МОДЕЛЬ КОМПЛЕКСНЫХ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

А.Л. Суханов[1]
(*Академия ФСО, г. Орел*)

1. Введение

Работа посвящена моделированию динамики совместного развития взаимосвязанных научных направлений. Формулируется задача распределения ограниченных ресурсов между научными направлениями с целью максимизации комплексного критерия к моменту окончания планового периода. Данная задача сводится к задаче оптимального управления. Для ряда практически важных частных случаев получено аналитическое решение.

2. Описание модели. Общая постановка задачи

Аппарат дифференциальных уравнений и оптимального управления давно и успешно используется для построения моделей развития науки и образования [6, 7]. В настоящей работе основной акцент делается на взаимосвязь различных научных направлений на уровне содержания их результатов [4, 10], а не только на уровне ограничений ресурсного обеспечения.

Рассмотрим комплексное научное исследование, состоящее из n научных направлений. Степень развития i-го направления оценивается в непрерывной шкале показателем $x_i \in [0; 1]$, $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множеству научных направлений. Предположим, что заданы:

- вектор начальных состояний направлений $x_i^0 \in [0; 1]$, $i \in N$;

- законы динамики степеней развития:

(1) $\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), u_i(t))$, $i \in N$,

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор состояния научного исследования, $u_i(t) \geq 0$ – зависимость от времени ресурсного обеспечения i-го направления;

[1] *Статья написана совместно с Д.А. Новиковым.*

- критерий $G(x)$ степени развития научного исследования в целом.

Относительно правых частей системы дифференциальных уравнений (1) предположим, что $\forall\, i \in N$, $\forall\, x \in [0; 1]^n$ $\forall\, u_i \geq 0$ выполнено:

А.1. $f_i(x, 0) = 0$;

А.2. $f_i(x, u_i) \geq 0$;

А.3. $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \geq 0$, $j \neq i$;

А.4. $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial u_i} \geq 0$;

А.5. $\dfrac{\partial G(x)}{\partial x_i} \geq 0$.

Содержательные интерпретации введенных предположений следующие. Первое предположение означает, что при отсутствии ресурсного обеспечения научное направление не развивается. Второе предположение отражает отсутствие "забывания" научных результатов. Третье предположение соответствует "комлексности" научного исследования – чем выше уровень развития соседних направлений, тем легче развиваться каждому отдельному направлению. Четвертое предположение гласит, что скорость развития научного направления растет с ростом ресурсного обеспечения. Пятое предположение означает, что чем выше степень развития каждого из научных направлений, тем выше степень развития комплексного научного исследования.

Рассмотрим фиксированный горизонт планирования (плановый период) $T > 0$ и предположим, что существует ограничение $u \in U$ на множество допустимых значений ресурсного обеспечения[2] $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Предположим, что цель управления научным исследованием заключается в максимизации степени его развития к концу плано-

[2] *В зависимости от постановки задачи под компонентой данного вектора может пониматься либо текущее значение ресурсного обеспечения, либо траектория в целом.*

вого периода выбором допустимого ресурсного обеспечения с учетом закона (1) динамики степеней развития:

(2) $G(x(T)) \to \max\limits_{u \in U, (1)}$.

Можно сформулировать обратную задачу – достижения заданного уровня развития G_0 научного исследования с минимальными затратами ресурсного обеспечения: если задан функционал затрат $Q(u)$, то эта задача имеет вид

(3) $Q(u) \to \min\limits_{u \in U, (1), G(x) \ge G_0}$.

Если в качестве критерия эффективности принять время достижения заданного уровня развития G_0 научного исследования, то получим задачу

(4) $T \to \min\limits_{u \in U, (1), G(x(T)) \ge G_0}$.

В качестве критерия степени развития научного направления можно использовать приоритетный критерий:

(5) $G_a(x) = \sum\limits_{i \in N} a_i x_i$,

где $a_i > 0$, $i \in N$ – константы, такие, что $\sum\limits_{i \in N} a_i = 1$. Тогда G: $[0; 1]^n \to [0; 1]$. Второй альтернативой является критерий равномерного развития, вычисляемый как

(6) $G_{min}(x) = \min\limits_{i \in N} \{x_i\}$.

Отметим, что критерий (5) отражает "приоритеты развития науки" – столь модное на сегодня выделение приоритетных направлений, введение системы грантов и т.д. Такой подход оправдан в случае независимых научных направлений на уровне опытно-конструкторских разработок. Для фундаментальных исследований представляется более адекватным критерий (6), так как в этом случае априори неизвестно, где случится "прорыв", и необходимо равномерно развивать комплекс взаимообогащающих направлений. Поэтому в дальнейшем в настоящей работе будем использовать критерий (6).

Задачи (2)-(4) являются типовыми задачами оптимального управления (задача (4) – задача о быстродействии, (2) – задача терминального управления) и могут быть решены при известных

функциях $f_i(\cdot)$, функционалах $G(\cdot)$ и $Q(\cdot)$, константе G_0 и множестве U [1, 5]. Рассмотрим ряд частных случаев, позволяющих анализировать специфику комплексного развития научных исследований, в частности – взаимосвязь научных направлений.

3. Логистическая модель

Если научные направления не связаны, то, считая, что $x_i^0 \in (0; 1]$, $i \in N$, и принимая логистический закон изменения уровня развития ("внутренняя закономерность") [3, 8, 9], из (1) получим

(7) $\dot{x}_i(t) = g_i(u_i(t))\, x_i(t)\, (1 - x_i(t))$, $i \in N$.

Данная модель адекватна в случае, когда исследования начинаются практически "с нуля" и первое время уходит на обзор близких результатов и т.д.

Каждое из уравнений Бернулли, входящих в систему (7), может быть решено независимо:

(8) $$x_i(t, u_i(\cdot)) = \frac{x_i^0}{\left(x_i^0 \int_0^t g_i(u_i(t))\, e^{\int_0^t g_i(u_i(x))dx} dt + 1\right) e^{-\int_0^t g_i(u_i(x))dx}}, \; i \in N.$$

Если $u_i(t) = u_i$, $i \in N$, то получим набор "независимых" логистических кривых (см. рисунок 1)

(9) $$x_i(t, u_i) = \frac{x_i^0}{x_i^0 + (1 - x_i^0) e^{-g_i(u_i) t}}, \; i \in N.$$

Проанализируем выражение (9). Пусть задан требуемый уровень G_0 развития научного исследования. Получаем из (9) уравнение, связывающее время достижения данного уровня по каждому из направлений с соответствующим ресурсным обеспечением:

(10) $$g_i(u_i)\, t = \ln \frac{G_0 (1 - x_i^0)}{x_i^0 (1 - G_0)}, \; i \in N.$$

Если ресурсное обеспечение каждого научного направления постоянно во времени, то с точки зрения критерия (6) оптимальным будет такое распределение ресурсов, при котором все научные направления достигают требуемого уровня развития одновременно. Тогда, обозначая $\ln \frac{G_0(1-x_i^0)}{x_i^0(1-G_0)}$ = b_i, i Î N, из (10) получаем, что задача (4) примет вид: минимизировать время T выбором вектора $u = (u_1, u_2, …, u_n)$ Î U констант, таких, что

(11) $g_i(u_i) = \frac{b_i}{T}$, i Î N.

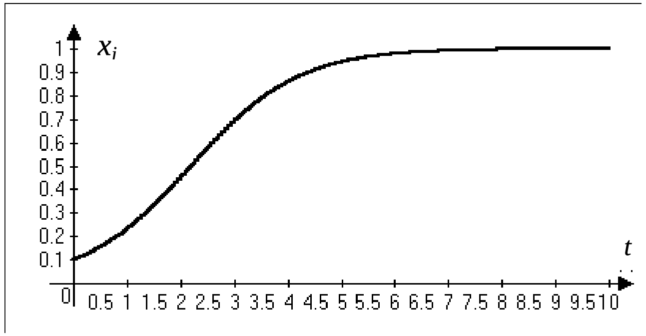

Рис. 1. Логистическая динамика уровня развития i-го научного направления (x_i^0 = *0.1*, $g_i(u_i) = 1$)

Пусть ограничение U имеет вид: $\sum_{i \in N} u_i \le R$, то есть в каждый момент времени суммарные ресурсы ограничены одной и той же величиной, а "скорость" $g_i(u_i)$ является линейной функцией:

(12) $g_i(u_i) = r_i\, u_i$, i Î N,

где $r_i > 0$ – константа, которая может интерпретироваться как "потенциал" i-го научного направления или эффективность деятельности соответствующего научного коллектива.

Применяя метод множителей Лагранжа, из (11) и (12) получаем, что

(13) $u_i = R \frac{b_i / r_i}{\sum_{j \in N} b_j / r_j}$, i Î N,

(14) $T = \frac{\sum_{j \in N} b_j / r_j}{R}$.

Содержательно, выражение (13) означает, что оптимальное количество ресурса, выделяемое i-му направлению, пропорционально необходимому приросту степени его развития и обратно пропорционально эффективности деятельности соответствующего научного коллектива (отметим, что при использовании приоритетного критерия результат получился бы обратным). Из выражения (14) следует, что время достижения требуемого уровня развития обратно пропорционально количеству ресурса, расходуемого в единицу времени.

Таким образом, обоснована справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Оптимальное (с точки зрения критерия максимально быстрого – задача (4) – равномерного развития) распределение ресурсов между независимыми научными направлениями в рамках логистической модели определяется выражениями (13) и (14).

Отметим, что выражение (14) дает и решение задач (2) и (3) при подстановке соответствующих выражений. Если критерием являются суммарные затраты $Q(u) = T \sum_{i \in N} u_i$ на ресурсное обеспечение, то в рамках введенных предположений задача (3) сводится к задаче (4), так как расход ресурсов не изменяется во времени.

Из (10), (13) и (14) следует, что для динамики степени развития научного исследования справедлива следующая оценка:

(15) $G_{log}(t) = \frac{1}{1 + e^{a_{\log}/H} e^{-tR/H}}$,

где $H = \sum_{i \in N} 1/r_i$, $a_{log} = \sum_{i \in N} (1/r_i) \ln(1/x_i^0 - 1)$.

Начальное состояние может быть оценено как

(16) $G_{\log}^0 = \frac{1}{1 + e^{a_{\log}/H}}$.

Выражения (15) и (16) могут использоваться для построения системы комплексного оценивания результатов научных исследований (отметим, что для $n = 1$ выполнено $G^0_{\log} = x^0$).

4. Экспоненциальная модель

Если научные направления не связаны, то, принимая экспоненциальный закон изменения уровня развития [9], из (1) получим

(17) $\dot{x}_i(t) = g_i(u_i(t))\,(1 - x_i(t)),\ i \in N.$

Данная модель адекватна в случае наличия значительного научного задела по каждому из направлений.

Каждое из линейных уравнений, входящих в систему (17), может быть решено независимо. При $u_i(t) = u_i,\ i \in N$, получим набор "независимых" экспоненциальных кривых (см. рисунок 2)

(18) $x_i(t, u_i) = 1 - (1 - x_i^0)\ e^{-u_i r_i t},\ i \in N.$

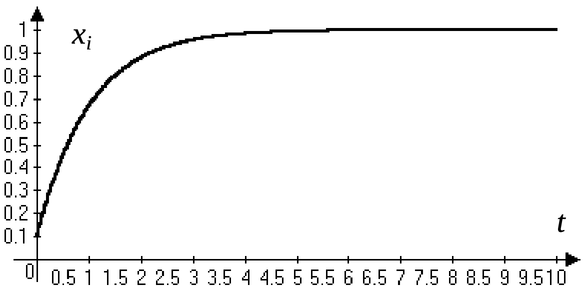

Рис. 2. Экспоненциальная динамика уровня развития i-го научного направления ($x_i^0 = 0.1$, $g_i(u_i) = 1$)

По аналогии с (13) и (14) получаем для рассматриваемой модели:

(19) $u_i = R\,\dfrac{r_i / r_i}{\sum_{j \in N} r_j / r_j},\ i \in N,$

(20) $T = \dfrac{\sum_{j \in N} r_j / r_j}{R},$

где $r_i = \ln \dfrac{1 - x_i^0}{1 - G_0}$ (отметим, что $b_i = r_i + \ln(g_0 / x_i^0)$), $i \in N$.

Содержательные интерпретации выражений (19) и (20) аналогичны содержательным интерпретациям, соответственно, выражений (13) и (14). Таким образом, обоснована справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. Оптимальное (с точки зрения критерия максимально быстрого – задача (4) – равномерного развития) распределение ресурсов между независимыми научными направлениями в рамках экспоненциальной модели определяется выражениями (19) и (20).

Отметим, что, как и выше, выражение (20) дает и решение задач (2) и (3) при подстановке соответствующих выражений. Если критерием являются суммарные затраты $Q(u) = T \sum_{i \in N} u_i$ на ресурсное обеспечение, то в рамках введенных предположений задача (3) сводится к задаче (4), так как расход ресурсов не изменяется во времени.

Из (18)-(20) следует, что для динамики степени развития научного исследования справедлива следующая оценка:

(21) $G_{exp}(t) = 1 - \exp\left\{ \sum_{i \in N} (1/r_i) \ln(1 - x_i^0) / H \right\}\ e^{-tR/H}.$

Начальное состояние может быть оценено как

(22) $G^0_{\exp} = 1 - \exp\left\{ \sum_{i \in N} (1/r_i) \ln(1 - x_i^0) / H \right\}.$

Выражения (21) и (22) могут использоваться для построения системы комплексного оценивания результатов научных исследований (отметим, что для $n = 1$ выполнено $G^0_{\exp} = x^0$).

5. Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена динамическая модель комплексных научных исследований, в рамках которой задача распределения ресурсов между научными направлениями сведена в общем случае к задаче оптимального управления. Для логистической и экспоненциальной моделей получены аналитические решения. Перспективным направлением дальнейших исследований представляется получение аналитических решений для более сложных случаев взаимного влияния научных направлений.

Литература

1 Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1968. – 408 с.

2 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять организациями. М.: Синтег, 2004. – 400 с.

3 Венда В.Ф. Системы гибридного интеллекта: эволюция, психология, информатика. М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.

4 Кузьмицкий А.А., Новиков Д.А. Организационные механизмы управления развитием приоритетных направлений науки и техники. М.: ИПУ РАН, 1993. – 68 с.

5 Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. – 576 с.

6 Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: введение в нелинейную динамику. М.: Наука, 1997. – 255 с.

7 Милованов В.П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация. М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 264 с.

8 Нижегородцев Р.М. Информационная экономика. М.: МГУ, 2002. т. 1 – 163 с., т. 2 – 173 с., т. 3 – 170 с.

9 Новиков Д.А. Закономерности итеративного научения. М.: ИПУ РАН, 1998. – 96 с.

10 Поспелов Г.С., Ириков В.А., Курилов А.Е. Процедуры и алгоритмы формирования комплексных программ. М.: Наука, 1985. – 424 с.