ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ТОРГОВОЙ СЕТИ

Губко М.В.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
mgoubko@mail.ru

Введение

В последние годы большой интерес экономистов, а также специалистов по теории игр и управлению в социально-экономических системах вызывают задачи формирования *сетей* – наборов устойчивых связей между целенаправленными субъектами. Задачи формирования сетей возникают во многих областях: в экономике – бизнес-схемы в корпорациях [1], сети сотрудничества между фирмами [2], торговые сети [3]; в социологии – структуры взаимодействия в группах [4]; в менеджменте – организационно-штатные структуры [5-7], сети документооборота в компаниях [8]; в технике – локальные и глобальные вычислительные сети [9] и т.д.

Во всех подобных задачах, где участниками сети (*агентами*) являются целенаправленные субъекты – люди или группы людей, первой целью исследования является предсказание того, какие сети будут формироваться при рациональном поведении участников. Адекватным математическим аппаратом исследования рационального поведения в задачах формирования сетей является теория сетевых игр [10] – относительно молодой раздел теории игр, ориентированный на изучение конфликтов в процессе сетевого взаимодействия. В данной теории формулируются критерии *стабильности*, которым должна удовлетворять *устойчивая сеть* – сеть, которая в некотором смысле устраивала бы всех участников конфликта [10-12].

Следующей целью исследования задач формирования сетей является анализ эффективности стабильных сетей, например, с точки зрения Парето-оптимальности, максимизации совокупного выигрыша или иного *критерия эффективности*. При этом оказы-

вается, что во многих моделях формирования сетей возникает противоречие между стабильностью и эффективностью, то есть эффективные сети оказываются нестабильными и наоборот [11].

В этом случае естественным является желание устранить противоречие между стабильностью и эффективностью, что требует целенаправленного воздействия на целевые функции участников конфликта, на множества их допустимых действий и т.д. – возникает *задача управления* сетевым взаимодействием [13].

Игровой анализ сетевого взаимодействия (процессов формирования сетей) является довольно сложной математической задачей. В первую очередь трудности связаны с дискретностью модели. Зачастую получение аналитических результатов невозможно – удается только построить алгоритмы поиска оптимальных или стабильных сетей.

Характерной чертой моделей сетевого взаимодействия являются так называемые *экстерналии* [14], когда появление или исчезновение связей между двумя агентами приводит к изменению не только их выигрышей, но и увеличению или уменьшению выигрышей остальных агентов.

Следующая сложность связана с тем, что в большинстве моделей целевые функции участников существенно нелинейным образом зависят от структуры сети – количества и конфигурации связей.

Во многих сетевых моделях выигрыш от формирования связей представляется в виде разности дополнительного дохода, получаемого агентом, и затрат на образование связи. Наличие затрат на образование связи в таких моделях является важнейшим фактором, сдерживающим разрастание сети. Результаты исследования существенно зависят от величины этих затрат, параметра, который во многих приложениях определить весьма сложно.

В данной статье исследуется относительно простая модель формирования торговых сетей между географически распределенными компаниями-агентами, которые могут производить товар, продавать его на «своем» рынке или перепродавать другим компаниям.

Данная модель имеет ряд преимуществ, таких как отсутствие необходимости учета затрат на формирование связи, а также линейная зависимость целевых функций агентов от «структуры» сети. В то же время, оказывается, что стабильные сети в такой простой модели могут иметь весьма сложную структуру. Анализ показал, что рациональное поведение агентов приводит к формированию сетей, демонстрирующих важнейшие свойства торговых сетей, такие как функциональная специализация компаний, территориальная дифференциация рынков, стремление компаний к образованию спекулятивных цепочек и др.

Ниже описывается модель торговой сети. Затем предлагается способ формализации действий агентов, доказываются необходимые и достаточные условия стабильности по Нэшу и индивидуальной стабильности торговой сети. Далее рассматривается частный случай растущего рынка, предлагается альтернативная формализация действий агентов, и для нее приводится необходимое и достаточное условие стабильности по Нэшу торговой сети, доказывается, непустота множества стабильных сетей. В заключении кратко намечаются перспективные направления дальнейших исследований.

1. Модель торговой сети

Одной из характерных черт современной мировой экономики является глобализация рынков. Непрерывное развитие коммуникаций между странами и регионами в сочетании с увеличением темпов обмена новыми технологиями приводит к тому, что покупателям одного региона могут предлагаться близкие по своим потребительским свойствам товары, произведенные совершенно разными компаниями, расположенными зачастую весьма далеко от места продажи. При этом конкурентоспособность товара определяется уже не только себестоимостью его производства, но и транспортными, таможенными расходами, связанными с его доставкой к месту продажи.

Таким образом, путь от производителя товара к его потребителю становится таким сложным, что зачастую не может поддерживаться только силами самих производителей. В условиях глобализации рынка производители просто не могут сами заниматься сбытом своей продукции непосредственным потребителям.

Это приводит к появлению разветвленных, многозвенных дилерских сетей, занимающихся распределением товара, его «донесением» до конечного потребителя. Структура этих сетей играет решающую роль в определении того, какие именно товары будут предлагаться на том или ином рынке, по сути, определяет конкурентоспособность товаров и объемы потребления в различных регионах.

Представление о закономерностях процессов формирования торговых сетей в первую очередь необходимо участникам этих сетей – производителям, дилерам, конечным продавцам, а также новым компаниям, ищущим свое место на рынке. Однако и государственные структуры, формирующие налоговое и таможенное законодательство, должны учитывать эти процессы для прогнозирования воздействия своих решений на экономику страны.

Задачу исследования процессов формирования торговых сетей осложняет то, что эти сети складываются под воздействием многих заинтересованных сторон, функционирующих в ситуации конфликта интересов. Действительно, любая коммерческая компания, нацеленная на максимизацию собственной прибыли, действуя в роли продавца, заинтересована в продаже товара по максимальной цене. Но она же, действуя в роли покупателя товара, заинтересована в приобретении товара по минимальным ценам. Таким образом, формирование каждой торговой связи между компаниями представляет собой компромисс, учитывающий альтернативные возможности компаний по продаже или закупке товара.

Таким образом, адекватным математическим инструментом описания формирования торговых сетей является теоретико-игровое моделирование (ставшее, впрочем, привычным инструментом экономического исследования), предполагающее стремление всех вовлеченных в сеть компаний к максимизации собственной прибыли.

В настоящей работе формулируется игровая модель формирования торговой сети между географически разнесенными компаниями. Данная модель анализируется с целью, во-первых – поиска торговых сетей, которые в заданных условиях будут стабильными [12] – устойчивыми относительно изменений действий отдельных компаний, во-вторых – анализа эффективности стабильных сетей.

Итак, рассмотрим множество $N = \{1,\ldots n\}$ компаний (агентов), находящихся в различных географических регионах и занимающихся производством и продажей одного вида продукции[1]. Каждая из компаний может производить товар в объеме $0 \le v_i^s \le V_i^s$ с себестоимостью p_i^s и продавать его в своем регионе в объеме $0 \le v_i^c \le V_i^c$ по цене p_i^c, $i \in N$, где V_i^c – емкость рынка *i*-й компании. Мы считаем, что в себестоимость p_i^s и цену p_i^c включены все налоги и дополнительные расходы компании.

Кроме того, любая компания $i \in N$ может продавать товар другой компании $j \in N, j \ne i$ в произвольном объеме v_{ij}. Стоимость приобретения единицы товара *j*-й компанией у *i*-й компании равна p_{ij} (в этой стоимости могут учитываться налоги, таможенные пошлины, транспортные расходы, которые несет *j*-я компания в результате сделки). Чистый же доход *i*-й компании от продажи единицы товара *j*-й компании равен p_{ij} (в этой сумме также могут учитываться налоги, таможенные пошлины, транспортные расходы).

Проиллюстрируем, каким образом могут формироваться «цены» p_{ij}, p_{ij}, p_i^c из произвольных цен P_{ij}, P_i^c контрактов купли-продажи товара в конкретной экономической модели.

Пример 1. Предположим, что расходы по транспортировке единицы товара из региона *i*-й компании в регион *j*-й компании равны t_{ij} и транспортные расходы всегда несет продавец товара. Пусть налогообложение в каждом из регионов (то есть, для каждой

[1] *В предлагаемой модели рассматривается единственный бесконечно делимый товар.*

компании) описывается налогом с продаж со ставкой A_i и налогом на добавленную стоимость со ставкой B_i, $i \in N$.

Чистый доход *i*-й компании от продажи одной единицы товара *j*-й компании составляет $p_{ij} = (1-\mathrm{B}_i)((1-\mathrm{A}_i)P_{ij} - t_{ij})$, а чистые расходы *j*-й компании по оплате единицы товара от *i*-й $p_{ij} = (1-\mathrm{B}_j)P_{ij}$. В этих условиях чистый удельный доход от продажи товара на «своем рынке» $p_i^c = (1-\mathrm{A}_i)(1-\mathrm{B}_i)P_i^c$. •[1]

Если у некоторой компании $i \in N$ есть возможность продать товар компании $j \in N$ более выгодно, чем на внутреннем рынке, то есть $p_{ij} > p_i^c$, и *j*-й компании выгодно приобретать товар у *i*-й компании, например, если $p_j^c > p_{ij}$, то они могут заключить соглашение о поставке товара. Таким образом, формируется *торговая сеть* – набор направленных связей, соглашений между компаниями, при этом каждая связь *ij* характеризуется объемом v_{ij} товара, передаваемого от *i*-й компании *j*-й.

Таким образом, торговая сеть *g* представляет собой направленный граф, вершинами которого являются компании, а каждой из дуг приписан неотрицательный вес v_{ij}. Если $v_{ij} > 0$, то будем говорить, что связь *ij* присутствует в сети *g*, в противном случае будем считать, что связь *ij* в данной сети отсутствует. Для полноты описания в определение необходимо включить вектор объемов производства $v^s = (v_i^s)_{i \in N}$ и вектор объемов продаж $v^c = (v_i^c)_{i \in N}$. Таким образом, торговая сеть полностью описывается матрицей объемов $v = (v_{ij})_{i,j \in N, i \ne j}$ и векторами v^s, v^c, то есть $g = < v, v^s, v^c >$.

Прибыль *i*-й компании в торговой сети $g = < v, v^s, v^c >$ определяется выражением

(1) $f_i = \sum_{j \ne i} p_{ij} v_{ij} - \sum_{j \ne i} p_{ji} v_{ji} + p_i^c v_i^c - p_i^s v_i^s$,

при условии товарного баланса закупок и продаж

[1] *Символ · здесь и далее означает окончание примера или доказательства.*

(2) $\sum_{j\neq i} v_{ij} + v_i^c = \sum_{j\neq i} v_{ji} + v_i^s$

и ограничениях на объемы производства и продаж

$0 \le v_i^s \le V_i^s$ $0 \le v_i^c \le V_i^c$, $v_{ij} \ge 0$.

На цены передачи товара между компаниями (трансфертные цены) p_{ij} и p_{ij} наложим естественное ограничение *невыгодности спекуляции,* связанное с невыгодностью циклической передачи товара между компаниями. Именно, будем считать, что для произвольной последовательности компаний $i_1, i_2, ..., i_k$ не может быть верной система неравенств

(3) $p_{i_k i_1} \le \mathrm{p}_{i_1 i_2}$, $p_{i_1 i_2} \le \mathrm{p}_{i_2 i_3}$, $p_{i_2 i_3} \le \mathrm{p}_{i_3 i_4}$, …, $p_{i_{k-1} i_k} \le \mathrm{p}_{i_k i_1}$.

Рассмотрим пример, объясняющий экономическую обоснованность этого ограничения.

Пример 2. Предположим, что для пары любых компаний, скажем, для первой и второй, условие (3) нарушено и $p_{21} = 10 \le \mathrm{p}_{12} = 20$, $p_{12} = 30 \le \mathrm{p}_{21} = 40$. Тогда первая компания, продавая единицу товара второй компании, получает чистый доход $\mathrm{p}_{12} = 20$ единиц. Стоимость этой единицы товара для второй компании p_{12} равна 30 единицам. Ей выгодно продать товар первой компании, получив доход p_{21} в 40 единиц. Стоимость этого товара для первой компании $p_{21} = 10$ и ей выгодно снова продать этот товар второй компании. Таким образом, эти компании могут получать неограниченно большие прибыли, просто передавая друг другу сколь угодно малое количество товара, что экономически абсурдно. Отметим, что в условиях примера 1 условие (3) выполняется автоматически. •

Принципиальным ограничением, принимаемым в рассматриваемой модели, является независимость параметров $p_i^s, p_i^c, p_{ij}, \mathrm{p}_{ij}$ от объемов товара. Несмотря на то, что в реальности такая зависимость может иметь место (оптовые скидки и т.п.), будем считать, что ей можно пренебречь.

Приведем пример исходных данных задачи формирования торговой сети.

Пример 3. Рассмотрим 6 агентов, каждый из которых может производить одну единицу товара (то есть $V_i^s = 1$ для всех $i = 1...6$). Вектор себестоимостей производства $p^s = (12, 14, 2, 4, 16, 22)$. Цены продаж приведены на рис. 1 (для простоты предполагается, что $p_{ij} = p_{ji} = \mathrm{p}_{ij} = \mathrm{p}_{ji}$, $i, j = 1...6, i \neq j$). •

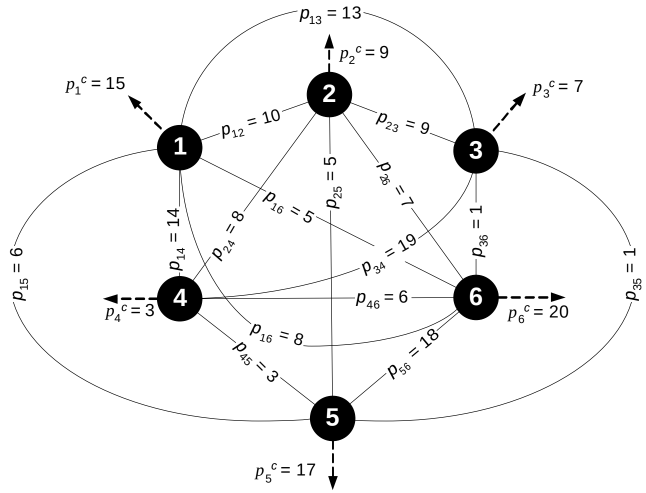

Рис. 1. Пример цен закупок и продаж.

2. Игровая модель формирования сети

Для того чтобы описанная выше модель торговой сети стала теоретико-игровой моделью [15], необходимо формализовать возможности агентов по их воздействию на формирование сети.

В общем случае в основу этой формализации можно положить различные предпосылки, зависящие от конкретной содержательной задачи. В настоящей работе рассматриваются два набора таких предположений, приводящих к различным определениям *действий* [15] агентов.

Предполагается, что все цены (то есть величины $p_i^s, p_i^c, p_{ij}, \mathrm{p}_{ij}$,

$i, j \in N, j \neq i$) фиксированы, то есть агенты могут воздействовать только на объемы производства, закупок и продаж. Кроме того, для простоты предположим, что все цены попарно различны.

Рассмотрим первый способ формализации множеств допустимых действий агентов.

Логично считать, что объемы производства и продаж на внутреннем рынке i-го агента контролируется самим агентом, то есть его действие включает величину v_i^s из отрезка $[0; V_i^s]$ и величину v_i^c из отрезка $[0; V_i^c]$.

Каждая связь ij торговой сети представляет собой контракт купли-продажи, то есть *совместную договоренность* между i-м и j-м агентами. Значит, если от i-го агента j-му передается объем товара v_{ij}, то обе стороны с этим согласны. Никто не может заставить агента купить больший объем товара, чем он согласен принять, и продать объем больший, чем он хочет отдать. Таким образом, если обозначить x_{ij}^{out} – максимальный объем товара, который i-й агент согласен продать j-му, а x_{ij}^{in} – максимальный объем, который j-й агент согласен принять от i-го, то максимальный объем v_{ij}, с которым согласны обе стороны, равен $\min[x_{ij}^{in}; x_{ij}^{out}]$, $i \neq j$.

Для i-го агента введем обозначения $x_{ii}^{out} := v_i^c$, $x_{ii}^{in} := v_i^s$ для объемов его производства и продаж на внутреннем рынке. Определим также векторы $x_i^{in} := (x_{ij}^{in})_{j \in N}$, $x_i^{out} := (x_{ij}^{out})_{j \in N}$. Тогда можно сказать, что действием i-го агента является пара векторов, $x_i := (x_i^{in}, x_i^{out})$. По набору действий $x = (x_i)_{i \in N}$ всех агентов (*игровой ситуации* [15]) можно определить *исход игры* агентов – торговую сеть g по формулам

(4) $v_{ij} = \min[x_{ij}^{in}; x_{ij}^{out}]$, $v_i^c = x_{ii}^{out}$, $v_i^s = x_{ii}^{in}$.

Для краткости записи введем соответствующее формулам (4) отображение $n(x)$ множества игровых ситуаций на множество исходов игры.

Однако для некоторых игровых ситуаций в полученной таким образом торговой сети может нарушаться условие товарного баланса $\sum_{j \neq i} v_{ij} + v_i^c = \sum_{j \neq i} v_{ji} + v_i^s$ для всех или некоторых агентов $i \in N$.

Определение 1. Будем говорить, что ситуация $x := (x_i^{in}, x_i^{out})_{i \in N}$ является *допустимой*, если в построенной по формулам (4) сети $g = n(x)$ для каждого агента выполнено условие товарного баланса (2). Множество допустимых ситуаций обозначим X.

Таким образом, формирование торговой сети можно описать *игрой с запрещенными ситуациями* [16] n агентов с функциями выигрыша $f_i(g)$.

С другой стороны, можно заметить, что приведенная постановка задачи является обобщением понятия *сетевой игры* [12]. В сетевых играх считается, что действие агента состоит из пары подмножеств: подмножества оппонентов, на образование исходящей связи к которым агент согласен, и такого же подмножества для его входящих связей. В рассматриваемой же модели помимо самого факта согласия на образование связи оговаривается и максимальный объем товара, который может быть по ней передан.

Нас, как исследователей, интересует вопрос, какие торговые сети будут формироваться при рациональном поведении агентов. В теории игр [15] считается, что рациональные агенты будут выбирать одну из *равновесных по Нэшу* [16] ситуаций.

Введем соответствующие определения.

Определение 2 [15]. Для заданной ситуации $x := (x_i^{in}, x_i^{out})_{i \in N}$ *обстановкой* x_{-i} i-го агента называется набор действий всех агентов, кроме i-го, $x_{-i} := (x_j^{in}, x_j^{out})_{j \in N, j \neq i}$. То есть ситуация x складывается из действия i-го агента и его обстановки: $x = (x_i, x_{-i})$.

Определение 3 [15]. Будем говорить, что действие x_i агента $i \in N$ допустимо в обстановке x_{-i}, если ситуация $x = (x_i, x_{-i})$ допустима.

Определение 4. Ситуацию $\tilde{x} := (\tilde{x}_i^{in}, \tilde{x}_i^{out})_{i \in N}$, приводящую к сети $\tilde{g} = n(\tilde{x})$, будем называть *равновесием Нэша*, если она допустима и для любого агента $i \in N$ и любого допустимого в обстановке $\tilde{x}_{-i}$ действия x_i выигрыш i-го агента $f_i(g)$ в сети $g = n((x_i, \tilde{x}_{-i}))$ не превышает его выигрыша в сети $\tilde{g}$ (то есть действие $\tilde{x}_i$ является наилучшим ответом на обстановку $\tilde{x}_{-i}$).

Следующая лемма говорит о том, что при исследовании равновесных торговых сетей можно рассматривать только игровые ситуации, в которых любое предложение x_{ij}^{out} агента $i \in N$ по передаче товара агенту $j \in N$ совпадает с его предложением x_{ij}^{in} по приему товара, то есть по данной связи сети будет передаваться объем товара $v_{ij} = x_{ij}^{in} = x_{ij}^{out}$.

Лемма 1. Пусть ситуация $x = (x_i^{in}, x_i^{out}) \in X$ равновесна по Нэшу и приводит к сети $g = (v_{ij})_{i,j \in N, j \neq i}$. Тогда ситуация $\tilde{x}$, в которой для всех $i, j \in N : i \neq j$ $\tilde{x}_{ij}^{in} = \tilde{x}_{ij}^{out} = v_{ij}$, $\tilde{x}_{ii}^{in} = x_{ii}^{in}$, $\tilde{x}_{ii}^{out} = x_{ii}^{out}$ будет равновесием Нэша, приводящим к той же сети g.

Доказательство леммы 1. Очевидно, что ситуация $\tilde{x}$ приводит к той же сети g, что и ситуация x, следовательно, ситуация $\tilde{x}$ допустима. Покажем, что ситуация $\tilde{x}$ равновесна по Нэшу. Действительно, в равновесии Нэша для каждого агента его действие является наилучшим ответом на обстановку, то есть для любого агента $i \in N$ действие x_i является наилучшим ответом на обстановку x_{-i} .

Но легко проверить, что выигрыш агента $i \in N$ в ситуации $\tilde{x}$ не изменился, а множество допустимых в обстановке $\tilde{x}_{-i}$ действий не шире, чем в обстановке x_{-i} . Значит, для любого агента действие $\tilde{x}_i$ – наилучший ответ на обстановку $\tilde{x}_{-i}$ и, следовательно, $\tilde{x}$ – равновесие Нэша. •

Тем не менее, в рассматриваемой задаче непосредственное применение концепции равновесия Нэша для игры с запрещенными ситуациями затруднительно. Действительно, легко видеть, что для любой допустимой игровой ситуации множество допустимых действий агента весьма узко – изменяя в одностороннем порядке свое действие, агент не имеет права изменять объемов, которые будут передаваться другим агентам (поскольку при фиксированных действиях этих агентов такое отклонение нарушит их товарный

баланс). У агентов остается только возможность относительно свободно варьировать объемом собственного производства и продаж на «своем» рынке.

В то же время, концепция равновесия Нэша предполагает независимое поведение всех агентов, поэтому содержательно не совсем понятно, почему при выборе действия агент должен следить за выполнением товарного баланса других агентов. В принципе, его должно интересовать только соблюдение его собственного товарного баланса. Эти соображения позволяют в данной задаче усилить понятие равновесие Нэша за счет расширения множества допустимых действий агентов следующим образом.

Определение 5. Действие x_i агента $i \in N$ назовем *индивидуально допустимым* в обстановке x_{-i} , если в сети $g = n(x_i, x_{-i})$ выполнено условие товарного баланса i-го агента.

Заметим, что ситуация $x := (x_i)_{i \in N}$ допустима тогда и только тогда, когда для любого агента $i \in N$ действие x_i индивидуально допустимо в обстановке x_{-i} .

Определение 6. Ситуацию $\tilde{x} := (\tilde{x}_i^{in}, \tilde{x}_i^{out})_{i \in N}$, приводящую к сети $\tilde{g} = n(\tilde{x})$, назовем *индивидуально рациональной*, если она допустима и для любого агента $i \in N$ и любого его индивидуально допустимого в обстановке $\tilde{x}_{-i}$ действия x_i выигрыш i-го агента $f_i(g)$ в сети $g = n((x_i, \tilde{x}_{-i}))$ не превышает его выигрыша в сети $\tilde{g}$.

Легко проверить, что лемма 1 остается верной при замене концепции равновесия Нэша на индивидуальную рациональность, то есть справедлива

Лемма 2. Пусть ситуация $x = (x_i^{in}, x_i^{out}) \in X$ индивидуально рациональна и приводит к сети $g = (v_{ij})_{i,j \in N, j \neq i}$. Тогда ситуация $\tilde{x}$, в которой для всех $i, j \in N : i \neq j$ $\tilde{x}_{ij}^{in} = \tilde{x}_{ij}^{out} = v_{ij}$, $\tilde{x}_{ii}^{in} = x_{ii}^{in}$, $\tilde{x}_{ii}^{out} = x_{ii}^{out}$ будет индивидуальной рациональной и приводить к той же сети g.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. •

Определение 7. Сеть g назовем *индивидуально стабильной*, если существует индивидуально рациональная ситуация $x \in X$, приводящая к данной сети g.

Лемма 3. Сеть $\tilde{g} =< \tilde{v}, \tilde{v}^s, \tilde{v}^c >$ индивидуально стабильна тогда и только тогда, когда ситуация, в которой $x_{ij}^{in} = x_{ij}^{out} = \tilde{v}_{ij}$, $x_{ii}^{in} = \tilde{v}_i^s$, $x_{ii}^{out} = \tilde{v}_i^c$, $i, j \in N, i \neq j$ индивидуально рациональна.

Доказательство леммы 3 следует из леммы 2 и определения индивидуальной стабильности. •

Следующее следствие позволяет охарактеризовать индивидуально стабильные сети, не прибегая непосредственно к понятию действий агентов.

Следствие 1. Допустимая сеть $\tilde{g} =< \tilde{v}, \tilde{v}^s, \tilde{v}^c >$ индивидуально стабильна тогда и только тогда, когда любой агент $i \in N$ не может увеличить свой выигрыш f_i, варьируя трансфертные объемы v_{ij}, v_{ji}, $j \in N, j \neq i$ в диапазонах $0 \leq v_{ij} \leq \tilde{v}_{ij}$, $0 \leq v_{ji} \leq \tilde{v}_{ji}$, а также объемы собственного производства v_i^s в диапазоне $0 \leq v_i^s \leq V_i^s$ и собственных продаж v_i^c в диапазоне $0 \leq v_i^c \leq V_i^c$ при условии соблюдения его товарного баланса (2).

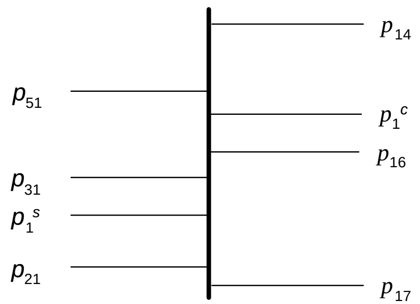

Рис. 2. Пример закупок и продаж агента.

Доказательство следствия вытекает из леммы 3 и определения индивидуальной рациональности. •

Проиллюстрируем, как можно охарактеризовать все индивидуально стабильные сети через параметры модели (цены $p_i^s, p_i^c, p_{ij}, p_{ij}$ и ограничения V_i^s, V_i^c, где $i, j \in N, j \neq i$).

Фиксируем сеть $g =< v, v^s, v^c >$, произвольного агента $i \in N$ и для каждой связи, по которой он получает или передает в сети g строго положительный объем товара, выстроим цены p_{ji}, p_{ij} в порядке возрастания, закупочные цены – слева, цены продажи – справа. Добавим также стоимость производства p_i^s и цену продажи на внутреннем рынке p_i^c. Пример подобного построения приведен на рис. 2 (для определенности взят первый агент).

Из рисунка видно, что первый агент может, не нарушая своего товарного баланса, увеличить свой выигрыш, если слегка уменьшит объем продажи, скажем, седьмому агенту за счет уменьшения объема закупки от второго агента. Таким образом, в индивидуально рациональной сети максимальная стоимость закупки или производства не должна превышать минимальную стоимость продажи, то есть стабильные связи будут выглядеть, например, следующим образом (см. рис. 3).

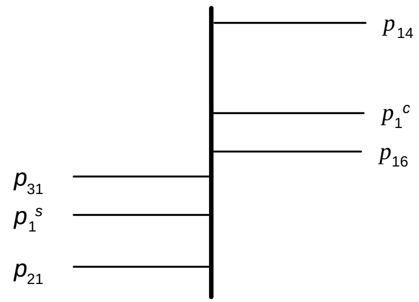

Рис. 3. Пример рациональных закупок и продаж агента.

Далее видно, что если объем v_1^c продаж на «своем» рынке не равен максимально возможному объему V_1^c, то агенту выгодно уменьшить объем продажи шестому агенту за счет увеличения объема продаж на «своем» рынке. Таким образом, в индивидуально рациональной сети либо $v_i^c = V_i^c$, либо цена продажи p_i^c меньше любой из цен p_{ij}, по которым i-й агент передает товар (так, на рис.

2 для индивидуальной стабильности необходимо, чтобы продажи на собственном рынке были максимальны – $v_1^c = V_1^c$).

Точно так же, если объем v_1^s производства не равен максимально возможному объему V_1^s, то агенту выгодно уменьшить объем закупки от третьего агента за счет увеличения объема производства, и в индивидуально рациональной сети либо $v_i^s = V_i^s$, либо себестоимость p_i^s больше любой из цен p_{ji}, по которым i-й агент получает товар.

Если описанные выше условия выполнены, то агент не может увеличить свой выигрыш за счет уменьшения объемов закупок, производства или продаж. Индивидуально допустимым для него является только увеличение объема производства за счет увеличения объема продаж на «своем» рынке. Это выгодно агенту, если себестоимость производства p_i^s не превышает цены продажи p_i^c. Тогда максимум его целевой функции достигается, если $v_i^s = V_i^s$ или $v_i^c = V_i^c$.

Можно проверить, что приведенные выше условия являются и достаточными для того, чтобы торговая сеть была индивидуально стабильной.

Заметим, что в индивидуально стабильной сети отсутствуют циклы. Действительно, если в сети имеется цикл, по которому передается ненулевой объем товара, то в силу ограничения (3) найдется участник цикла, для которого цена приобретения данного товара превышает цену продажи. Но, как показано выше, в этом случае агенту выгодно отказаться от закупки и продажи этого товара, значит, сеть не является индивидуально стабильной.

Тем не менее, несмотря на обилие сложных условий, которым должна удовлетворять индивидуально стабильная сеть, множество индивидуально стабильных сетей все же достаточно широко. Так, легко видеть, что торговая сеть без торговых связей всегда будет

индивидуально стабильной[1]. В этой сети объемы производства и внутренних продаж каждого агента $i \in N$ определяются условием $p_i^s < p_i^c \Rightarrow v_i^s = v_i^c = \min[V_i^s; V_i^c]$, то есть, если агенту выгодно производство для продажи на «своем» рынке, то объем производства ограничен только максимальным объемом производства и емкостью рынка.

Таким образом, дальнейшее исследование требует привлечения более сильных концепций решения игры, чем индивидуальная стабильность. Усиление можно проводить по нескольким направлениям.

Во-первых, можно заметить, что основной причиной слабости концепции индивидуальной стабильности в применении к рассматриваемой задаче является предположение о независимости поведения агентов. Однако поскольку для формирования связи в торговой сети требуется согласие обоих ее участников, связь может возникнуть только в результате переговоров и совместного принятия ими решения. Именно эта идея используется в теории сетевых игр [11, 12] при формулировке таких концепций решения, как попарная и сильная стабильность, которые в той или иной мере допускают согласованные действия нескольких агентов.

Рассматриваемая модель является, по сути, обобщением сетевой игры, поэтому данные концепции достаточно естественным образом могут быть обобщены и на этот случай.

В настоящей работе, однако, описан другой подход, позволяющий получить более сильные результаты, оставаясь в рамках предположения о независимости поведения агентов. Для этого изменим определение действий агентов и способа формирования торговой сети по набору действий агентов.

[1] *Такая ситуация типична для сетевых игр, в которых образование связи требует согласия обоих ее участников, см. например [11].*

3. «Случай растущего рынка»

Ниже будет исследоваться частный случай задачи формирования торговой сети, а именно, случай растущего рынка, когда спрос на товар существенно превышает производственные возможности, так что ограничения объемов рынка $v_i^c \le V_i^c$ агентов можно опустить. В этой ситуации поведение агентов изменяется.

Действительно, пусть в некоторой торговой сети *i*-й агент с выгодой продает на своем рынке товар v_{ji}, полученный от *j*-го агента. Тогда, в силу линейности своей целевой функции и отсутствия ограничений на объем продаж, он не откажется и от любого большего объема товара от *j*-го агента. Если *j*-й агент, в свою очередь, приобрел этот товар у *k*-го агента, то и *j*-й агент не откажется принять от *k*-го больший объем (поскольку *i*-й агент согласен принять этот товар), и так далее.

Таким образом, в произвольной сети, если агент согласен принять от другого агента ненулевой объем товара, то он согласен принять от него и любой больший объем, то есть, важен лишь факт согласия агента на принятие товара. Тогда для произвольных агентов $i, j \in N, i \ne j$ введем переменную $y_{ij}^{in} \in \{0,1\}$, которую будем считать равной единице, если *j*-й агент согласен принимать товар от *i*-го, и нулю в противном случае. Логично считать, что эта переменная выбирается *j*-м агентом.

Далее, рассмотрим произвольного агента $i \in N$ и предположим, что есть подмножество агентов $C_i \subseteq N \setminus \{i\}$, которые согласны принимать от него товар, то есть $y_{ij}^{in} = 1$ для всех $j \in C_i$. Если при этом для любого агента $j \in C_i$ $p_i^c > p_{ij}$, то *i*-му агенту более выгодно продавать товар (откуда бы тот ни взялся) на своем рынке, чем передавать его другим агентам торговой сети. В противном же случае весь товар *i*-му агенту выгоднее продавать агенту $j \in C_i$, имеющему максимальную цену p_{ij}. Таким образом, множество C_i полностью определяет, куда должен продавать товар *i*-й агент.

Также понятно, что если *i*-й агент продает товар по некоторой цене p (определяемой множеством C_i и ценой p_i^c), то ему выгодно производить нулевой объем товара в случае, если $p < p_i^s$ и максимальный объем V_i^s в противном случае.

Тогда будем считать, что действием *i*-го агента является выбор вектора $y_i = (y_{ji}^{in})_{j \in N}$, где $y_{ii}^{in} = 1$, если *i*-й агент производит продукцию и $y_{ii}^{in} = 0$ в противном случае.

В отличие от предыдущей модели, в которой дугам торговой сети приписывались объемы v_{ij} передаваемого товара[1], теперь торговая сеть полностью определяется обыкновенным графом[2] $g =< N, E \subseteq N \times N >$, в котором связь ij присутствует в том случае, когда *j*-й агент согласен принимать товар от *i*-го, а *i*-му агенту выгодно передавать товар *j*-му, а также вектором производства $(y_{ii}^{in})_{i \in N}$.

Определим, каким образом по игровой ситуации строится торговая сеть $g =< N, E >$. Для игровой ситуации $y = (y_i)_{i \in N}$ и произвольного агента $i \in N$ обозначим $C_i(y) \subseteq N \setminus \{i\}$ – множество агентов, которые согласны принимать от него товар. Связь *ij* будет присутствовать в торговой сети, то есть $ij \in E$, если $C_i(y) \ne \varnothing$, $p_i^c < p_{ij}$ и $j = \arg\max_{k \in C_i(y)} p_{ik}$, в противном случае $ij \notin E$.

Предположим, что в полученной сети *g* имеются циклы. Когда товар попадает в цикл (от других агентов или в результате производства товара одним из участников цикла), он движется по циклу, бесконечное число раз проходя через каждый узел. Пусть в сети сформировался цикл $1 \to 2 \to \ldots \to k \to 1$. Тогда агенты $i \in \{2, ..., k-1\}$,

---

[1] *Такие сети представляют собой взвешенные графы.*

[2] *Направленный граф $< N, E >$ описывается множеством вершин N и множеством дуг – упорядоченных пар вершин $E \subseteq N \times N$.*

для которых $p_{i-1i} < p_{ii+1}$, получают бесконечно большую прибыль[1], а агенты, для которых $p_{i-1i} > p_{ii+1}$ – бесконечно большой убыток.

Заметим, что в силу условия невыгодности спекуляции (3) в убытке остается как минимум один участник цикла. Поскольку любой из агентов может гарантировать себе как минимум нулевую прибыль, отказавшись от всех торговых связей и производя нулевой объем товара, сразу же получаем, что индивидуально рациональной может быть только торговая сеть без циклов. Однако для того чтобы полностью описать игру агентов, необходимо определить их выигрыши и в торговых сетях с циклами.

Объемы товара, передаваемые по торговой сети $g =< N, E >$, и, соответственно, выигрыши агентов в этой сети, вычисляются следующим образом. Для каждого агента $i \in N$ его объем производства $v_i^s = y_{ii}^{in} V_i^s$. Возьмем произвольного агента $i \in N$ и обозначим $S_i(g) \subseteq N$ – подмножество агентов, из которых в торговой сети g есть направленный путь к i-му агенту. Поскольку у каждого агента может быть не более одной исходящей связи, объем товара, который i-й агент имеет для продажи (введем для этого объема обозначение v_i), равен суммарному производству агентов множества $S_i(g) \cup \{i\}$, то есть $v_i = \sum_{j \in S_i(g) \cup \{i\}} v_j^s$. Если i-й агент принадлежит некоторому циклу и $v_i > 0$, то этот объем товара передается по циклу бесконечное число раз. Тогда для исходящей связи ij объем v_{ij} положим равным $+\infty$. В противном случае, если i-й агент имеет исходящую связь ij, то $v_{ij} = v_i$, $v_i^c = 0$, если же i-й агент не имеет исходящих связей, то $v_i^c = v_i$. Поскольку каждый агент имеет не более одной исходящей связи, таким образом определяются все объемы, передаваемые по связям торговой сети, а также объемы продаж агентов на «своих» рынках. На основании этих объемов

[1] *Для первого агента имеем неравенство* $p_{k1} < p_{12}$, *для k-го –* $p_{k-1k} < p_{k1}$.

для агентов, не принадлежащих циклам, а также агентов, для которых $v_i = 0$, выигрыш вычисляется по формуле (1).

Рассмотрим теперь агента $i \in N$ – участника цикла, для которого $v_i > 0$. Заметим, что агент не может принадлежать более чем одному циклу. Тогда его выигрыш определяется соотношением цены p_{ji}, по которой он получает товар от предыдущего агента цикла, и цены p_{ik}, по которой он продает товар следующему агенту цикла. Если $p_{ji} < p_{ik}$, то положим выигрыш f_i равным большому положительному числу K, в противном случае $f_i = -K$.

Таким образом, задача формирования торговой сети описывается игрой n агентов с действиями $y_i = (y_{ji}^{in})_{j \in N}$ без запрещенных ситуаций. В первую очередь нас интересуют стабильные по Нэшу сети данной игры.

Для того, чтобы непосредственно анализировать стабильные сети, а не равновесия Нэша игры, докажем для данной модели действий агентов аналог леммы 1.

Лемма 4. Пусть игровая ситуация $y_i = (y_{ji}^{in})_{j \in N}$, приводящая к торговой сети $g =< N, E >$, равновесна по Нэшу. Тогда игровая ситуация $\tilde{y}$, в которой $\tilde{y}_{ii}^{in} = y_{ii}^{in}$ для всех агентов $i \in N$ и $\tilde{y}_{ij}^{in} = 1 \Leftrightarrow ij \in E$, также будет равновесием Нэша, приводящим к той же сети g.

Доказательство леммы 4. Так как для всех агентов $\tilde{y}_{ii}^{in} = y_{ii}^{in}$, значит, объемы производства агентов не изменились при переходе от ситуации y к ситуации $\tilde{y}$. Связь ij в сети g формировалась в том и только в том случае, если $C_i(y) \neq \varnothing$, $p_i^c < p_{ij}$ и $j = \arg\max_{k \in C_i(y)} p_{ik}$. Если $ij \in E$, то множество $C_i(\tilde{y})$ состоит из единственного агента j, в противном случае $C_i(\tilde{y}) = \varnothing$.

Следовательно, связи торговой сети не изменились, и ситуация $\tilde{y}$ приводит к той же сети g, что и ситуация y. Поскольку ситуация y является равновесием Нэша, для любого агента $i \in N$ и любого его действия z_i ситуация (z_i, y_{-i}) приводит к сети, менее выгодной для i-го агента, чем сеть g. Проверим, что ситуация $(z_i, \tilde{y}_{-i})$ приводит к той же сети, что и ситуация (z_i, y_{-i}). Действительно, вектор производства агентов в этих ситуациях одинаков. Далее, то, какая исходящая связь образуется от агента $j \in N$, зависит только от наиболее выгодного для него предложения других агентов. Но это предложение одинаково в ситуациях (z_i, y_{-i}) и $(z_i, \tilde{y}_{-i})$. Поскольку у каждого агента сети может быть не более одной исходящей связи, все связи сетей, получающихся в игровых ситуациях (z_i, y_{-i}) и $(z_i, \tilde{y}_{-i})$, совпадают. Значит, максимальный выигрыш произвольного агента $i \in N$ в обстановке $\tilde{y}_{-i}$ достигается при выборе им действия $\tilde{y}_i$, то есть $\tilde{y}$ – равновесие Нэша. •

Следствие 2. Торговая сеть g с вектором производства $y = (y_{ii}^{in})_{i \in N}$ стабильна по Нэшу тогда и только тогда, когда игровая ситуация $\tilde{y}$ (см. лемму 4) равновесна по Нэшу.

Следствие 3. В любой игровой ситуации произвольный агент $i \in N$ не может своим действием изменить свой «канал сбыта» («свой» рынок или другой агент), а может только воздействовать на множество агентов, от которых он получает товар.

Рассмотрим свойства, которыми должны обладать стабильные по Нэшу сети.

1. **Ацикличность.** Во-первых, как показано выше, сеть с циклами не может быть стабильной по Нэшу. Поскольку агент в сети может иметь не более одной исходящей связи, получаем, что любая стабильная по Нэшу сеть представляет собой набор ориентированных деревьев.
2. **Выгодность каждой связи.** Далее, очевидно, что если i-й агент в стабильной по Нэшу сети имеет исходящую связь ij и $v_{ij} > 0$, то $p_i^c < p_{ij}$, и для любой его входящей связи ki выполняется неравенство $p_{ki} < p_{ij}$ (в противном случае агент может отказаться от входящей связи ki, положив $y_{ki}^{in} = 0$). Точно так же, если агент не имеет исходящих связей и $v_i^c > 0$, то для любой его входящей связи ki выполняется неравенство $p_{ki} < p_i^c$. Это, в частности, означает, что все агенты в стабильной сети получают неотрицательный выигрыш. Отметим также, что выполнение условия выгодности каждой связи в силу условия (3) гарантирует, что торговая сеть будет ациклической.
3. **Невыгодность «отбора» товара.** Пусть в стабильной сети произвольный агент $j \in N$ продает товар в объеме $v_j > 0$ по некоторой цене p_j (на своем рынке или передавая другому агенту). Если агент $i \in N$, к которому в сети нет пути от j-го агента (то есть $j \notin S_i(g)$), продает товар по цене p_i, то либо $p_j > p_{ji}$ (j-й агент продает товар по более высокой цене, чем может предложить ему i-й агент), либо $p_i < p_{ji}$ (i-й агент не может с выгодной для себя продать товар j-го агента). В противном случае i-й агент может выиграть, «отобрав» товар j-го агента выбором $y_{ji}^{in} = 1$.
4. **Невыгодность «перехвата» товара.** Если в стабильной сети есть путь (цепочка агентов) $i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_k$, $k > 2$, по которому передается ненулевой поток товара, то либо $p_{i_{k-1}i_k} < p_{i_1 i_k}$ (то есть последний агент цепочки получает товар по меньшей цене, чем мог бы получить от первого агента), либо $p_{i_1 i_k} < p_{i_1 i_2}$ (первому агенту невыгодно продавать товар напрямую последнему агенту). Иначе последний агент цепочки выигрывает, выбирая $y_{i_1 i_k}^{in} = 1$ и беря товар непосредственно у первого агента.
5. **Рентабельность производства.** Если в стабильной сети произвольный агент $i \in N$ продает товар в объеме $v_i > 0$ по некоторой цене p_i и $p_i^s < p_i$, то он производит товар (в максимально возможном для него объеме V_i^s), в противном случае объем его производства v_i^s равен нулю.

Все эти условия сформулированы, как необходимые условия стабильности по Нэшу торговой сети. Однако их одновременное выполнение является и достаточным для того, чтобы торговая сеть была стабильна.

Утверждение 1. Возьмем произвольную ациклическую сеть g, в которой выполнены: условие выгодности каждой связи, условия невыгодности отбора и перехвата товара и условие рентабельного производства. Тогда сеть g стабильна по Нэшу.

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим произвольного агента $i \in N$ сети g. По следствию 3, агент не может в одностороннем порядке изменить свой канал сбыта. Так как выполнено условие выгодности каждой связи, агенту невыгодно отказываться ни от одного из поставщиков (агентов, которые непосредственно с ним связаны), поскольку в этом случае он теряет товарный поток от этого поставщика. В силу невыгодности отбора товара агент не может расширить список своих поставщиков за счет агентов, товар которых к нему не попадает. В силу невыгодности перехвата товара агент не может расширить список своих поставщиков за счет агентов, товар от которых попадает к нему опосредовано. Также агенту невыгодно отказываться от рентабельного производства. Таким образом, все возможности агента по его воздействию на сеть исчерпаны, и сеть g стабильна по Нэшу. •

Большое количество условий, которым должна удовлетворять стабильная сеть, поднимает вопрос о существовании подобных сетей, а именно, для любого ли набора параметров модели существует хотя бы одна стабильная по Нэшу сеть.

Утверждение 2. В рассматриваемой игре агентов всегда существует хотя бы одна стабильная по Нэшу сеть.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим множество $\Re$ торговых сетей, которые удовлетворяют условиям выгодности каждой связи и рентабельности производства. Это множество содержит как минимум одну сеть (сеть без связей, в которой каждый агент $i \in N$ производит товар, если $p_i^s < p_i^c$).

Выберем произвольную торговую сеть $g \in \Re$. Если эта сеть не стабильна по Нэшу, то в ней для одного или нескольких агентов нарушаются условия невыгодности отбора или перехвата товара. Значит, есть как минимум одна сеть g', достижимая из сети g изменением действия некоторого агента $i \in N$, в которой этот агент получает больший выигрыш за счет отбора или перехвата товара

другого агента. Введем обозначение $r(g)$ для множества торговых сетей вида g'.

Любая сеть $g' \in r(g)$ отличается от сети g только исходящей связью одного агента. Можно проверить, что $g' \in \Re$, поскольку единственное, что изменилось в сети g', это канал сбыта одного агента, причем в сторону увеличения цены. Пусть связь ij сети g перешла в связь ik сети g'. Тогда $p_{ij} < p_{ik}$, то есть «перехватываемый» (или «отбираемый») агент продает в сети g' свой товар по более высокой цене, а цены продажи других агентов не изменились. Отсюда следует, что отображение r ациклическое, то есть, невозможна ситуация, когда $g \in r(...(r(g))..)$. Действительно, если некоторая связь пропала из сети g на некотором шаге применения отображения r, то она уже не появится вновь при дальнейшем отображении, а значит, не повторится и вся исходная сеть g.

Так как отображение r ациклическое, то, в силу конечности множества $\Re$, будут торговые сети $g \in \Re$, для которых $r(g) = \varnothing$. В этих сетях выполнены условия выгодности каждой связи и рентабельности производства, невыгодности отбора и перехвата товаров, значит, эти сети будут стабильными по Нэшу. •

Пример 4. Рассмотрим исходные данные из примера 3, предполагая, что ограничения на объемы продаж отсутствуют. Все стабильные сети для данного примера изображены на рис. 4. Пунктирными стрелками изображены связи, которые были бы выгодны агентам, принимающим товар, если бы по этим связям передавался положительный объем товара.

Заметим, что не во всех стабильных сетях объем производства одинаков. Сеть IV отличается от сети I, а сеть V – от сетей II и III только тем, что объем производства четвертого агента в ней равен нулю (ему невыгодно производство на «свой» рынок, а предложения от других агентов отсутствуют). Стабильность сетей, подобных IV и V, выглядит содержательно менее обоснованной, чем стабильность сетей I-III, поскольку начало производства товара четвертым агентом немедленно должно привести к появлению предложений от других агентов. Если бы при построении действия агента предполагалось, что производство запускается «автоматически» в случае появления выгодных предложений, эти сети уже не были бы стабильными.

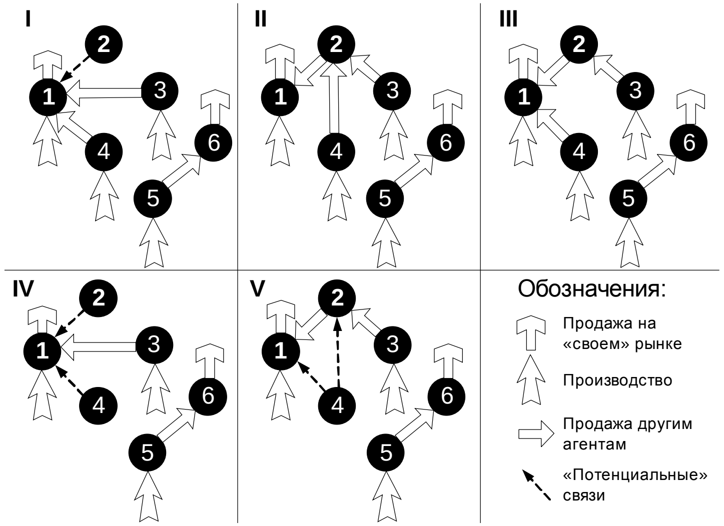

Рис. 4. Стабильные торговые сети.

Также стоит отметить, что в сети II выигрыши первого и второго агентов выше, чем в сетях I или III, поскольку первый агент имеет возможность получать товар по более низкой цене, а второй агент – получать прибыль от продажи первому агенту товара агентов 3 и 4. Таким образом, сети I и III стабильны только потому, что поведение агентов предполагается независимым. Возможность сговора между первым и вторым агентами немедленно приведет к дестабилизации этих сетей. Анализ подобных взаимодействий можно проводить с использованием концепций гибридной стабильности или k-стабильности [12], допускающих сговор между агентами.

Итак, неформальный анализ позволяет сказать, что сеть II является «самой стабильной» среди стабильных по Нэшу сетей. •

4. Заключение

Итак, в статье рассмотрена задача формирования торговой сети между независимыми географически распределенными компаниями (агентами). Предложено формализовать действие агента вектором объемов товара, которые агент готов принять от своих оппонентов, и вектором объемов товара, которые агент готов передать другим агентам. Для такого определения действий в статье приведено необходимое и достаточное условие стабильности по Нэшу торговой сети.

Для случая растущего рынка, когда ограничениями на объемы продаж агентов можно пренебречь, предлагается альтернативный способ определения действия агента – действием считается множество оппонентов, от которых агент согласен принимать товар. Для такого определения действия также доказывается необходимое и достаточное условие стабильности по Нэшу торговой сети.

Тем не менее, полученные в настоящей работе результаты являются только первым шагом в исследовании задач формирования торговых сетей. Можно выделить следующие перспективные направления исследований.

Во-первых, для «случая растущего рынка» необходимо доказать, что множество стабильных сетей не пусто или построить пример, в котором стабильные сети отсутствовали бы.

Во-вторых, несомненной слабостью рассматриваемой модели является то, что цены передачи товара между агентами считаются фиксированными. Способность агентов влиять (в некоторых пределах) на цены передачи товара друг другу может оказать существенное влияние на процесс формирования торговой сети. Таким образом, модель, в которой цены передачи товара включены в действия агентов, требует подробного исследования.

В-третьих, перспективным представляется рассмотрение (для обоих рассмотренных в статье способов построения действия агента) концепций решения сетевой игры, которые, в отличие от стабильности по Нэшу, позволяли бы агентам совместно выбирать свои действия (это, например, гибридная стабильность, *k*-стабильность и т.д. [12]).

В-четвертых, необходимо обобщить полученные во второй части настоящей работы результаты на случай ограниченных рынков. Для этого можно действием агента считать вектор объемов, которые он готов принять от своих оппонентов, а полученный агентом товар распределять последовательно по убыванию выгодности полученных им от других агентов предложений.

И, наконец, исследования требует эффективность стабильных торговых сетей. При этом эффективность сети в данной задаче можно понимать по-разному – эффективная сеть может быть оптимальной по Парето или даже доставлять максимум сумме целевых функций агентов. Также можно считать, что эффективная сеть должна стимулировать максимально возможные объемы производства и, следовательно, потребления товара.

Исследование эффективности торговых сетей логичным образом приводит к рассмотрению задач *управления* формированием торговых сетей. При этом исследователь может становиться как на позицию государства, которое заинтересовано в развитии производства и увеличении налоговых выплат, так и на позицию всей метасистемы (включающей государства, компании, потребителей).

Литература

1. Губко М.В. *Модель формирования бизнес-схем в транснациональных корпорациях* // Системы управления и информационные технологии. 2003. 1-2(12). С. 44-48.
2. Goyal S., Joshi S. *Networks and Collaboration in Oligopoly*. 2002.
3. Kranton R.E., Minehart D.F. *A Theory of Buyer-seller Networks*. 2000.
4. Dutta B., Jackson M.O. *The Stability and Efficiency of Directed Communication Networks*. Review of Economic Design, 2000, № 5, pp. 251-272.
5. Воронин А.А., Мишин С.П. *Оптимальные иерархические структуры*. М.: ИПУ РАН, 2003. – 214 с.

6. Новиков Д.А. *Сетевые структуры и организационные системы*. М.: ИПУ РАН, 2003. – 108 с.
7. Губко М.В. *Структура оптимальной организации континуума исполнителей* // Автоматика и телемеханика. 2002. № 12. С. 116 – 130.
8. Губко М.В., Мишин С.П. *Оптимальная структура системы управления технологическими связями* / Материалы международной научной конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 2002. С. 50 – 54.
9. Badasyan N., Chakrabarti S. *Private Peering among Internet Backbone Providers*. mimeo: Virginia Tech. 2003.
10. Jackson M.O., Volinsky A. *A Strategic Model of Social and Economic Networks*. Journal of Economic Theory, 1996, № 71, pp. 44-74.
11. Jackson M.O. *A Survey on the Models of Network Formation: Stability and Efficiency*. mimeo: California Institute of Technology. 2003.
12. Губко М.В. *Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. Часть I. Обзор теории сетевых игр*. // Автоматика и телемеханика. 2004. (в печати)
13. Губко М.В. *Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. Часть II. Задачи стимулирования*. Автоматика и телемеханика. 2004. (в печати)
14. Currarini S. *Stable organizations with externalities*. mimeo: Universitá di Venezia. 2002.
15. Губко М.В., Новиков Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами*. М.: Синтег, 2002. – 148 с.
16. Гермейер Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами*. М.: Наука, 1976. – 327 с.