О ТРАЕКТОРИЯХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СТРУКТУРЫ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

П.В. Рожихин
(*Волгоградский государственный университет, Волгоград*)

Введение

Несмотря на бурное за последние десятилетия развитие теории активных систем как раздела теории управления социально-экономическими системами, найдется не так много работ, посвященных вопросам синтеза состава и структуры активных систем. Еще меньше работ посвящено изучению преобразований структуры многоуровневой системы, тогда как это направление выделено как перспективное российским научным центром изучения активных систем – Институтом проблем управления РАН [1].

В настоящей работе преобразования иерархической системы описываются «непрерывной» траекторией – некоторым упорядоченным множеством графов ее структуры. Для этого вводится понятие элементарного преобразования графа, при котором перестраивается лишь некоторая «малая» часть структуры. Для определения наилучшей последовательности преобразований структуры относительно некоторого критерия можно ставить и решать различные оптимизационные задачи. Кроме того, иногда бывает полезно оценить мощность класса оптимальных траекторий и класса близких в каком-то смысле к оптимальным. В настоящей работе строятся распределения числа траекторий по интервалам стоимости.

1. Описание модели

Рассмотрим следующую модель многоуровневой организационной системы. Система располагает некоторым дискретным конечным множеством исполнителей $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Зададим сложность (потенциал) $C(a_i)$ каждого исполнителя a_i. Для функционирования системы исполнители должны быть организованы в группу $r = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Кроме того, могут быть организованы некоторые промежуточные группы $g \subset \{a_1, \ldots, a_n\}$ – подмножества множества исполнителей. Система описывается ориентированным графом организации, а именно деревом $G=(V,E)$. В вершинах $v \in V$ находятся группы исполнителей g, причем в корне дерева – группа r, в листьях – $a_1, \ldots, a_n$. Кроме того, для любых групп $g, g_1, \ldots, g_k$, связанных соотношением $g = g_1 \cup \ldots \cup g_k$ выполнено следующее. В графе организации G из вершин с группами $g_1, \ldots, g_k$ идут дуги в вершину с группой g. Будем говорить, что вершина с группой g – управляющая для вершин с группами $g_1, \ldots, g_k$, а те, в свою очередь, являются подчиненными вершине с группой g.

Для любой вершины $v \in V$ графа графе $G=(V,E)$ обозначим через $Q_G(v) = \{u : u \in V, (u,v) \in E\}$ множество вершин, из которых в графе G идут ребра в v.

Определение. Для любой вершины $v \in V \setminus N$ звеном с вершиной f назовем граф $Z_G(v) = (\{v\} \cup Q_G(v), \{(u,v) : u \in Q_G(v)\})$.

Определение. Граф организации, состоящий только из одного звена, назовем веерным.

Определение. Элементарным упрощением организации назовем изменение соответствующего ей графа, состоящее в слиянии подчиненной вершины f_1 с непосредственно управляющей ей вершиной r, при котором все вершины, подчиненные f_1, становятся подчиненными r.

Определение. Пусть граф организации содержит вершину r, которой подчинено $k \geq 3$ вершин. Элементарным усложнением организации назовем изменение соответствующего ей графа, состоящее в появлении новой вершины f_1 непосредственно подчиненной вершине r. При этом l вершин, $2 \leq l \leq k-1$, ранее подчиненные r, становятся подчиненными f_1.

Определение. Элементарное усложнение и упрощение организации назовем элементарным преобразованием.

На рис. 1 элементарному упрощению отвечает переход от левой организации к правой (вершина f_1 удалена из организации). Элементарному усложнению отвечает переход от правой организации к левой (добавлена вершина f_1). Треугольниками на рисунке обозначены поддеревья организации.

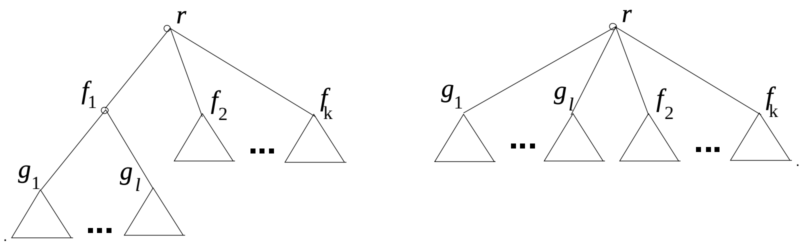

Рис. 1. Элементарное преобразование организации

Определение. Непрерывной траекторией (просто траекторией) назовем упорядоченное множество графов, в котором каждые два соседних графа, получаются один из другого элементарным преобразованием.

Определение. Траектории, отвечающие однонаправленному преобразованию организаций (упрощению или усложнению), назовем траекториями структурно чистых типов.

Далее будем рассматривать только траектории структурно чистых типов.

2. Число траекторий

Пусть задана начальная веерная организация, описываемая графом G_1. Пусть n – число листьев графа G_1. Найдем число всевозможных непрерывных траекторий, соединяющих граф G_1 со всевозможными 2-организациями. Обозначим $T(G_1)$ множество таких траекторий, а $S(n)$ – их число. Очевидно, что $S(2)=1$, $S(3)=3$. Разобьем множество $T(G_1)$ на n–2 непересекающихся подмножеств $T_k(G_1), k=\overline{1,n-2}$. В подмножество $T_{k-1}(G_1)$, попадут все траектории, у которых первым элементарным преобразованием является усложнение с появлением вершины, звено которой содержит k листьев. Число таких преобразований равно числу способов выбора k вершин из n, то есть числу сочетаний из n по k – C_n^k. После первого преобразования получим граф G_2, состоящий из двух поддеревьев G_2' и G_2'' с числом листьев k и n–k+1 соответственно. Число траекторий в множестве $T(G_2)$, если рассмотреть преобразования только в графе G_2', равно $S(k)$. Если рассмотреть преобразования только в графе G_2'', то число траекторий множества $T(G_2)$ равно $S(n-k+1)$. Траектории из множества $T(G_2)$ содержат n–3 элементарных усложнения (n–2 графа) – k–2 усложнения в графе G_2' и n–k–1 усложнения в графе G_2''. Чтобы учесть порядок, в котором следуют преобразования в графе G_2' и G_2'', необходимо найти число перестановок n–3 элементов, где k–2 элементов первого вида и n–k–1 элементов второго вида. Это число определяется формулой $\frac{(n-3)!}{(k-2)!(n-k-1)!}$. Тогда число элементов в подмножестве $T_{k-1}(G_1)$ равно $C_n^k\frac{(n-3)!}{(k-2)!(n-k-1)!}S(k)S(n-k+1)$. Суммируя от 1 до n–1, получим

$$(1)\quad S(n)=\sum\nolimits_{k=\overline{2,n-1}}C_n^kC_{n-3}^{k-2}S(k)S(n-k+1)$$

По этой формуле легко найти $S(4)=30$, $S(5)=630$, $S(6)=22680$, $S(7)=1247400$. Заметим, что эти значения описываются рекуррентной формулой $S(n+1)=(n-1)(2n-1)S(n)$. Из этой формулы легко находим

$$(2)\quad S(n+1)=(n-1)!\prod\nolimits_{i=\overline{1,n}}(2i-1)=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$$

Однако, пока не удалось доказать, что для произвольного n выполнено

$$(3)\quad \sum\nolimits_{k=\overline{2,n}}C_{n+1}^kC_{n-2}^{k-2}S(k)S(n-k+2)=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$$

3. Функционалы траектории

Определение. Функционалом стоимости траектории назовем положительнозначную функцию $\Phi:T(G_1,G_2)\rightarrow R_+\cup\{+\infty\}$, ставящую в соответствие каждой траектории ее стоимость.

Определим функционал стоимости траектории следующим образом. Каждой вершине $v\in V\setminus N$ графа $G=(V,E)$ поставим в соответствие ее стоимость. Если вершина содержит группу

$g = g_1 \cup K \cup g_k$, то ее стоимость определяется функционалом стоимости вершины $P(g) = P(g_1, K, g_k)$. Под стоимостью организации будем понимать суммарную стоимость всех вершин, кроме листьев, входящих в граф организации.

Определение. Стоимостью траектории назовем суммарную стоимость всех входящих в нее графов организаций.

Кроме функционала стоимости траектории можно также рассмотреть функционал стоимости реорганизации графов вдоль траектории. Введем его в рассмотрение следующим образом. Построим метрику на графах организации так, как это сделано в работе [2]. Для каждой вершины $a \in N$ зададим стоимость включения вершины в звено Z и стоимость исключения вершины из звена. Будем обозначать их $r'(a,Z)$ и $r''(a,Z)$ соответственно. Предположим, что $r'(a,Z)$ и $r''(a,Z)$ не зависит от звена Z, то есть $r'(a,Z) = r'(a)$ и $r''(a,Z) = r''(a)$. Кроме того, будем считать, что для всех $a \in N$ выполнено $r'(a) = r''(a) = r(a) > 0$.

Определим стоимость реорганизации группы исполнителей g в группу h $r(g,h) = \sum_{a \in g|h} r(a) + \sum_{a \in h|g} r(a)$. При этом стоимость реорганизации группы является метрикой на множестве групп [1]. Стоимость реорганизации произвольного набора групп Q_1 в набор групп Q_2 определим следующим образом $r(Q_1, Q_2) = \min \sum_{i=\overline{1,k}} r(g_i, h_i)$, где k – наибольшее число групп в наборах Q_1 и Q_2. Набор меньшей мощности дополняется пустыми группами до мощности k. Минимум берется по всевозможным разбиениям наборов Q_1 и Q_2 на пары (g_i, h_i), $i = \overline{1,k}$. Стоимость реорганизации набора групп является метрикой на наборах непустых групп [1]. Для произвольных деревьев $G_1=(V_1,E_1)$ и $G_2=(V_2,E_2)$, описывающих некоторые организационные системы, стоимостью реорганизации G_1 в G_2 назовем величину $r(G_1, G_2) = \min \sum_{i=\overline{1,k}} r(Q_{G_1}(g_i), Q_{G_2}(h_i))$, где k – максимальное число вершин в графах G_1, G_2, множество вершин меньшей мощности дополнено изолированными вершинами до мощности k. Минимум берется по всевозможным разбиениям множеств V_1 и V_2 на пары $(g_i, h_i), i = \overline{1,k}$. Определенная таким образом стоимость реорганизации графов является метрикой на множестве графов организации без изолированных вершин.

Найдем стоимость реорганизации деревьев, полученных одно из другого элементарным преобразованием. Пусть $G_2=(V_2,E_2)$ получено из $G_1=(V_1,E_1)$ в результате элементарного усложнения. Обозначим $g_1,\ldots,g_l$ вершины дерева G_1, которые не участвуют в преобразовании (то есть звенья с вершинами $g_1,\ldots,g_l$ не изменились), и g – вершина, преобразуемого звена. Обозначим h' и h'' вершины звеньев дерева G_2, образованных в результате преобразования. Тогда дерево G_1 состоит из вершин $g, g_1,\ldots,g_l$, а дерево G_2 из вершин $h', h'', g_1,\ldots,g_l$. Не уменьшая общности, предположим, что $Q_{G_1}(g) = \{g_1, g_2,\ldots,g_m\}$, $Q_{G_2}(h'') = \{g_1, g_2,\ldots,g_k\}$, $Q_{G_2}(h') = \{g, g_{k+1},\ldots,g_m\}$, где $k < m \le l$.

Будем считать, что $r(G_1, G_2) = \sum_{i=\overline{1,k}} r(Q_{G_1}(x_i), Q_{G_2}(y_i))$, где $x_i \in V_1$, $y_i \in V_2$[1]. Предположим, что в сумму входит слагаемое вида $r(Q_{G_1}(f_i), Q_{G_2}(y))$, $y \ne f_i$. Поскольку $f_i \in V_2$, то в сумму также войдет слагаемое $r(Q_{G_1}(x), Q_{G_2}(f_i))$. В силу того, что r – метрика, справедливо неравенство

$$r(Q_{G_1}(x), Q_{G_2}(f_i)) + r(Q_{G_1}(f_i), Q_{G_2}(y)) \ge$$
$$\ge r(Q_{G_1}(x), Q_{G_2}(y)) + r(Q_{G_1}(f_i), Q_{G_2}(f_i)).$$

Из этого неравенства и того обстоятельства, что в выражении для стоимости реорганизации $r(G_1, G_2)$ минимум берется по всем сочетаниям (x_i, y_i), следует, что в выражение $r(G_1, G_2)$ не войдут слагаемые вида $r(Q_{G_1}(x), Q_{G_2}(f_i))$ и $r(Q_{G_1}(f_i), Q_{G_2}(y))$, где

---

[1] *Если необходимо, множество вершин V_1 или V_2 дополнено изолированными вершинами. Для изолированной вершины $Q(v) = \varnothing$.*

$x \neq f_i$ и $y \neq f_i$ соответственно. Тогда для вычисления стоимости реорганизации получим выражение: $r(G_1, G_2) = \min(r_1, r_2)$, где
$r_1 = r(Q_{G_1}(g), Q_{G_2}(h')) + r(\varnothing, Q_{G_2}(h''))$,
$r_2 = r(Q_{G_1}(g), Q_{G_2}(h'')) + r(\varnothing, Q_{G_2}(h'))$.

Из определения стоимости реорганизации произвольного набора групп следуют равенства

$$r(\varnothing, Q_{G_2}(h'')) = \sum_{i=\overline{1,k}} r(\varnothing, g_i) = r(\varnothing, h''),$$

$$r(\varnothing, Q_{G_2}(h')) = r(\varnothing, h'') + \sum_{i=\overline{k+1,m}} r(\varnothing, g_i) = r(\varnothing, h').$$

Будем считать, что $r(Q_{G_1}(g), Q_{G_2}(h')) = \sum_{i=\overline{1,m}} r(g_i, y_i)$, где $y_i \in Q_{G_2}(h') \cup \varnothing$. Покажем, что в сумму $\sum_{i=\overline{1,m}} r(g_i, y_i)$ не войдут слагаемые вида $r(g_i, \varnothing)$, где $i = \overline{k+1, m}$. Действительно, если в сумму войдет такое слагаемое, то поскольку $g_i \in Q(h')$, в сумму также войдет слагаемое $r(x, g_i)$, $x \neq g_i$. Но стоимость реорганизации группы является метрикой, поэтому выполнено неравенство $r(x, g_i) + r(g_i, \varnothing) \geq r(x, \varnothing) + r(g_i, g_i)$, и, следовательно, слагаемые вида $r(g_i, \varnothing)$ ($i = \overline{k+1, m}$) в сумму $\sum_{i=\overline{1,m}} r(g_i, y_i)$ не войдут.

Покажем, что в сумму $\sum_{i=\overline{1,m}} r(g_i, y_i)$ не войдут также слагаемые $r(g_i, h'')$, $i = \overline{k+1, m}$. Действительно, если в сумме будет слагаемое $r(g_i, h'')$, то, поскольку $g_i \in Q(h'')$, в сумму также войдет слагаемое $r(x, g_i)$, $x \neq g_i$. Но стоимость реорганизации группы является метрикой, поэтому выполнено неравенство $r(x, g_i) + r(g_i, h'') \geq r(x, h'') + r(g_i, g_i)$, и, следовательно, слагаемые вида $r(g_i, h'')$ ($i = \overline{k+1, m}$) в сумму $\sum_{i=\overline{1,m}} r(g_i, y_i)$ также не войдут. Аналогично можно показать, что в сумме не будет слагаемых $r(g_i, g_j)$, где $i \neq j$.

Из вышесказанного следует, что в сумму $\sum_{i=\overline{1,m}} r(g_i, y_i)$ войдут слагаемые $r(g_i, g_i) = 0$, $i = \overline{k+1, m}$. Остается открытым вопрос из какой группы g_i, $i = \overline{1,k}$, будет организована группа h''. Не уменьшая общности будем считать, что $r(\varnothing, g_1) \geq r(\varnothing, g_2) \geq r(\varnothing, g_i)$, $i = \overline{3,k}$. Сравним величины $r(g_1, h'') + r(g_2, \varnothing)$ и $r(g_1, \varnothing) + r(g_2, h'')$.

$$r(g_1, \varnothing) + r(g_2, h'') - r(g_1, h'') - r(g_2, \varnothing) =$$
$$= 2\left(\sum_{a \in g_1} r(a) - \sum_{a \in g_2} r(a)\right) = 2(r(g_1) - r(g_2))$$

Отсюда следует, что $r(g_1, \varnothing) + r(g_2, h'') \geq r(g_1, h'') + r(g_2, \varnothing)$.

Таким образом
$r(Q_{G_1}(g), Q_{G_2}(h')) = r(g_1, h'') + \sum_{i=\overline{2,k}} r(g_i, \varnothing) = 2r(g_1, h'')$.

Аналогично можно легко показать, что справедливо
$r(Q_{G_1}(g), Q_{G_2}(h'')) = \sum_{i=\overline{k+1,m}} r(g_i, \varnothing) = r(\varnothing, h') - r(\varnothing, h'')$.

Итак, стоимость реорганизации дерева *G₁*=(*V₁*,*E₁*) в дерево *G₂*=(*V₂*,*E₂*) равна

(4) $r(G_1, G_2) = \min(2r(g_1, h'') + r(\varnothing, h''), 2r(\varnothing, h') - r(\varnothing, h''))$.

Предположим, что $\forall a \in N \; r(a) = const$. Для любой вершины $g \in V_1 \cup V_2 \setminus N$ обозначим *n*(*g*) число листьев в дереве с корнем *g*.Тогда (4) перепишется в виде

(5) $r(G_1, G_2) = r(a) \min(3n(h'') - 2n(g_1), 2n(h') - n(h''))$,

где g_1: $r(\varnothing, g_1) = \max_{i=\overline{1,k}} r(\varnothing, g_i)$.

Если траектория состоит из последовательности графов $G_1, G_2, ..., G_t$, то функционалом стоимости реорганизации графов вдоль траектории назовем сумму $\sum_{i=\overline{1,t-1}} r(G_i, G_{i+1})$.

4. Распределение числа траекторий

Построим распределение числа траекторий по интервалам значений функционала стоимости траекторий. Зададим множество исполнителей $\{a_1, \ldots, a_6\}$. Сложность исполнителя $C(a_i)$ будем выбирать случайно из диапазона (1,3). Для произвольной группы исполнителей f определим ее сложность по формуле $C(f) = (\sum_{a_i \in f} C(a_i)^{1/a})^a$, где $a \in (0,1)$. В качестве функционала стоимости вершины возьмем $P(g) = [C(g_1) + \ldots + C(g_k)]^b$, где $g = g_1 \cup \ldots \cup g_k$ и $b \in (1,+\infty)$. При таком выборе a и b пока не существует аналитических методов для нахождения графа, минимизирующего функционал стоимости организации [2]. Найдем стоимость всевозможных непрерывных траекторий, соединяющих веерный граф со всевозможными 2-организациями, со значениями параметров $a = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ и $b = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5)$.

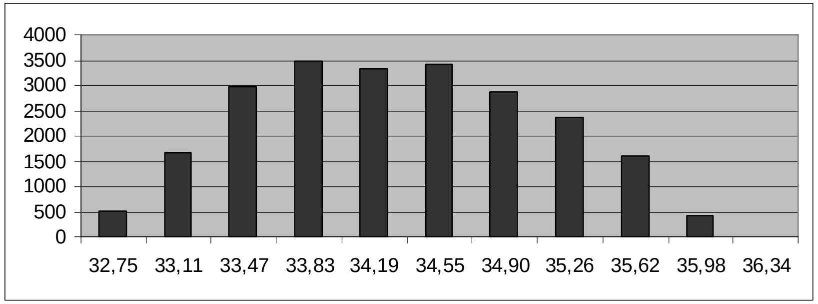

Рис. 2. Распределение числа траекторий по интервалам значений функционала стоимости траектории[1]

Для каждой пары (a, b) мы провели по пять построений распределения со случайным выбором сложностей исполнителей из указанного диапазона. Полученные множества траекторий мы разбивали на 11 подмножеств. В первое подмножество попадали те, траектории, стоимость которых была минимальна среди всего множества траекторий. Во второе – те, стоимость которых отличалась от минимальной стоимости не более, чем на 10%. В третье – те, стоимость которых отличалась от минимальной более, чем на 10%, но менее, чем на 20% и т.д. В одиннадцатое подмножество попали траектории, стоимость которых была максимальна среди всего множества траекторий.

Оказалось, что почти все распределения имеют довольно схожий вид (рис. 2). Только для значений $a = 0.2$, $b = 2.5$ вид распределения принципиально отличался (рис. 3). Дальнейшее исследование показало, что аналогичную картину будем наблюдать и для других значений $b > 2.5$. Кроме того, смену картины распределения можно наблюдать и для других значений a. А именно для значений (a, b): (0.4,2.9), (0.6,3.5), (0.8,4.5) – вид распределения схож с распределением, изображенным на рис. 2, а для значений (0.4,3.0), (0.6,3.6), (0.8,5.0) – с распределением на рис. 3.

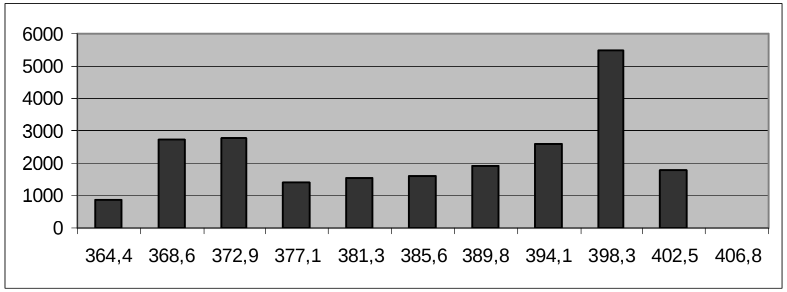

Рис. 3. Распределение числа траекторий по интервалам значений функционала стоимости траектории при $a = 0.2$, $b = 2.5$

Для получения распределения числа траекторий относительно значений функционала стоимости реорганизации графов вдоль траектории зададим для каждой вершины $a \in N$ стоимость включения вершины в звено $r(a) = 1$. Вид распределения показан на рисунках 4 и 5.

---

[1] *По оси X отложены стоимости траекторий, по оси Y – число траекторий данной стоимости.*

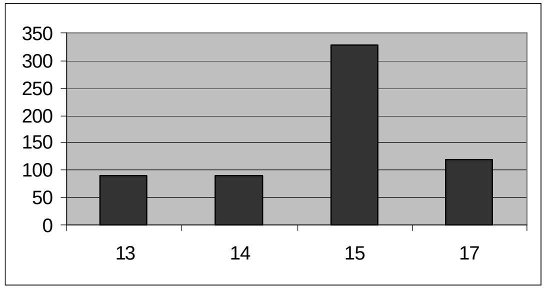

Рис. 4. Распределение числа траекторий по интервалам значений функционала стоимости реорганизации при $n = 5$

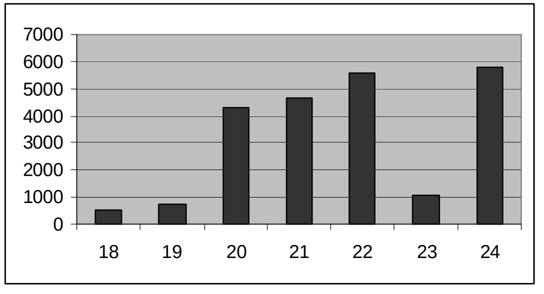

Рис. 5. Распределение числа траекторий по интервалам значений функционала стоимости реорганизации при $n = 6$

Литература

1. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем состояние и перспективы*. М.: Синтег, 1999. – 128 с.
2. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Оптимальные иерархические структуры*. М.: ИПУ РАН, 2003. – 214 с.