > 0$, то выполнено $x_1^a + x_i - x_i^a - x_1 = x_1\left(x_1^{a-1} - 1\right) - x_i\left(x_i^{a-1} - 1\right) \geq 0$. Отсюда следует, что $L - R \geq 0$, а значит $S(r_i) - S(r_1) \geq 0$. То есть показали, что стоимость G_i больше стоимости G_1.

Утверждение 1. Для начальной организации, содержащей только вершины глубины 1, оптимальной траекторией будет траектория, все графы которой получены при помощи одного и того же элементарного преобразования – удаления вершины максимальной сложности.

Доказательство. Предположим противное. То есть в некоторой оптимальной траектории T на i-м шаге в графе организации G удаляется вершина f_i, а на $i+1$-м шаге – вершина f_{i+1}, причем $C(f_i) < C(f_{i+1})$. Рассмотрим траекторию T', в которой на i-м шаге в графе организации G удаляется вершина f_{i+1}, а на $i+1$-м шаге – вершина f_i. Обозначим G_{f_i} граф организации, полученный из G удалением вершины f_i, а $G_{f_{i+1}}$ – удалением вершины f_{i+1}. Стоимость траекторий T и T' будет отличаться только стоимостью организаций G_{f_i} и $G_{f_{i+1}}$ соответственно. Но по лемме 1 стоимость $G_{f_{i+1}}$ меньше стоимости G_{f_i}, а значит траектория T неоптимальная.

Лемма 2. Рассмотрим граф организации, содержащий вершину g глубины $u \geq 2$ и поддерево этого графа, содержащее вершину g, с корнем в вершине f глубины 1. Тогда организация, полученная удалением вершины f, имеет стоимость меньшую, чем организация, полученная удалением вершины g.

Доказательство. Сначала докажем утверждение в случае, когда удаляется вершина глубины 2, то есть непосредственно подчиненная f. Введем следующие обозначения. Обозначим r корень дерева организации; $f_1, f_2, ..., f_k$ – вершины глубины 1, непосредственно подчиненные r; $g_1, g_2, ..., g_l$ – вершины глубины 2, непосредственно подчиненные f_1; $h_1, h_2, ..., h_m$ – вершины глубины 3, непосредственно подчиненные g_1. Будем считать, что вершинам r, f_1, g_1 подчинено непосредственно d, g, m элементарных вершин (листьев) (см. рисунок 2).

Обозначим r' – вершину преобразованного дерева G' организации, полученного удалением вершины f_1, а r'' и f_1'' – вершины r и f_1 в преобразованном дереве G'' организации, полученном удалением вершины g_1.

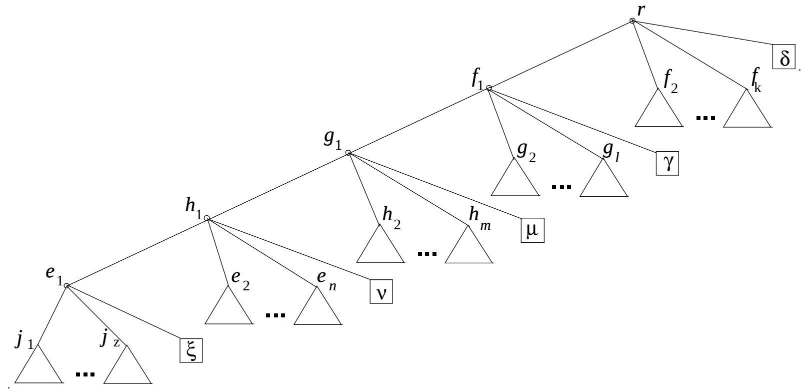

Рис. 2. Начальная организация

Покажем, что стоимость S_1 дерева G' меньше стоимости S_2 дерева G'': $S_2 - S_1 = P(r'') + P(f_1'') - P(r') - P(g_1) =$

$$= \left(C(f_1'') + C(f_2) + ... + C(f_k) + d\,C_0\right)^b +$$

$$+\left(C(h_1) + ... + C(h_m) + C(g_2) + ... + C(g_l) + (m+g)C_0\right)^b -$$

$$-\left(C(g_1) + ... + C(g_l) + C(f_2) + ... + C(f_k) + (d+g)C_0\right)^b -$$

$$-\left(C(h_1) + ... + C(h_m) + mC_0\right)^b = L_1^b + L_2^b - R_1^b - R_2^b$$

Очевидно, $L_2 \geq R_2$. Покажем, что $L_1 \geq R_1$.

$$L_1 - R_1 = C(f_1'') - C(g_1) - ... - C(g_l) - g\,C_0$$

Справедливо равенство: $\left(C(f_1'')\right)^{1/a} = \sum_{a \in f_1''} C_0^{1/a} =$

$$= C(h_1)^{1/a} + ... + C(h_m)^{1/a} + C(g_2)^{1/a} + ... + C(g_l)^{1/a} +$$

$$+(m+g)C_0^{1/a} = C(g_1)^{1/a} + C(g_2)^{1/a} + ... + C(g_l)^{1/a} + g\,C_0^{1/a}$$

Тогда $L_1 - R_1 =$

$$=\left(C(g_1)^{1/a}+\ldots+C(g_l)^{1/a}+gC_0^{\ 1/a}\right)^a - C(g_1)-\ldots-C(g_l)-gC_0 .$$

В силу неравенства (2) имеем $L_1 \ge R_1$. Отсюда $S_2 \ge S_1$.

Докажем утверждение в случае, когда удаляется вершина глубины 3. Кроме введенных обозначений будем использовать следующие: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – вершины глубины 4, непосредственно подчиненные h_1. Обозначим r', g_1', h_1' и r'', f_1'', g_1'' вершины r, g_1, h_1 и f_1 в преобразованных деревьях G' и G''. Покажем, что стоимость S_1 дерева G' меньше стоимости S_2 дерева G''. Рассмотрим разность

$$S_2 - S_1 = P(r'') + P(f_1'') + P(g_1'') - P(r') - P(g_1') - P(h_1') =$$

$$=\left(C(f_1'')+C(f_2)+\ldots+C(f_k)+dC_0\right)^b +$$

$$+\left(C(g_1'')+C(g_2)+\ldots+C(g_l)+gC_0\right)^b +$$

$$+\left(C(e_1)+\ldots+C(e_n)+C(h_2)+\ldots+C(h_m)+(m+n)C_0\right)^b -$$

$$-\left(C(g_1')+C(g_2)+\ldots+C(g_l)+C(f_2)+\ldots+C(f_k)+(d+g)C_0\right)^b -$$

$$-\left(C(h_1')+C(h_2)+\ldots+C(h_m)+mC_0\right)^b -$$

$$-\left(C(e_1)+\ldots+C(e_n)+nC_0\right)^b = L_1^b + L_2^b + L_3^b - R_1^b - R_2^b - R_3^b .$$

Очевидно, $L_3 \ge R_3$. Покажем, что $L_2 \ge R_2$. Справедливо равенство:

$$\left(C(g_1'')\right)^{1/a} = C(e_1)^{1/a}+\ldots+C(e_n)^{1/a}+C(h_2)^{1/a}+\ldots+C(h_m)^{1/a} +$$

$$+(m+n)C_0^{\ 1/a} = C(h_1')^{1/a}+C(h_2)^{1/a}+\ldots+C(h_m)^{1/a}+mC_0^{\ 1/a} .$$

В силу неравенства (2) имеем $C(g_1'') \ge C(h_1') + C(h_2) + \ldots + C(h_m) + m^a C_0$. А значит, $L_2 \ge R_2$.

Заметим, что $C(g_1') = C(g_1'')$. Тогда в силу (2) $L_1 \ge R_1$. Отсюда $S_2 \ge S_1$.

Доказательство утверждения в случае, когда удаляется вершина глубины 4 и больше аналогично, рассмотренным выше.

Утверждение 2. В оптимальной траектории все элементарные преобразования происходят только на глубине 1.

Доказательство. Предположим противное. То есть в некоторой оптимальной траектории T на i-м шаге в графе организации G удаляется вершина g глубины $u \ge 2$ из поддерева с корнем f глубины $u = 1$, а вершина f удаляется на шаге j, причем $j > i$.

Пусть $j = i + 1$. Рассмотрим траекторию T', в которой на i-м шаге в графе организации G удаляется вершина f, а на $i+1$-м шаге – вершина g. Обозначим G_f граф организации, полученный из G удалением вершины f, а G_g – удалением вершины g. Стоимости траекторий T и T' будут отличаться только стоимостями организаций G_g и G_f соответственно. Но по лемме 2 стоимость G_f меньше стоимости G_g, а значит траектория T неоптимальная.

Пусть $j > i + 1$.Рассмотрим несколько случаев, когда из организации G в траектории T удаляются вершины глубины 2, 3, 4 и вершины произвольной глубины, и покажем, что стоимость организации из траектории T больше стоимости соответствующей организации из траектории T'. Если в траектории T на некотором шаге удаляется вершина v, то в траектории T' на этом же шаге также удалим вершину v.

Рассмотрим случай, когда удаляется вершина глубины 2. По лемме 3 разность стоимостей организаций G_g и G_f равна

$$S(G_g) - S(G_f) = P(r'') + P(f_1'') - P(r') - P(g_1') > 0 .$$

Пусть на шаге $i+1$ в траектории T происходит преобразование в одном из поддеревьев с корнем $f_2, \ldots, f_k, g_2, \ldots, g_l, h_1, \ldots, h_m$, не затрагивающее корень поддерева. Поскольку на шаге $i+1$ в траектории T' осуществляется такое же преобразование, то не изменится разность

(3) $S(G_g^{i+1})-S(G_f^{i+1})=P(r'')+P(f_1'')-P(r')-P(g_1')$.

Рассмотрим разность $S(G_g^{i+1})-S(G_f^{i+1})$ при удалении одной из вершин $f_2,\dots,f_k$ (пусть это f_2). Предположим, что вершине f_2 подчинены неэлементарные вершины $q_1,\dots,q_w$ и элементарные вершины, число которых l. После удаления f_2 получим (3). Из доказательства леммы 3 следует $P(f_1'')>P(g_1')$. Покажем, что $P(r'')>P(r')$. $P(r'')=L_1^b$, $P(r')=R_1^b$, где

$$L_1=C(f_1'')+C(q_1)+\dots+C(q_w)+C(f_3)+\dots+C(f_k)+(d+l)C_0$$
$$R_1=C(g_1')+\dots+C(g_l)+C(q_1)+\dots+C(q_w)+C(f_3)+\dots+C(f_k)+$$
$$+(d+g+l)C_0$$

Тогда $L_1-R_1=C(f_1'')-C(g_1')-\dots-C(g_l)-gC_0$. Из доказательства леммы 2 следует, что $L_1\ge R_1$. Таким образом, $S(G_g^{i+1})-S(G_f^{i+1})>0$. Кроме того, организация G_g^{i+1} с точностью до обозначений имеет вид G_g, а G_f^{i+1} – G_f.

Рассмотрим разность $S(G_g^{i+1})-S(G_f^{i+1})$ при удалении одной из вершин $h_1,\dots,h_m$ (пусть это h_1). Предположим, что вершине h_1 подчинены неэлементарные вершины $q_1,\dots,q_w$ и элементарные вершины, число которых l. После удаления h_1 получим (3). Из доказательства леммы 2 следует $P(r'')>P(r')$. Неравенство $P(f_1'')>P(g_1')$ очевидно. Таким образом, $S(G_g^{i+1})-S(G_f^{i+1})>0$. Кроме того, организация G_g^{i+1} с точностью до обозначений имеет вид G_g, а G_f^{i+1} – G_f.

Рассмотрим разность $S(G_g^{i+1})-S(G_f^{i+1})$ при удалении одной из вершин $g_2,\dots,g_l$ на примере вершины g_2. Предположим, что вершине g_2 подчинены неэлементарные вершины $q_1,\dots,q_w$ и

элементарные вершины, число которых l. После удаления g_2 получим (3). Очевидно, $P(f_1'')>P(g_1')$. Покажем, что $P(r'')>P(r')$. $P(r'')=L_1^b$, $P(r')=R_1^b$, где

$$L_1=C(f_1'')+C(f_2)+\dots+C(f_k)+dC_0$$
$$R_1=C(g_1')+C(q_1)+\dots+C(q_w)+C(g_3)+\dots+C(g_l)+C(f_2)+\dots+C(f_k)+$$
$$+(d+g+l)C_0$$

Заметим, что $\left(C(f_1'')\right)^{1/a}=C(g_1')^{1/a}+C(q_1)^{1/a}+\dots+C(q_w)^{1/a}+$
$$+C(g_3)^{1/a}+\dots+C(g_l)^{1/a}+(g+l)C_0^{1/a}.$$

В силу (2) $L_1\ge R_1$.

Рассмотрим случай, когда удаляется вершина глубины 3. Из доказательства леммы 2 следует, что разность стоимостей организаций G_h и G_f равна

$$S(G_h)-S(G_f)=P(r'')+P(f_1'')+P(g_1'')-P(r')-P(g_1')-P(h_1')>0$$

Пусть на шаге $i+1$ в траектории T происходит преобразование в одном из поддеревьев с корнем $f_2,\dots,f_k,g_2,\dots,g_l,h_2,\dots,h_m,e_1,\dots,e_n$, не затрагивающее корень поддерева. Поскольку на шаге $i+1$ в траектории T' осуществляется такое же преобразование, то разность $S(G_h^{i+1})-S(G_f^{i+1})$ не изменится.

Рассмотрим разность $S(G_h^{i+1})-S(G_f^{i+1})$ при удалении одной из вершин $f_2,\dots,f_k$ (пусть это f_2). Предположим, что вершине f_2 подчинены неэлементарные вершины $q_1,\dots,q_w$ и элементарные вершины, число которых l.

После удаления f_2 получим

(4) $S(G_h)-S(G_f)=P(r'')+P(f_1'')+P(g_1'')-P(r')-P(g_1')-P(h_1')$

Неравенство $P(g_1'')>P(h_1')$ очевидно. Из доказательства леммы 2 следует, что $P(f_1'')>P(g_1')$. Доказательство неравенства

$P(r'') > P(r')$ дословно повторяет доказательство в случае, когда удаляется вершина глубины 2.

Рассмотрим разность $S(G_h^{i+1}) - S(G_f^{i+1})$ при удалении одной из вершин $e_1, ..., e_m$ (пусть это e_1). Предположим, что вершине e_1 подчинены неэлементарные вершины $q_1, ..., q_w$ и элементарные вершины, число которых l. После удаления e_1 получим (4). Из доказательства леммы 2 следует, что $P(r'') > P(r')$ и $P(f_1'') > P(g_1')$. Неравенство $P(g_1'') > P(h_1')$ очевидно.

Рассмотрим разность $S(G_h^{i+1}) - S(G_f^{i+1})$ при удалении одной из вершин $h_2, ..., h_m$ (пусть это h_2). Предположим, что вершине h_2 подчинены неэлементарные вершины $q_1, ..., q_w$ и элементарные вершины, число которых l. После удаления h_2 получим (4). Из доказательства леммы 2 следует, что $P(r'') > P(r')$. Неравенство $P(g_1'') > P(h_1')$ очевидно. Доказательство неравенства $P(f_1'') > P(g_1')$ дословно повторяет доказательство в случае, когда удаляется вершина глубины 2.

Рассмотрим разность $S(G_h^{i+1}) - S(G_f^{i+1})$ при удалении одной из вершин $g_2, ..., g_l$ (пусть это g_2). Предположим, что вершине g_2 подчинены неэлементарные вершины $q_1, ..., q_w$ и элементарные вершины, число которых l. После удаления g_2 получим (4). Неравенство $P(g_1'') > P(h_1')$ очевидно. Доказательство неравенства $P(r'') > P(r')$ дословно повторяет доказательство в случае, когда удаляется вершина глубины 2. Покажем, что $P(f_1'') > P(g_1')$.

$P(f_1'') = L_2^b$, $P(g_1') = R_2^b$, где

$$L_2 = C(g_1'') + C(q_1) + ... + C(q_w) + C(g_3) + ... + C(g_l) + (g + l)C_0$$

$$R_2 = C(h_1') + C(h_2) + ... + C(h_m) + mC_0$$

$$\left(C(g_1'')\right)^{1/a} = C(e_1)^{1/a} + ... + C(e_n)^{1/a} + C(h_2)^{1/a} + ... + C(h_m)^{1/a} +$$

$$+ (n+m)C_0^{\ 1/a} = C(h_1')^{1/a} + C(h_2)^{1/a} + ... + C(h_m)^{1/a} + mC_0^{\ 1/a}$$

В силу (2) $L_2 \geq R_2$.

При удалении вершины g_1 приходим к случаю удаления вершины глубины 2.

Случаи, когда удаляется вершина глубины 4 и больше, аналогичны рассмотренным случаям.

Заключение

В дальнейшем предполагается обобщить полученные в настоящей работе результаты на траектории общего вида, рассмотреть другие функционалы стоимости траектории, изучить модели, в которых по ходу построения траектории могут меняться число и сложность исполнителей, сложности групп исполнителей и функционалы стоимости траектории.

Литература

1. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы* // Автоматика и телемеханика. 2002. № 5. С. 120 – 132.
2. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы* // Автоматика и телемеханика. 2002. № 8. С. 136 – 150.
3. ХАРДИ Г.Г., ЛИТТЛЬВУД Д.Е., ПОЛИА Г. *Неравенства*. М.: Иностранная литература, 1948.