МИНИМАКСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА В АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ

Бурков В.Н., Опойцев С.В.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)

Введение

В работе рассматривается задача распределения ограниченных ресурсов по критерию максимизации минимального уровня экологической безопасности. Стандартные способы, связанные с введением стимулирования за уровень экологической безопасности, в данном случае не обеспечивают достоверности сообщаемой информации и оптимального распределения ресурса. Предлагается, на первый взгляд, «экзотические» целевые функции активных элементов, которые, тем не менее, решают проблему достоверности информации и оптимальности распределения ресурсов.

1. Постановка задачи

В теории активных систем достаточно подробно изучалась задача распределения ресурса [1]

(1) $\sum_i j_i(x_i) \to \max, \quad \sum x_i = R$

в условиях отсутствия достоверной информации у центра, распределяющего ресурс, о «производственных» функциях $j_i(x_i)$ активных элементов (АЭ)

При этом предполагалось, что *i*-й АЭ преследует цель максимизации собственной прибыли

(2) $Д_i = j_i(x_i) - l\, x_i$,

λ – цена, x_i – количество полученного ресурса.

Если, например, $j_i(x_i) = r_i\sqrt{x_i}$, и в каждом плановом периоде *i*-й АЭ вместо r_i сообщает в ЦО величину φ_i, а центр решает задачу (1), считая сообщение истинным, то получается

(3) $x_i = \dfrac{S_i^2}{\sum_j S_j^2} = R, \quad l = \dfrac{1}{2}\sqrt{\sum_j S_j^2 / R}$,

где цена λ приравнивается множителю Лагранжа в задаче (1). После подстановки законов (3) в прибыль (2) возникает игра *n* элементов с функциями выигрыша

$$Д_i(S) = S_j(r_i - \frac{1}{2}S_i)\sqrt{R / \sum_j S_j^2}.$$

Равновесием Нэша [1] этой игры оказывается точка $S^* = \{S_1^*, S_2^*, ..., S_n^*\}$, в которой $S_i^* \approx r_i$ причем равенство $S_i^* \approx r_i$ выполняется тем точнее, чем больше элементов в системе. Плюс к тому, в равновесии по Нэшу обеспечивается приблизительный оптимум по критерию (1).

Таким образом, законы управления системой (3) дают в пределе оптимальное распределение ресурса, а также достоверную информацию о значениях r_i. Главной причиной успешного решения задачи является при этом согласованность индивидуальных критериев (2) с критерием (1).

Однако в ряде случае требуется распределение ресурса по специальным критериям, и тогда естественный критерий прибыли (2) оказывается препятствием на пути решения задач, которые рассматриваются далее.

2. Проблемы безопасности

Характерным примером задачи распределения ресурсов, где постановка (1) не отражает суть проблемы, является обеспечение региональной безопасности. Если $\varphi_i(x_i)$ обозначает уровень безопасности (например, экологической) *i*-го региона при выделяемом количестве ресурса x_i, то для системы в целом наиболее подходящей выглядит постановка задачи

(4) $\min_i j_i(x_i) \to \max, \ \sum_j x_j = R$.

С другой стороны, если при этом интерес *i*-го региона так или иначе замыкается на целевую функцию типа (2), то о достижении оптимума (1) в равновесии говорить не приходится, поскольку в очень свободных предположениях [1] в равновесии обеспечивается оптимум (1).

Поэтому единственный выход из положения заключается в синтезе специальных целевых функций для АЭ (в данном случае –

регионов). Другими словами, в организации специальных «правил игры».

Для решения задачи (4) эффективными (при выполнении некоторых естественных условий) оказываются целевые функции

(5) $Д_i = l\, x_i - \int_0^{x_i} j_i(x)\, dx$

Способ распределения ресурса «почти» не играет роли. Годится, например, пропорциональное распределение

$$x_i = \frac{R S_i}{\sum_i S_j},$$

где S_i – запрос на ресурс или какой-то другой параметр. Что касается общего параметра λ ("цены"), то его выбор должен быть подчинен связи с общественной задачей (4). В данном случае условиями оптимума (4) являются

$$j_i(x_i) = l,\ i = 1,\dots,n, \qquad \sum x_j = R,$$

откуда следует, что λ определяется решением уравнения

$$\sum j_i^{-1}(l) = R.$$

Требуемый результат (оптимум (4) в равновесии) получается в силу следующих обстоятельств. Равновесие возникающей игры по Нэшу определяется решением следующей системы уравнений.

$$\frac{\partial Д_i}{\partial S_i} = \frac{\partial Д_i}{\partial x_i}\ \frac{\partial x_i}{\partial S_i} - \frac{\partial Д_i}{\partial l}\ \frac{\partial l}{\partial S_i} = 0,$$

При условии $n >> 1$ плюс ограниченная соизмеримость функций $j_i(x_i)\left(\left|j_i/j_j\right| < M\right)$ – *т* индивидуальное влияние S_i на «цену» λ мало по сравнению с влиянием S_i на получаемый ресурс x_i. Поэтому

$$\frac{\partial Д_i}{\partial l} \cdot \frac{\partial l_i/\partial S_i}{\partial x_i/\partial S_i} \approx 0,$$

откуда следует, что в равновесии по Нэшу выполняются условия

$$\frac{\partial Д_i}{\partial x_i} = l - j_i \approx 0,\ i = 1,\dots,n,$$

совпадающие с условиями оптимума по критерию (4).

Пример. Пусть $j_i(x_i) = r_i\sqrt{x_i}$. Регион (i-ый АЭ) сообщает в центр вместо r_i оценку S_i. Центр решает задачу (4) для функций $S_i\sqrt{x_i}$, тогда

$$S_i\sqrt{x_i} = l, \quad \sum_j x_j = R, \quad i = 1,\dots,n,$$

откуда

$$x_i = \frac{R}{S_i^2}\left(\sum_j \frac{1}{S_j^2}\right)^{-1}, \quad l^2 = R\left(\sum_j \frac{1}{S_j^2}\right)^{-1}$$

Условия «слабого влияния» в данном случае означают существование такой константы M, что

$$\left|\frac{r_i}{r_j}\right| < M < \infty,\ i, j = 1,\dots,n.$$

Тогда $\dfrac{\partial Д_i}{\partial l} \cdot \dfrac{\partial l_i/\partial S_i}{\partial x_i/\partial S_i} = 0$, при $n \to \infty$, что обеспечивает в пределе (при $n \to \infty$) точное решение задачи (4) в равновесии S^* по Нэшу.

Замечание. В общем случае монотонных выпуклых (вверх) $\varphi_i(x_i)$ условие слабого влияния сводится к соизмеримости функций:

(6) $\left|\dfrac{j_i(x_i)}{j_j(x_j)}\right| < M < \infty,\ i, j = 1,\dots,n,\ x_i > 0.$

Последнее условие может быть ослаблено до требования $\left|j_i/j_j\right| < M$ в некоторой ограниченной области распределения ресурсов. Это имеет смысл, например, в ситуации $j_i(x_i) \sim x^{a_i}$ когда все l_i заключены в некотором диапазоне

$$d_i \in [e, d], \quad e > 0, \quad d < 1.$$

Тогда распределение ресурса по критерию (4) удовлетворяет условию $0 < g < x_i < R$ для некоторого δ_i и в этом диапазоне неравенство $\left|j_i/j_j\right| < M$ оказывается выполненным, тогда как (6) не имеет места.

3. Распределение многомерного ресурса и другие постановки задачи

Модельное описание задачи распределения многомерного ресурса обычно отталкивается от производственных функций Кобба-Дугласа $j\,(x) = r\,x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$, $\sum_j d_j = 1,\ d_j > 0.$

Пусть для простоты, речь идет о распределении двух видов ресурсов, и

(7) $j_i(x_i, y_i) = r_i x_i^{d_i}\,\Lambda\ y_i^{b_i},\ d_i + b_i < 1$

В остальном система функционирует так же, как и в предыдущем разделе. Критерий типа (4) в данном случае имеет вид

(8) $\min_i j_i(x_i, y_i) \to \max,\quad \sum_j x_j = X,\quad \sum_j y_j = Y$

Вообще говоря, оптимизационные задачи подобного сорта можно решать единообразно, вычисляя стационарные точки лагранжиана

$$L(x, y, l, m) = f(x, y) - l\left(\sum_j x_j - X\right) - m\left(\sum_j y_j - Y\right),$$

где $f\,(x, y) = \min_i j_i\,(x_i, y_i)$.

При этом, правда, возникают принципиальные трудности, если держать на прицеле децентрализацию задачи с обменом информацией типа того, что рассматривалась выше. Главная трудность, не считая проблем гладкости $f\,(x, y)$ – см. [2], заключается в том, что не ясно, как делить общесистемный эффект $f\,(x, y)$ между элементами системы. Любое пропорциональное деление $f\,(x, y)$ между АЭ (регионами) приводит к тому, что i-й АЭ начинает прямо влиять (а не косвенно через «цены» λ, μ) на x_i, y_i других элементов. Это приводит к неустойчивости системы, и система управления оказывается неработоспособной.

Поэтому синтез более "изощренных" целевых функций типа (5) в определенном смысле является необходимостью. По крайней мере, в заданном русле использования рычагов и механизмов.

Решение задачи (8) могло бы выглядеть, например, так. Функция φ_i, скажем, имеют вид (7) и каждый АЭ сообщает в центр оценку S_i, коэффициента r_i.

Центр производит распределение ресурсов поэтапно. Допустим в k-м периоде было распределение $\{x_{ik}, y_{ik}\}$. В следующем периоде центр решает задачу

$$\min_i j_i\left(x_{(k+1)i}, y_{ik}\right) \to \max_{x_{i(k+1)i}} \qquad \sum_j x_{j(k+1)} = X,$$

определяя распределение ресурса $x_{k+1} = \{x_{1(k+1)}, \ldots, y_{n(k+1)}\}$, и оставляя неизменным $y_k = \{y_{1k}, \ldots, y_{nk}\}$. Затем решает задачу, определяя $y_{k+2} = \{y_{1(k+2)}, \ldots, y_{n(k+2)}\}$, и не меняя на данной итерации бывшего распределения по x. В достаточно свободных предположениях процедура сходится.

За кадром происходит распределение ресурсов $x(S)$, $y(S)$ и назначение цен $\lambda(S)$, $\mu(S)$, как функций вектора S. И чтобы говорить о целесообразном поведении элементов, необходимо уточнить «правила игры», т.е. задать целевые функции

$$Д_i(S) = Д_i\,(x_i(S), y_i(S), l\,(S), m(S))\ .$$

В данном случае никакая функция $Д_i(S)$ не обеспечивает в равновесии оптимума по критерию (8). И это естественно, поскольку центр в четные и нечетные периоды действует по-разному. Возникает любопытная ситуация. Задачу решает задание разных целевых функций в разные периоды. Когда происходит деление ресурса x, целевой функции i-го АЭ должна быть

$$Д_i = l\ x_i - r_i \int_0^{x_i} x^d\ y_i^{b_i}\,dx,$$

а при распределении ресурса y:

$$Д_i = m\ y_i - r_i \int_0^{y_i} x_i^{d_i}\ x^{b_i}\,dx$$

Теоретически это вполне нормально, но с точки зрения экономической практики, может выглядеть странно.

4. Заключение

Приведенные результаты можно непосредственно использовать для организации работы многоуровневых систем, но основная их роль, пожалуй, заключается в другом. Они дают теоретически возможный предел и способ его достижения. Если способ оказывается на практике по тем или иным соображениям неприемлем, данный анализ показывает, что необходимо выходить за рамки рассматриваемой схемы функционирования системы.

Еще один важный вывод касается раскрепощения взглядов относительно целевых функций элементов нижнего уровня. Традиционный взгляд обычно опирается на стандартные экономические показатели – доход, прибыль и т.д. Если же общесистемным критерием является равномерность достигаемых результатов, то на нижнем уровне оказывается целесообразным вводить весьма необычные целевые функции.

Литература

1. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем*, М.: Наука, 1977.

2. ДЕМЯНОВ В.Ф., МАЛОЗЕМОВ В.Н. *Введение в минимакс*. М.: Наука, 1972.