ШТРАФЫ ПРИ УПРАВЛЕНИИ УРОВНЕМ РИСКА НА ПРЕДПРИЯТИИ

Щепкин Д.А.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
schmail@mail.ru

Введение

Будем считать, что уровень риска *x*, вызываемый деятельностью предприятия или вероятность возникновения ЧС на этом предприятии, зависит от объема выпуска *u* и объема средств *v*, направляемых на снижение уровня риска: на совершенствование технологии, предупреждение возникновения нештатных ситуаций, укрепление производственной и технологической дисциплины. То есть $x=x(u,v)$, причем

(1) $$x_i(0,v_i)=0,\ \frac{\partial x_i(u_i,v_i)}{\partial u_i}>0,\ \frac{\partial x_i(u_i,v_i)}{\partial v_i}<0, \frac{\partial^2 x_i(u_i,v_i)}{\partial v_i^2}>0.$$

При применении механизма штрафов для предприятия устанавливается предельно допустимый уровень риска $\hat{x}$. В этом случае прибыль предприятия может быть записана в виде

$$f=cu-z(u)-v-\begin{cases} h(x), & \text{если } x>\hat{x} \\ 0, & \text{если } x\le \hat{x} \end{cases}.$$

Наиболее распространенные виды функций штрафа следующие:

- штраф за превышение допустимого уровня риска $h(x)=H$;
- штраф за превышение допустимого уровня риска с дальнейшим ростом $h(x)=dx$;
- ступенчатая функция штрафа $h(x)=\begin{cases} H_1, \text{если } x>\hat{x}_1 \\ H_2, \text{если } x>\hat{x}_2 \\ ------------ \\ H_k, \text{если } x>\hat{x}_k \end{cases}.$

Для того чтобы использовать ступенчатую функцию штрафов необходимо задать несколько ступеней превышения минимального допустимого уровня риска.

Рассмотрим более подробно случай, когда прибыль предприятия определяется выражением

$$f=cu-z(u)-v-\begin{cases} H, & \text{если } x>\hat{x} \\ 0, & \text{если } x\le \hat{x} \end{cases}.$$

1. Механизм сильных штрафов.

Будем считать, что действует механизм сильных штрафов [1]. Это значит, что для предприятия превышение допустимого уровня риска всегда оказывается невыгодным. Кроме того, в дальнейшем будем считать, что затраты на выпуск продукции является возрастающей, выпуклой, имеющей непрерывную производную, функцией, то есть

(2) $$z(0)=0,\ \frac{dz(u)}{du}>0,\ \frac{d^2z(u)}{du^2}>0,$$

причем

(3) $$\left.\frac{dz(u)}{du}\right|_{u=0}=0,\ \left.\frac{dz(u)}{du}\right|_{u=\infty}=\infty$$

Положим здесь также, задача предприятия заключается в максимизации остающейся в распоряжении предприятия прибыли. Следовательно, при определении объема выпуска предприятие решает задачу

(4) $$\begin{cases} cu-z(u)-v\rightarrow max \\ x(u,v)\le \hat{x} \end{cases},$$

здесь v – объем средств, направляемых предприятием на снижение уровня риска.

Пусть u^* решение уравнения

(5) $$\frac{df}{du}=c-\frac{dz(u)}{du}=0.$$

Если $x(u^*,0)\le \hat{x}$, то предприятие выпускает такой объем продукции, который обеспечивает ему получение максимальной прибыли, и при этом предприятие не тратит свои средства на снижение уровня риска. Если же

(6) $x(u^*,0) > \text{€}$,

то предприятие должно либо сократить объем выпуска до размеров u^{**}, таких что

(7) $x(u^{**},0) = \text{€}$,

либо потратить часть своих собственных средств на снижение уровня риска. Другими словами, предприятие решает либо задачу (7) и получает прибыль в размере $f^* = cu^* - z(u^*)$,

либо задачу (4) и получает прибыль в размере $f' = cu' - z(u') - v'$,

где u' и v' решение задачи (4). Ситуация $f'=f^{**}$ возникает лишь в случае, $u' = u^{**}$, $v' = 0$.

Утверждение 1. Если в системе действует механизм сильных штрафов, справедливо (6) и $u' \neq u^{**}$, то предприятию всегда выгодно превысить объем выпуска u^{**} потратить при этом часть своих средств на снижение уровня риска.

Доказательство. Необходимо доказать справедливость неравенства $f'>f^{**}$. Если бы $f'<f^{**}$, то пара $(u^{**},0)$ являлась бы решением задачи (4), но это противоречит условию утверждения. Нетрудно видеть, что $u' > u^{**}$, иначе, в противном случае,

$$\text{€} = x(u^{**},0) < x(u',v'),$$

но тогда u' и v' не являются решением задачи (4) в силу условия (1).

Утверждение доказано.

Следствие. При выполнении условий утверждения 1 выполняется соотношение $u' \le u^*$.

Действительно, если бы было $u' > u^*$, то можно было бы записать, $x(u',0) > x(u^*,0)$,

в то же время $cu^* - z(u^*) \ge cu' - z(u')$.

Но в силу условия (1) и (4) $x(u',v') = \text{€} > x(u^*,v')$ и при этом

$$cu^* - z(u^*) - v' \ge cu' - z(u') - v',$$

а отсюда следует, что u' и v' не являются решением задачи (4) и это противоречие доказывает следствие.

Решение задачи (4) сводится к решению системы уравнений:

(8) $$\begin{cases} c - \dfrac{dz(u)}{du} + \dfrac{1}{\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v}} \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} = 0 \\ x(u,v) - \text{€} = 0 \end{cases}$$

В дальнейшем будем рассматривать следующую зависимость уровня риска от объема выпуска и размера средств на снижение уровня риска

(9) $$x(u,v) = \frac{w(u)}{w(u) + q(v)}.$$

Будем также полагать, что

(10) $$w(0) = \left.\frac{dw(u)}{du}\right|_{u=0} = 0, \frac{dw(u)}{du} > 0, \frac{d^2w(u)}{du^2} \ge 0$$

(11) $$q(0) = T,\ \left.\frac{dq(v)}{dv}\right|_{v=0} \neq 0,\ \frac{dq(v)}{dv} > 0,\ \frac{d^2q(v)}{dv^2} \le 0.$$

В этом случае система (8) может быть представлена в виде

(12) $$\begin{cases} c - \dfrac{dz(u)}{du} - \dfrac{w'q}{wq'} = 0 \\ \dfrac{w(u)}{w(u)+q(v)} - \text{€} = 0 \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения системы (12) $q(v)$ и $v = v(u,\text{€})$, и подставив его в первое уравнение, получаем уравнение относительно u

(13) $$c - \frac{dz(u)}{du} - \frac{1-\text{€}}{\text{€}} \frac{w'}{\left.\dfrac{dq}{dv}\right|_{v=v(u,\text{€})}} = 0.$$

Утверждение 2. Для того, чтобы уравнение (13) имело решение, достаточно, чтобы выполнялись условия (2), (3) и (10), (11).

Доказательство. Обозначим $\Psi(u) = \frac{dz(u)}{du} + \frac{1-\text{€}}{\text{€}} \frac{w'}{\left.\frac{dq}{dv}\right|_{v=v(u,\text{€})}}$

В силу условий (3) и (10) $Y(0) = 0$. С другой стороны, в силу справедливости условий (2), (10) и (11) можно подобрать такое $\tilde{u}$, чтобы было справедливо неравенство

$$\Psi(\tilde{u}) = \left.\frac{dz(u)}{du}\right|_{u=\tilde{u}} \frac{1-\text{€}}{\text{€}} \frac{\left.\frac{dw}{du}\right|_{u=\tilde{u}}}{\left.\frac{dq}{dv}\right|_{v=v(\tilde{u},\text{€})}} > c$$

Таким образом, функция $Y(u)$ определена на отрезке $[0,\tilde{u}]$ и в крайних точках этого отрезка она принимает не равные значения $\Psi(0) < \Psi(\tilde{u})$, а по теореме о промежуточном значении функции [2], для любого $\Psi(0) < c < \Psi(\tilde{u})$ существует, по меньшей мере, одна такая точка u', $0 < u' < \tilde{u}$, что $\Psi(u') = c$.

Этот вывод и доказывает Утверждение 2.

Изменяя предельно допустимый уровень риска можно влиять на объем выпуска продукции на предприятии и на объем средств, выделяемых предприятием на снижение уровня риска.

<u>Утверждение 3.</u> Если зависимость уровня риска от объема выпуска и размера средств на снижение уровня риска определяются выражением (9) и выполняются условия (10), то уменьшение допустимого уровня риска всегда приводит к уменьшению объема выпуска.

Доказательство. Для доказательства утверждения необходимо показать, что $\frac{du}{d\text{€}} > 0$.

Из второго уравнения системы (12) получаем

$$q(v) = w(u)\frac{1-\text{€}}{\text{€}}.$$

Подставив это значение в первое уравнение системы (12), можем записать

(14) $$\begin{cases} F(\text{€},u,v) = c - \frac{\partial z(u)}{\partial u} - \frac{1-\text{€}}{\text{€}} \frac{w'(u)}{q'(v)} = 0 \\ \Phi(\text{€},u,v) = \frac{\omega(u)}{\omega(u)+\theta(v)} - \text{€} = 0 \end{cases}$$

Эта система уравнений задает две функции одной переменной $u(\text{€})$ и $v(\text{€})$.

Производные функций $u(\text{€})$ и $v(\text{€})$, заданных системой (14) записываются в виде [3]

(15) $$\frac{du}{d\text{€}} = \frac{F'_v \Phi'_{\text{€}} - F'_{\text{€}} \Phi'_v}{F'_u \Phi'_v - F'_v \Phi'_u}$$

и, соответственно,

(16) $$\frac{dv}{d\text{€}} = \frac{F'_{\text{€}} \Phi'_u - F'_u \Phi'_{\text{€}}}{F'_u \Phi'_v - F'_v \Phi'_u}.$$

Так как $F'_{\text{€}} = \frac{1}{\text{€}^2} \frac{w'(u)}{q'(v)}$, $F'_u = -\frac{d^2 z(u)}{du^2} - \frac{1-\text{€}}{\text{€}} \frac{w''(u)}{q'(v)}$, $F'_{\text{€}} = -1$, $\Phi'_u = \text{€}(1-\text{€})\frac{w'(u)}{w(u)}$ и $\Phi'_v = -\frac{q'(v)}{w(u)}\text{€}^2$, то (15) можно переписать

$$\frac{du}{d\text{€}} = -\frac{\frac{1-\text{€}}{\text{€}} \frac{w'(u) q''(v)}{[q'(v)]^2} - \frac{w'(u)}{w(u)}}{\left[\frac{d^2 z(u)}{du^2} + \frac{1-\text{€}}{\text{€}} \frac{w''(u)}{q'(v)}\right] \frac{q'(v)}{w(u)} \text{€}^2 - (1-\text{€})^2 \frac{q''(v)[w'(u)]^2}{w(u)[q'(v)]^2}}.$$

Числитель этой дроби отрицательный, а знаменатель – положительный, поэтому $\frac{du}{d\text{€}} > 0$.

Утверждение доказано.

Содержательно, это довольно естественный вывод. Чем более высокие требования предъявляются к уровню безопасности производства при действии механизма сильных штрафов, тем менее активно осуществляется производственная деятельность, что и приводит к снижению уровня выпуска продукции. Но при этом остается вопрос: «Как изменяется объем средств, выделяемых предприятием для снижения уровня риска, если происходит изменение допустимого уровня риска?».

Для этого определим количество собственных средств v_d, которое выделяет предприятие на снижение уровня риска, если допустимый уровень риска принимает значение

$$\tilde{k} = x(u^*,0) - d = \frac{w(u^*)}{w(u^*)+T} - d ,$$

где d малая величина больше нуля. Для максимизации своей прибыли предприятие решает задачу (4), которую здесь можно записать в виде

$$\begin{cases} cu - z(u) - v \to max \\ \dfrac{w(u)}{w(u)+q(v)} = \dfrac{w(u^*)}{w(u^*)+T} - d \end{cases} .$$

Пусть u_d и v_d решение этой задачи. Тогда справедливо выражение

$$d = \frac{w(u^*)q(v_d) - w(u_d)T}{[w(u^*)+T][w(u_d)+q(v_d)]} .$$

Очевидно, что при $d \to 0$ $w(u^*)q(v_d) - w(u_d)T \to 0$

или $\dfrac{w(u_d)}{q(v_d)} \underset{d \to 0}{\to} \dfrac{w(u^*)}{T}$.

Докажем, что при $d \to 0$ $u_d \to u^*$ и $v_d \to 0$.

Пусть $\lim\limits_{d \to 0} u_d = u_0$ и $\lim\limits_{d \to 0} v_d = v_0$. Из следствия к утверждению 1 следует, что $u_d \le u^*$ и $v_d \geq 0$. Так как u_0 и v_0 решение задачи (4) и при $d \to 0$ решение задач (4) и (5) совпадают, то это означает, что при $d \to 0$ $u_d \to u^*$ и $v_d \to 0$.

Фактически здесь показано, что небольшое превышение $x(u^*,0)$ над допустимым уровнем риска не приводит к скачку средств, выделяемых предприятием на снижение уровня риска. Этот рост происходит постепенно, по мере уменьшения $\tilde{k}$. С другой стороны, из утверждения 3 следует, что по мере уменьшения $\tilde{k}$ происходит уменьшение объема выпуска. Очевидно, что на всем диапазоне уменьшения $\tilde{k}$ от $x(u^*,0)$ до 0 одновременное увеличение объема средств, выделяемых предприятием на снижение уровня риска и уменьшение объема выпуска, происходить не может. Действительно, так как уменьшается объем выпуска, то падает и прибыль предприятия, а это может привести к тому, что прибыль предприятия упадет настолько, что окажется меньше объема средств, которые необходимо выделить на снижение уровня риска. То есть прибыль за вычетом средств на снижение уровня риска окажется отрицательной. В то же время предприятие может просто определить объем выпуска из условия (7), который обеспечит для него положительную прибыль и при этом $v=0$. Следовательно, при достаточно маленьком $\tilde{k}_m$ из решения системы (12) можно получить $v' = 0$. А это значит, что при уменьшении $\tilde{k}$ на отрезке $[x(u^*,0); \tilde{k}_m]$ v' сначала возрастает от нуля до некоторой величины, а потом убывает до нуля. А в этом случае $\dfrac{dv}{d\tilde{k}}$ должна быть сначала положительной, а потом отрицательной.

Перепишем (16) в виде

$$\frac{dv}{d\tilde{k}} = \frac{\dfrac{1-\tilde{k}}{\tilde{k}}\dfrac{[w'(u)]^2}{w(u)q'(v)} - \left(\dfrac{d^2z(u)}{du^2} + \dfrac{1-\tilde{k}}{\tilde{k}}\dfrac{w''(u)}{q'(v)}\right)}{\left(\dfrac{d^2z(u)}{du^2} + \dfrac{1-\tilde{k}}{\tilde{k}}\dfrac{w''(u)}{q'(v)}\right)\dfrac{q'(v)}{w(u)}\tilde{k}^2 - (1-\tilde{k})^2\dfrac{[w'(u)]^2 q''(v)}{w(u)[q'(v)]^2}} .$$

Знаменатель этой дроби положительный. Поэтому знак производной определяется числителем. Запишем его в виде

$$-\left\{\frac{1-\tilde{k}}{\tilde{k}q'(v)}\frac{w(u)w''(u) - [w'(u)]^2}{w(u)} + \frac{d^2z(u)}{du^2}\right\} .$$

Легко видеть, что $\dfrac{dv}{d\tilde{k}}$ может менять знак, если $w(u)w''(u) - [w'(u)]^2 < 0$.

Обозначим $w(u)w''(u)-[w'(u)]^2=[w(u)]^2 j(u)$, где $j(u)<0$, тогда можем записать $\dfrac{w(u)w''(u)-[w'(u)]^2}{[w(u)]^2}=j(u)$.

Это выражение можно представить в виде

$$\frac{w(u)w''(u)-[w'(u)]^2}{[w(u)]^2}=\left(\frac{w'(u)}{w(u)}\right)'=j(u).$$

Интегрируя его, получаем $\dfrac{w'(u)}{w(u)}=\int j(u)du$.

В свою очередь, это выражение можно представить в виде

$$[ln w(u)]'=\int j(u)du,$$

интегрируя которое, получаем $ln w(u)=\int\left[\int j(u)du\right]du$.

Из этого равенства можем определить функцию $w(u)$

$$w(u)=e^{\int\left[\int j(u)du\right]du}.$$

Таким образом, задавая функцию $j(u)<0$ можно определить $w(u)$.

Пусть $j(u)=-\dfrac{k}{u^2}$, где $k>0$ тогда $[ln w(u)]'=\dfrac{k}{u}+C_1$.

Интегрируя еще раз, получаем $ln w(u)=k\,ln u+C_1u+C_2$ или

(17) $w(u)=u^k e^{C_1u+C_2}$.

2. Пример действия механизма сильных штрафов

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим следующий пример [4]. Пусть

$$z=\frac{1}{2}rq\left(\frac{u^2}{q^2}+1\right),\ w(u)=wu^2, q(v)=pv+T$$

где

q - объем продукции, обеспечивающий предприятию минимальную себестоимость продукции;

r - минимальная себестоимость;

w - коэффициент, характеризующий влияние объема выпуска продукции на уровень природно-техногенного риска;

p - коэффициент, характеризующий эффективность использования средств, направляемых на снижение уровня риска;

T - показатель, характеризующий безопасность производства.

Зависимость $w(u)=wu^2$ получается из (17) если положить $k=2$, $C_1=0$, $w=e^{C_2}$. Тогда

$$x(u,v)=\frac{wu^2}{wu^2+pv+T}.$$

Если бы при функционировании предприятия не накладывались ограничения на уровень риска, объем выпуска на нем составил бы величину

$u^*=\dfrac{cq}{r}$, а уровень риска был бы равен $x^*=\dfrac{wc^2q^2}{wc^2q^2+Tr^2}$.

Если же допустимый уровень риска € таков, что $x^*>\text{€}$, то для определения объема выпуска необходимо решить систему уравнений (12), которую в этом случае можно переписать в виде

$$\begin{cases} c-\dfrac{r}{q}u-\dfrac{2(pv+T)}{up}=0 \\ \dfrac{wu^2}{wu^2+pv+T}-\text{€}=0 \end{cases}.$$

Решение этой системы дает

$$u=\frac{pqc\text{€}}{2qw(1-\text{€})+pr\text{€}},\ v=wpq^2c^2\frac{\text{€}(1-\text{€})}{[2qw(1-\text{€})+pr\text{€}]^2}-\frac{T}{p}.$$

Отсюда легко получить

$$\frac{\partial u}{\partial \text{€}}=qpc\frac{2qw}{[2qw-(2qw-pr)\text{€}]^2}>0,$$

и, соответственно,

$$\frac{dv}{d\text{€}}=wpc^2q^2\frac{2wq-(2wq+rp)\text{€}}{[rp\text{€}+2wq(1-\text{€})]^3}.$$

Из последнего выражения видно, что

$$
(18)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial x} > 0, & \text{если } x < \dfrac{2qw}{2qw + rp} \\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial x} < 0, & \text{если } x > \dfrac{2qw}{2qw + rp}
\end{cases}.
$$

То есть существует такой уровень риска, при котором объем средств, направляемых предприятием на поддержание уровня безопасности, оказывается максимальным.

Пусть $r=20$, $q=200$, $c=80$, $w=0{,}01$, $p=0{,}8$ и $T=1500$. Графики изменения объема выпуска и размера средств на поддержание уровня безопасности в зависимости от предельно допустимого уровня риска представлены на рис. 1 и рис. 2.

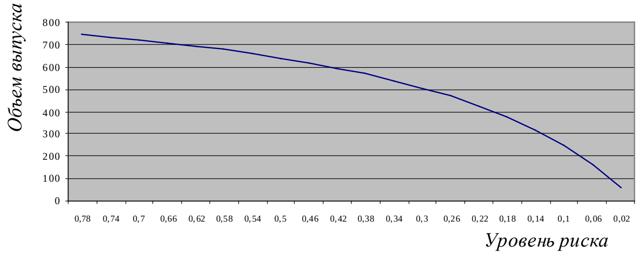

Рис. 1.

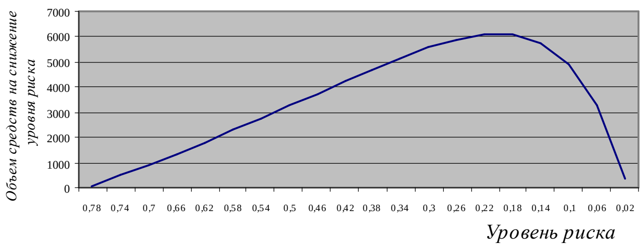

Рис. 2.

Из выражения (18) и рис. 2 видно, что максимальный объем средств, направляемых на снижение уровня риска, предприятие

направляет при установленном предельном уровне риске равным $0{,}2$.

На рис. 3 представлена зависимость изменения прибыли предприятия в зависимости от предельно допустимого уровня риска.

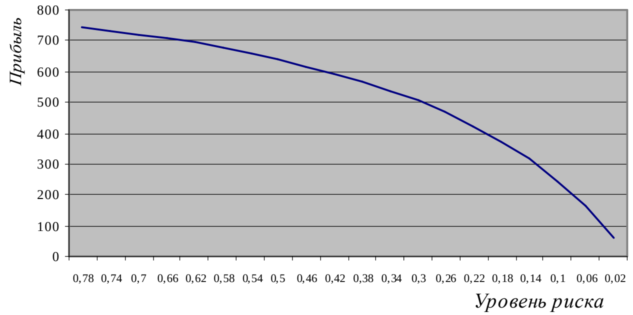

Рис. 3.

Анализ показывает, что в данном примере предприятию, при действии механизма сильных штрафов, имеет смысл начинать выпуск продукции, если предельно допустимый уровень риска больше $0{,}001$, в противном случае производственная деятельность принесет предприятию только убытки.

Литература

1. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1968, с. 735.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Физматгиз, 1962. с. 608.
4. Щепкин Д.А., Оценка эффективности механизма платы за риск. – Правовые и экономические проблемы управления безопасностью и рисками. Сборник статей. ФЦНТП КП «Безопасность», Москва, 2003, С. 92 – 98.