ПАВЛОВ О.В.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЧАСТНИКОВ КОРПОРАТИВНЫХ СИСТЕМ

Введение

В работе рассматривается взаимодействие участников корпоративных систем на длительном интервале времени. Доходы от корпоративной деятельности делят между собой несколько групп участников: акционеры (собственники компании), менеджеры, наделенные акционерами правами принятия управленческих решений, кредиторы (банки, владельцы облигаций), трудовой коллектив, федеральное правительство, собирающие налоги, а иногда владеющее пакетом акций. Между участниками корпоративной системы существуют контракты, соглашения и устные договоренности. Согласно [1,2] корпоративное управление – это система взаимоотношений между менеджерами компании и её акционерами по вопросам обеспечения эффективности деятельности компании и защите интересов владельцев, а также других заинтересованных сторон: работников, кредиторов, поставщиков и покупателей. Для успешной деятельности финансовые менеджеры компании должны учитывать интересы всех групп участников (агентов) корпоративной системы.

Статическим механизмам управления в организационных системах посвящено большое количество литературы, основные результаты изложены в [3-12]. В меньшем количестве работ рассматриваются динамические механизмы управления [12-17].

В докладе рассматриваются две задачи: совместное участие в инвестиционном проекте промышленного предприятия и инвестора в длительном периоде (игра Γ_{1t}), динамическая задача стимулирования агентов за снижение трудоёмкости (игра Γ_{2t}).

1. Общая постановка задачи взаимодействия участников корпоративной системы

Процесс взаимодействия участников корпоративной системы представляется в виде дифференциальной игры с непротивоположными интересами. Результаты деятельности корпоративной системы зависят от деятельности каждого участника. В игровой динамической модели присутствуют два вида динамики: изменение вектора состояния системы во времени и динамика процессов принятия решений. Игроки могут иметь различную информацию о текущих значениях фазовых координат, о принимаемых партнёрами решениях.

Методы теории игр с непротивоположными интересами были сформулированы Гермейером Ю.Б. [5,6]. Существуют два подхода к решению дифференциальной игры. Первый из них связан с исследованием ситуаций равновесия [15, 16]. В работе используется второй подход, связанный с построением организационной структуры игры, предложенный Кононенко А.Ф. [12,13]. Построение организационной структуры игры заключается в фиксации порядка ходов игроков и построении процедур обмена информацией. Как показано в [13] множество вариантов информированности игроков может быть сведено к четырём вариантам игры: в классе программных стратегий Γ_{1t}, $\Gamma_{2t,}$ и в классе позиционных стратегий Γ_{1x}, Γ_{2x}.

В общем виде дифференциальная игра участников корпоративной системы описывается следующим образом:

1.Уравнение динамики состояния системы:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), v(t), t), \quad t \in [0, T],$$

где $x(t)$ – n-мерный вектор состояния системы, $u(t)$,$v(t)$ – p и q – мерные управляющие функции агентов.

2.Начальное условие

$$x(0) = x_0.$$

3.На управляющие функции наложены ограничения:

$$u(t) \in U, \ v(t) \in V.$$

4.Целевые функции игроков:

$$J_1(u, v) = g_1(x(T)),$$

$$J_2(u, v) = g_2(x(T)).$$

С помощью управляющих функций $u(t)$ и $v(t)$ игроки стремятся максимизировать свои целевые функции.

Взаимная информированность должна так определять действия игроков, что при подстановки их в (1) и при начальном условии (2) определялась единственная траектория движения системы.

Максимальный гарантированный выигрыш и соответствующая оптимальная стратегия 1 игрока определяются из решения задачи

$$K_1 = \max_{u(t)\in U} \min_{v(t)\in R(u_t)} J_1(x(t), U(t), v(t)). \quad (5)$$

При этом множество $R(u(t))$ состоит из точек множества V, в которых максимизируется целевая функция игрока 2:

$$\max_{v(t)\in V} J_2(x(t), u(t), v(t)).$$

В [13] показано, что в случае однозначного отображения $v(t) = T(u(t))$ решение дифференциальной игры сводится к решению задач оптимального управления. Для решения задач оптимального управления могут быть применены принцип максимума Понтрягина [19] или метод динамического программирования Р. Беллмана [20].

2.Совместное участие в инвестиционном проекте предприятия и инвестора

Рассматривается проблема совместного участия в инвестиционном проекте промышленного предприятия и инвестора. Предприятие планирует осуществлять финансирование инвестиционного проекта за счет собственных отчислений от прибыли и привлечение денежных средств потенциального инвестора. Инвестор участвует в проекте путём приобретения акций предприятия с целью получения в перспективе дивидендов. В каждый момент времени инвестор принимает решение о покупке дополнительных акций предприятия. Рассматривается задача об оптимальном инвестировании финансовых средств, в длительном периоде, с точки зрения предприятия и инвестора.

В соответствии с методологией [13] дифференциальная игра с непротивоположными интересами сводится к задачам оптимального управления инвестициями с точки зрения инвестора (игрок 1) и предприятия (игрок 2). С использованием принципа максимума Понтрягина определяются оптимальные стратегии вложения финансовых средств в основные фонды для предприятия и инвестора. Согласование интересов предприятия и инвестора возможно на основе дивидендной политики предприятия (процентов от прибыли предприятия, выплачиваемых акционерам). Определяются условия согласования интересов предприятия и инвестора в длительном периоде.

2.1 Постановка задачи совместного финансирования проекта предприятия и инвестора

Динамика изменения основных фондов предприятия на временном интервале $[t_0,T]$ при финансировании предприятием и инвестором описывается дифференциальным уравнением [*12*]*:*

$$\frac{dK(t)}{dt} = -mK(t) + U(t) + V(t). \quad (7)$$

где $K(t)$ - количество основных фондов в момент времени t, выраженный в денежных единицах; m - коэффициент выбытия основных фондов; $U(t)$, $V(t)$ – инвестиции предприятия и инвестора соответственно, в момент времени t.

Известно количество основных фондов фирмы в начальный момент времени:

$$K(0) = K_0. \quad (8)$$

Уравнение (7) показывает, что инвестиции используются на восстановление и на увеличение основных производственных фондов.

Объём выпуска продукции $Q(t)$ предприятия в момент времени t описывается линейной производственной функцией

$$Q(t) = fK(t), \quad (9)$$

где f – показатель фондоотдачи основных фондов.

Предполагается мгновенное освоение капиталовложений, отсутствие временного лага между осуществлением затрат и началом функционирования производственных фондов. Считается, что вся произведенная продукция фирмы реализуется на рынке.

Чистая прибыль фирмы в момент времени t определяется следующим выражением:

$$p(t) = p_1Q(t) - p_2L(t) - A(t) - N(t) - \sum_{i=1}^{m} p_{3i}R_i(t). \quad (10)$$

где p_1 – цена продукции фирмы; $Q(t)$ - объём выпуска продукции; $p_1Q(t)$ – доход фирмы; p_2 – ставка заработной платы (цена труда); $p_2L(t)$ – затраты на заработную плату; $A(t)$ – амортизационные отчисления; $N(t)$ - налоговые выплаты; p_{3i} - цена i-го вида сырьевого ресурса; $R_i(t)$ – количество i-го вида комплектующих и материалов; $\sum_{i=1}^{m} p_{3i}R_i(t)$ - затраты на комплектующие и материалы; m – количество видов комплектующих и материалов.

Амортизационные отчисления определяются следующим выражением:

$$A(t) = mK(t)\,. \tag{11}$$

Налоговые выплаты:

$$N(t) = n_1 p_1 Q(t) + n_2 p_2 L(t) + n_3 p(t) + n_4 K(t)\,. \tag{12}$$

где n_1 – процентная ставка налога на добавленную стоимость, в большинстве случае 20%; n_2 –ставка единого социального налога 35,6% от фонда зарплаты, n_3–ставка налога на прибыль 24%; n_4–ставка налога на имущество ≤2,2%.

Объём закупаемого сырья:

$$R_i(t) = Q(t)r_i(t)\,, \tag{13}$$

где $r_i(t)$ – коэффициент расхода i-го вида комплектующего и материала при изготовлении продукции.

Учитывая (1), выражение для налоговых выплат запишется:

$$N(t) = a_1 fK(t) - n_3[p_2L(t) + mK(t)] + n_2 p_2 L(t) + n_4 K(t)\,, \tag{14}$$

где $a_1 = p_1(n_1 + n_2) - n_3\sum_{i=1}^{m} p_{3i}r_i$.

Подставляя (11),(13),(14) в (10) и учитывая (7) получим следующее выражение для прибыли:

$$p(t) = ae^{at} f(K,L) - (1-n_3)[p_2L(t) + mK(t)] - n_2 p_2 L(t) - n_4 K(t)\,, \tag{15}$$

где $a = p_1 - a_1 - \sum_{i=1}^{m} p_{3i}r_i(t)$.

Введём новую управляющую функцию $v(t)$, определяющую какую часть прибыли предприятие реинвестирует в основные фонды:

$$V(t) = v(t)p(t)\,, \tag{16}$$

$$0 \le v(t) \le 1\,. \tag{17}$$

Введём функцию дивидендов $d(t)$, которая характеризует дивидендную политику предприятия в момент времени t и определяет процент от чистой прибыли, направляемый на выплату дивидендов инвестору $DIV(t)$:

$$DIV(t) = d(t)p(t)\,, \tag{18}$$

$$0 \le d(t) \le 1\,. \tag{19}$$

С помощью координирующей функции $d(t)$ возможно согласование интересов предприятия и инвестора. Функцию дивидендов предприятие должно выбрать так, чтобы заинтересовать инвестора в финансировани проекта.

В качестве целевой функции (критерия) предприятия рассматривается максимизация чистой приведенной стоимости (NPV), как разницы между дисконтированными денежными поступлениями и суммой дисконтированных денежных затрат предприятия: реинвестиции предприятия $v(t)$ в основные фонды и выплаты дивидендов инвестору $d(t)$ на интервале времени $[t_0,T]$:

$$J_v = \int_{t_0}^{T} e^{-dt} p(t)[1 - v(t) - d(t)]dt \to \max \tag{20}$$

где d - коэффициент дисконтирования.

С учетом (17) дифференциальное уравнение (7) запишется:

$$\frac{dK(t)}{dt} = -mK(t) + U(t) + v(t)p(t) \tag{21}$$

На управляющую функцию инвестора наложено ограничение, связанное с тем, что инвестиции в момент времени t не могут быть больше свободного финансового ресурса $R(t)$

$$0 \le U(t) \le R(t) \tag{22}$$

В качестве целевой функции инвестора рассматривается максимизация чистой приведенной стоимости (NPV), как разницы между дисконтированными дивидендами и денежными инвестициями $U(t)$ в основные фонды предприятия на интервале времени $[t_0,T]$:

$$J_u = \int_{t_0}^{T} e^{-dt}\{p(t)d(t)\frac{U(t)}{S(t)} - v(t)\}dt \to \max\,. \tag{23}$$

где $S(t)$ – стоимость всех акций, по которым выплачиваются дивиденды. Экономический смысл отношения $\frac{U(t)}{S(t)}$ - доля акций инвестора от общего числа акций, по которым выплачиваются дивиденды.

Выражения (21, 8, 16-20, 22-23) описывают дифференциальную игру предприятия и инвестора.

Согласно правилам игры Γ_{1t} [13] инвестор (игрок 1) не рассчитывает иметь полной информации о предприятии (как правило многие инвесторы предпринимают значительные дополнительные усилия для уменьшения этой информационной неопределенности) и его стратегия состоит в выборе программы инвестиций $U(t)$ на весь рассматриваемый интервал времени $[t_0,T]$. При известной функции $U(t)$ предприятие (игрок 2) выбирает свою программу инвестиций $v(t)$ из решения задачи оптимального управления и координирующую функцию дивидендов $d(t)$ из условия согласования своих интересов с интересами инвестора. Таким образом дифференциальная игра инвестора и предприятия сводится к двум задачам оптимального управления.

Сформулируем задачу оптимального управления с точки зрения предприятия. Необходимо, выбирая объёмы инвестиций $v(t)$, удовлетворяющие ограничениям (17) и координирующую функцию $d(t)$ (функцию дивидендов) в каждый момент времени t перевести динамическую систему (21) из начального состояния (8) в конечное состояние в момент времени T, таким образом, чтобы величина критерия оптимальности (20) была максимальной.

Сформулируем задачу оптимального управления с точки зрения инвестора. Необходимо, выбирая объёмы инвестиций $U(t)$ при ограничениях (22) в каждый момент времени t, при известном оптимальном инвестировании предприятия $v(t)$ и дивидендной политике $d(t)$ перевести динамическую систему (21) из начального состояния (8) в конечное состояние в момент времени T, таким образом, чтобы величина критерия оптимальности (23) была максимальной.

2.2 Решение задачи оптимального управления инвестициями с точки зрения предприятия

Для решения сформулированной задачи оптимального управления (21), (8), (20), (17) применяется принцип максимума Понтрягина [19].

Запишем функцию Гамильтона:

$$H(t)=\Psi(t)[-mK(t)+U(t)+v(t)p(t)]+e^{-dt}p(t)[1-v(t)-d(t)],$$

где $Y(t)$ – вспомогательная переменная, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt}=-\frac{\partial H(t)}{\partial K(t)}=\Psi(t)m-\Psi(t)v(t)a-e^{-dt}a[1-v(t)] \qquad (24)$$

где $a=\dfrac{\partial p(t)}{\partial K(t)}=af-(1-n_3)m-n_4$.

Экономический смысл a - увеличение прибыли предприятия при увеличении основных фондов на единицу.

Для сопряженной переменной выполняется условие трансверсальности:

$$\Psi(T)=0\,. \qquad (25)$$

Перепишем функцию Гамильтона в следующем виде:

$$H(t)=\{\Psi(t)-e^{-dt}\}v(t)p(t)+\Psi(t)U(t)+e^{-dt}p(t)[1-d(t)]. \qquad (26)$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона достигает максимума относительно управляющих параметров. Анализируя выражение (26) замечаем, что гамильтониан линейно зависит от управляющей функций $u(t)$.

Оптимальные стратегии вложения инвестиций:

$$v(t)=\begin{cases}1, & если\ \Psi(t)-e^{-dt}>0\\ 0, & если\ \Psi(t)-e^{-dt}<0\end{cases}; \qquad (27)$$

Таким образом оптимальное управление инвестициями является релейным. С учётом (16) оптимальное управление запишется:

$$V(t)=\begin{cases}p(t), & если\ \ t_0\le t\le t_v^*\\ 0, & если\ \ t_v^*<t\le T\end{cases}; \qquad (28);$$

t_v^* -время переключения инвестиций предприятия, определяется из условия:

$$\Psi(t_v^*)-e^{-dt_v^*}=0\,.$$

Вспомогательная переменная $Y(t)$ на интервале $[t_v^*,T]$, при управлении $v(t)=0$ определится из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \Psi(t)m - ae^{-dt}$$, с граничным условием $\Psi(T) = 0$.

Вспомогательная переменная $Y(t)$ на интервале $[t_0, t_v^*]$, при управлении $v(t)=1$ определится из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = [m - a]\Psi(t)$$, с граничным условием $\Psi\left(t_v^*\right) = e^{-dt_v^*}$.

$$\Psi(t) = e^{-dt}e^{[a-m](t-t_v^*)}.$$

Оптимальной стратегией для фирмы на интервале от начального момента времени до точки переключения является инвестирование получаемой прибыли с максимальной интенсивностью в основные фонды. На интервале от точки переключения до конечного момента времени - полный отказ от инвестирования, для предприятия оптимальным является накопление прибыли. Динамика изменения основных фондов предприятия с учётом (28) запишется:

$$\frac{dK(t)}{dt} = \begin{cases} -mK(t) + U(t) + p(t), & если \ \ t_0 < t < t_v^* \\ -mK(t) + U(t), & если \ \ t_v^* < t < T \end{cases} \qquad (29)$$

2.3 Решение задачи оптимального управления инвестициями с точки зрения инвестора

Решим задачу оптимального управления для инвестора отдельно на интервале времени $[t_0, t_v^*]$, когда предприятие инвестирует прибыль в основные фонды и на интервале времени $[t_v^*, T]$, когда инвестиции отсутствуют.

2.3.1 Этап инвестирования предприятия

Рассмотрим интервал инвестирования предприятия $[t_0, t_v^*]$. Динамика изменения основных фондов на этом интервале описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dK(t)}{dt} = -mK(t) + U(t) + p(t). \qquad (30)$$

Для задачи оптимального управления (30), (8), (22), (23) запишем функцию Гамильтона

$$H(t) = \Psi(t)[-mK(t) + U(t) + p(t)] + e^{-dt}[p(t)d(t)\frac{U(t)}{S(t)} - U(t)]$$

,

где $Y(t)$ – вспомогательная переменная, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t)}{\partial K(t)} = \Psi(t)m - a - e^{-dt}a\,d(t)\frac{U(t)}{S(t)} \qquad (31)$$

и условиям трансверсальности:

$$\Psi(t_v) = 0 .$$

Перепишем функцию Гамильтона:

$$H(t) = \{\Psi(t) + e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)} - 1]\}U(t) - \Psi(t)mK(t) + \Psi(t)p(t) \qquad (32)$$

Анализируя выражение (32) приходим к выводу, что гамильтониан линейно зависит от управляющей функции $U(t)$. Следовательно, оптимальное управление для инвестора определится:

$$U(t) = \begin{cases} R(t), & если \ \Psi(t) + e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)} - 1] > 0 \\ 0, & если \ \Psi(t) + e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)} - 1] < 0 \end{cases} \qquad (33)$$

Таким образом, оптимальное управление является релейным:

$$U(t) = \begin{cases} R(t), & если \ \ t_0 < t < t_u^* \\ 0, & если \ \ t_u^* < t < T \end{cases} \qquad (34)$$

t_u^*-время переключения для «внешних» инвестиций на этапе инвестирования, определяется из условия:

$$\Psi\left(t_u^*\right) + e^{-dt_u^*}[\frac{p(t_u^*)d(t_u^*)}{S(t_u^*)} - 1] = 0 . \qquad (35)$$

Вспомогательная переменная $Y(t)$ на интервале $[t_u^*, t_v^*]$, при управлении $U(t)=0$ определится из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = m\Psi(t) - a$$, с граничным условием $\Psi(t_v^*) = 0$.

$$\Psi(t)=\frac{a}{m}[1-e^{-m(t_v^*-t)}].$$

Вспомогательная переменная $Y(t)$ на интервале $[t_0,t_u^*]$, при управлении $U(t)=R(t)$ определится из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt}=m\Psi(t)-a-e^{-dt}ad(t)\frac{R(t)}{S(t)},$$ с граничным условием

$$\Psi(t_u^*)=-e^{-dt_u^*}[\frac{p(t_u^*)d(t_u^*)}{S(t_u^*)}-1].$$

Таким образом при условии инвестиций со стороны предприятия, инвестору выгодно финансировать проект на интервале времени $[t_0,t_u^*]$. Время прекращения инвестиций t_u^* зависит от выбора координирующей функции $d(t)$.

Из условий (33) получим условие для выбора координирующей функции (функции дивидендов):

$$d(t)\geq[1-\Psi(t)e^{dt}]\frac{S(t)}{p(t)}. \tag{37}$$

Для инвестора оптимальной стратегий является инвестирование в предприятие, только при условии, что получаемые в каждый момент времени дивиденды больше величины (37). Выполнение найденного условия (37) для дивидендной политики предприятия позволяет сделать экономически выгодным участие инвестора в проекте, а следовательно согласовать интересы предприятия и инвестора.

2.3.2 Этап отсутствия инвестиций со стороны предприятия

Рассмотрим интервал отсутствия инвестиций со стороны предприятия $[t_v^*,T]$. Динамика изменения основных фондов на этом интервале описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dK(t)}{dt}=-mK(t)+U(t) \tag{38}$$

Для задачи оптимального управления (37), (8), (22), (23) запишем функцию Гамильтона:

$$H(t)=\Psi(t)[-mK(t)+U(t)]+e^{-dt}[p(t)d(t)\frac{U(t)}{S(t)}-U(t)],$$

где $Y(t)$ – вспомогательная переменная, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt}=-\frac{\partial H(t)}{\partial K(t)}=\Psi(t)m-e^{-dt}ad(t)\frac{U(t)}{S(t)} \tag{39}$$

и условиям трансверсальности:

$$\Psi(T)=0.$$

Перепишем функцию Гамильтона*:*

$$H(t)=\Psi(t)+e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)}-1]\}U(t)-\Psi(t)mK(t) \tag{40}$$

Анализируя выражение (40) приходим к выводу, что гамильтониан линейно зависит от управляющей функции $U(t)$. Следовательно, оптимальное управление для инвестора определится:

$$U(t)=\begin{cases}R(t), & \text{если } \Psi(t)+e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)}-1]>0\\ 0, & \text{если } \Psi(t)+e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)}-1]<0\end{cases} \tag{41}$$

Таким образом, оптимальное управление является релейным:

$$U(t)=\begin{cases}R(t), & \text{если } t_0<t<t_u'\\ 0, & \text{если } t_u'<t<T\end{cases} \tag{42}$$

t_u'-время прекращения «внешних» инвестиций, на интервале отсутствия финансирования со стороны предприятия, определяется из условия:

$$\Psi(t_u')+e^{-dt}[\frac{p(t_u')d(t_u')}{S(t_u')}-1]=0. \tag{43}$$

Вспомогательная переменная $Y(t)$ на интервале $[t_u',T]$, при управлении $U(t)=0$ определится из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt}=m\Psi(t),$$ с граничным условием $\Psi(T)=0$ (44)

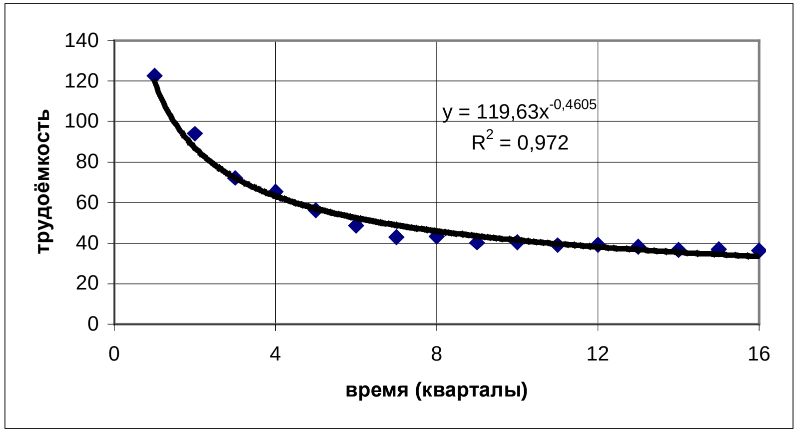
Решая дифференциальное уравнение (44) получаем $\Psi(t)=0$ на интервале $[t_u^{'},T]$. Анализируя выражение (43) приходим к выводу о том, что точки переключения не существует, а следовательно управление инвестора на всём интервале $[t_v^{*},T]$ равно нулю U(t)=0.

Таким образом, в случае отсутствия инвестиций со стороны предприятия инвестору невыгодно финансировать совместный проект.

3. Динамическая задача стимулирования

3.1 Постановка динамической задачи стимулирования

Рассматривается задача стимулирования рабочих за снижение затрат на производство продукции. Хорошо известным является такой факт, что при освоении новой продукции с течением времени затраты на производство продукции (трудоёмкость, себестоимость) уменьшаются [21]. Это связано с увеличением производительности труда рабочих в процессе обучения, устранением временных и обходных техпроцессов и т.д. На рис. 1 изображён график зависимости трудоёмкости изготовления автомобиля ВАЗ 2110 с января 1997 года по декабрь 2000года (четыре года).



На основании статистических данных [22], с использованием метода наименьших квадратов построено уравнение регрессии, имеющей вид степенной зависимости:

$$t\ = 119{,}63t^{-0{,}972}.$$

где t - трудоёмкость изготовления автомашины, t – время изготовления, с дискретностью квартал. Коэффициент детерминации равен 0,972. Анализ изменения трудоёмкости при освоении выпуска автомашин ВАЗ 2111, ВАЗ 2115 позволил сформулировать зависимость трудоёмкости от времени в общем виде:

$$t\ = Bt^{-m},$$

где m - интенсивность снижения трудоемкости, B – размерный коэффициент.

Дифференцируя полученную зависимость по времени, получим дифференциальное уравнение, описывающее процесс изменения трудоемкости сборки автомобиля:

$$\frac{dt}{dt} = -\frac{m}{t}t$$

Трудоёмкость сборки автомобиля зависит от функции стимулирования центра $u(t)$ и функции прикладываемого усилия рабочего (агента) на снижение трудоёмкости $v(t)$. Функция прикладываемых усилий агента определяется как отношение плановой трудоёмкости к фактической:

$$v_i(t) = \frac{t_{iпл}}{t_{iфак}}.$$

На основании [23] зависимость стимулирующего воздействия центра от степени снижения фактической трудоёмкости к плановой определяется выражением:

$$f_i(t) = T + T[\frac{t_{inn}}{t_{iффа}} - 0{,}8] * \frac{u(t)}{0{,}2} = T + T[5v_i(t) - 4] * u(t),$$

где T - тарифная ставка оплаты часа работы среднесписочного рабочего, с доплатой за условия труда и напряжённость норм.

Динамика изменения трудоёмкости с учётом управления центра и i-го агента запишется:

$$\frac{dt}{dt} = -\frac{d}{t}t - au(t) - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i(t), \quad (45)$$

где d - интенсивность снижения трудоёмкости сборки автомобиля «естественным» путём, a,b_i - размерные коэффициенты, $u(t)$ – управление центра, $v_i(t)$-управление агента, n- количество агентов,участвующих в сборке одного автомобиля.

В начальный момент времени t_0 известно начальное значение трудоёмкости:

$$t(t_0) = t_0 \quad (46)$$

На управляющие функции $u(t)$ и $v_i(t)$ наложены следующие ограничения:

$$0£ v_i(t), \quad (47)$$

$$u(t) \le \frac{R(t)}{n}, \quad (48)$$

где $R(t)$ – фонд премирования за снижение трудоёмкости.

Целевая функция агента запишется как разность дохода агента и затрат по снижению трудоёмкости на интервале $[t_0,T]$

$$J_{vi} = \int_{t_0}^{T} \{T + T(5v_i(t) - 4)u(t) - gv_i^2(t)\}dt \to \max \quad (49)$$

где γ_i - коэффициент затрат агента.

Целевая функция центра запишется:

$$J_u = \int_{t_0}^{T} \{q(t)[p(t) - t[T + T(5v_i(t) - 4)u(t)]\}dt \to \max \quad (50)$$

где $q(t)$ - количество производимых автомобилей за час, $p(t)$ – цена автомобиля.

Уравнения (45-50) определяют дифференциальную игру центра и агента.

Согласно правилам игры Γ_{2t} центр знает о выбранном агентом программном управлении $v_i(t)$. Стратегией центра является выбор оператора, ставящего в соответствие каждой функции $v_i(t)$ функцию $f_i(t)$, т.е. сообщение агенту зависимости $f_i(t)=T[v_i(t)]$. Дифференциальная игра сводится к задачам оптимального управления.

Сформулируем задачу оптимального управления для агента, которому известна зависимость $f_i(t)=T[v_i(t)]$. Агенту необходимо, выбирая функцию $v_i(t)$, удовлетворяющую ограничениям (47) в каждый момент времени t перевести динамическую систему (45) из начального состояния (46) в конечное состояние в момент времени T, таким образом, чтобы величина критерия оптимальности (49) была максимальной.

Сформулируем задачу оптимального управления для центра. Необходимо, выбирая функцию $u(t)$, удовлетворяющую ограничениям (48) в каждый момент времени t перевести динамическую систему (45) из начального состояния (46) в конечное состояние в момент времени T, таким образом, чтобы величина критерия оптимальности (50) была максимальной.

3.2 Решение задачи оптимального управления с точки зрения агента

Для решения сформулированной задачи оптимального управления (47), (45), (46), (49) применяется принцип максимума Понтрягина [19].

Запишем функцию Гамильтона:

$$H(t) = -\Psi(t)[\frac{d}{t}t + au(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i(t)] + T + T[5v_i(t) - 4]u(t) - g_i v_i^2(t) \quad (51)$$

где $Y(t)$ – сопряженная переменная, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t)}{\partial t(t)} = \Psi(t)\frac{d}{t}, \qquad (52)$$

Для сопряженной переменной выполняется условие трансверсальности:

$$\Psi(T) = 0 . \qquad (53)$$

Для нахождения максимума выражения (51) продифференцируем его по управляющей функции и приравняем к нулю.

$$\frac{\partial\Psi(t)}{\partial v_i(t)} = -\Psi(t)b_i(t) + 5Tu(t) - 2g_i v_i(t) = 0 .$$

$$v_i(t) = \frac{5Tu(t) - \Psi(t)b(t)}{2g_i} .$$

Решая дифференциальное уравнение (52) с граничным условием (53) определим сопряженную переменную:

$$\Psi(t) = 0 . \qquad (54)$$

С учётом (54) оптимальная управляющая функция агента запишется:

$$v_i(t) = \frac{5Tu(t)}{2g_i} \qquad (55)$$

Оптимальная функция усилий агента прямо пропорционально функции управления центра, часовому тарифу и обратно пропорционально коэффициенту затрат.

3.3 Решение задачи оптимального управления с точки зрения центра

Запишем Гамильтониан:

$$H(t) = -\Psi(t)[\frac{d}{t}t + au(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i(t)] + q(t)[p(t) - t[T + T[5v_i(t) - 4]u(t)] \cdot \qquad (56)$$

Подставим в (56) выражение (55) и найдем максимум гамильтониана по $u(t)$.

Оптимальное управление центра определится:

$$u(t) = g\left[\frac{l\,y}{5Tt} + \frac{4}{5}\right], \quad l = a + \frac{5bT}{2g} .$$

Задача оптимального управления сводится к краевой задаче:

$\frac{dt}{dt} = -\frac{d}{t}t - [a - \frac{5b_iT}{2g_i}]u(t)$, с начальным условием $t(t_0) = t_0$.

$\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t(t)} = \frac{dt}{t} + T + \frac{5T^2u^2(t)}{2g_i} - 4u(t) = 0$ с граничным условием $\Psi(T) = 0$.

Из решения краевой задачи определится сопряженная переменная $\Psi(t)$.

Таким образом, рассматриваемая динамическая задача стимулирования сведена к двум задачам оптимального управления и решена с использованием принципа максимума Понтрягина.

Библиографический список

1.Распоряжение Федеральной комиссии по рынку ценных бумаг от 4 апреля 2002 г. № 421/р «О рекомендации к применению кодекса корпоративного поведения», www.fcsm.ru/catalog.asp?ob_no=1772

2.“Корпоративное управление: история и практика”, ФКЦБ России, 2003, www.fcsm.ru/catalog.asp?ob_no=3132

3.Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. - М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.-488 с.

4.Моисеев Н.Н. -Элементы теории оптимальных систем М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974.-528 с.

5. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. – М.:Наука, 1971.

6.Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.:Наука, 1976.

7. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М. Наука, 1977г., 255 с.

8. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.-384 с.

9. Бурков В.Н., Новиков В.А. Как управлять проектами:- М.:СИНТЕГ-ГЕО, 1997.-188 с.

10.Бурков В.Н., Новиков В.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999.-128 с.

11.Бурков В.Н. Новиков Д.А. Как управлять организациями. М.: Синтег, 2004. – 400 с., ил.
12.Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с., ил.
13.Кононенко А.Ф. О многошаговых конфликтах с обменом информации. - Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, № 4, с. 922-931.
14.Соколовский Л.Е. Модели оптимального функционирования предприятия. –М.:Наука, 1980.- 175 с.
15.Васборд Э.М., Жуковский В.**.** Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения.-М.: Советское радио, 1980.-304 с., ил.
16.Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (бескоалиционный вариант). – Математический анализ, 1977, т. 15, с. 21-32.
17.Новиков Д.А., Смирнов И.М. Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. М.: ИИПУ РАН, 2002. – 124 с.
18.Косачёв Ю.В. Экономико-математические модели эффективности финансово-промышленных структур. – М.: Логос, 2004. – 248 с.
19.Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: «Наука», 1983.-392 с.
20.Белман Р. Динамическое программирование. Москва, 1960. – 400 с.
21. Пиндайк Роберт С., Рубинфельд Дэниел Л. Микроэкономика: Пер. С англ. – 2-е изд. – М.: Дело, 2001.- 808 с.
22. Отчёт по труду и заработной плате за 2000 год АВТОВАЗ. Тольятти 2000. – 128 с.
23.Сборник положений по оплате труда работников Волжского автомобильного завода. Тольятти 2000 – 110 с.