

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЗОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ

С.А. Баркалов, В.Н. Колпачев, П.Н. Курочка, А.И. Половинкина

(Воронежский государственный архитектурно – строительный
Университет, Воронеж)
bsa@vmail.ru

Производственные системы характеризуются динамичностью, то есть параметры, характеризующие такие системы, в общем случае являются функциями времени. Строительные предприятия не составляют исключения в этом случае. Более того, строительная отрасль, в отличие от других, характеризуется ярко выраженной сезонностью работ пусть и не на столько характерно выраженных, как у сельскохозяйственного производства, но, тем не менее, данная особенность строительству присуща. Поэтому в целях повышения адекватности применяемых моделей необходимо все – таки оценить степень влияния изменчивости параметров модели на конечный результат исследования.

Рассматривая вероятностные состояния производственной системы, приходим к заключению, что основными характеристиками системы в данном случае являются интенсивности перехода исследуемой модели из одного состояния в другие, то есть λ_{ij} в общем случае являются функциями времени. Связано это с тем, что режимы функционирования строительного предприятия, как уже говорилось, носят сезонный характер: в зимнее время чаще обычного выходит из строя техника, рабочие чаще болеют и, следовательно, коэффициент выхода рабочих на объекты строительства ниже, чем в летне – весеннее время года. С другой стороны, в пределах одной рабочей недели коэффициент выхода производственных рабочих тоже не является постоянной величиной. Логическое объяснение этому факту тоже можно найти: именно с этого дня недели чаще всего традиционно стараются оформить отпуска, больничные листы и остальные случаи невыхода на работу на законном основании. Не является также секретом и тот факт, что именно на понедельник приходится наибольшее количество прогулов и других причин невыхода на работу по неуважительным, документально не оформ-

ленным причинам. Таким образом, следует предположить, что гипотеза о стационарном состоянии производственной системы не всегда может быть применена и, следовательно, необходимо исследовать вопрос о влиянии зависимости параметров состояния системы на состояния самой системы в целом.

Рассмотрим состояние производственной системы в произвольный момент времени. В наиболее общем случае, состояние такой системы будет описываться системой обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$(1) \frac{dP_i}{dt} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N I_{ji}(t)P_j(t) - P_i(t) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N I_{ij}(t), \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

условием нормировки

$$(2) \sum_{i=0}^N P_i(t) = 1.$$

и начальными условиями, характеризующими состояние системы в начальный момент времени:

$$(3) P_0(0) = P_1(0) = \dots P_k(0) = \dots P_{N-1}(0) = P_N(0) = 0, \quad P_j(0) = 1,$$

где $I_{ij}(t)$ – интенсивность перехода системы из состояния i в состояние j ; N – число состояний системы.

Выражения (1) – (3) полностью описывают статистическое состояние производственной системы при самых произвольных предположениях.

Система дифференциальных уравнений (1) относится к системам наиболее общего вида с переменными коэффициентами $I_{ij}(t)$. Получение аналитических решений такой системы в наиболее общем виде, как правило, не представляется возможным даже при постоянных коэффициентах I_{ij} . Основное затруднение при этом связано с необходимостью аналитического решения алгебраических уравнений N -го порядка самого общего вида, что, как известно, тоже не является элементарной задачей и приводит к достаточно обширным преобразованиям даже для случая $N = 4$. Если же коэффициенты $I_{ij}(t)$ – переменные, то решение такой системы дифференциальных уравнений возможно только в отдельных частных случаях, зависящих от характера этой зависимости и размер-

ности системы: если размерность не больше двух, а характер зависимости описывается простой функцией, то решение вполне возможно, хотя и не всегда. В противном же случае возможно только численное решение таких систем.

Существующие асимптотические методы в некоторых случаях позволяют получить приближенное аналитическое решение, но это решение имеет приемлемую форму только для системы дифференциальных уравнений невысоких степеней, как правило, не выше двух. Такое ограничение связано с объемом преобразований, которые необходимо проделать для получения решения. Этот объем зачастую таков, что уже требует применения средств вычислительной техники, что естественно снижает ценность таких аналитических решений, которыми нельзя пользоваться без ЭВМ. В этой ситуации было бы логичнее изначально решать поставленную задачу на компьютере.

Для последующего решения задачи (1)-(3) необходимо задаться набором состояний в которых будет находиться изучаемая производственная система. В отличии, скажем от технического устройства, при организационном проектировании интересую не все возможные состояния производственной системы: в общем случае их бесконечное множество, а только некоторые, ключевые состояния системы, влияющие на ее возможность выполнять свои основные функциональные обязанности.

Рассмотрим элементарную производственную систему, какой является производственная бригада. Основное функциональное назначение такой системы – это выпуск строительной продукции. Рассмотрим возможные состояния такой системы. Исходя из логики исследования можно выделить следующие состояния, которые будут интересны с организационно – технологической точки зрения: бригада нормально работает и выполняет сменное задание; бригада работке, но сменное задание не выполняет и, наконец, бригада простаивает, причем простой возможен по двум причинам: техническим: выход из строя технических устройств и организационным: отсутствие необходимых материалов или подготовленного фронта работ. Обозначим введенные состояния через:

S_0 – бригада работает и выполняет сменное задание;

S_1 – бригада работает, но сменное задание не выполняет, например в силу некомплекта рабочих:

S_2 – бригада не работает, так как не исправно оборудование, например подъемный кран;

S_3 – бригада простаивает по организационным причинам, например отсутствие материалов.

В этом случае задача (1) – (3) приводится к виду:

$$P_0 = 1 - P_1 - P_2 - P_3,$$

$$(4) \quad \frac{dP_1}{dt} = -(I_{01}(t) + I_{10}(t) + I_{12}(t) + I_{13}(t))P_1 + (I_{21}(t) - I_{01}(t))P_2 + (I_{31}(t) - I_{01}(t))P_3 + I_{01}(t),$$

$$\frac{dP_2}{dt} = (I_{21}(t) - I_{02}(t))P_1 - (I_{02}(t) + I_{20}(t) + I_{21}(t))P_2 - I_{01}(t)P_3 + I_{02}(t),$$

$$\frac{dP_3}{dt} = (I_{31}(t) - I_{03}(t))P_1 - I_{03}(t)P_2 - (I_{03}(t) + I_{30}(t) + I_{31}(t))P_3 + I_{03}(t),$$

при следующих начальных условиях

$$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = 0.$$

В целях дальнейшего решения (4) необходимо определить значения интенсивностей I_{ij} . При этом I_{01} – будет характеризовать переход производственной системы из состояния соответствующего нормальному функционированию, в состояние, соответствующее неполному выходу производственных рабочих на объект строительства, то есть когда бригада не выполняет сменного задания. Такое положение производственной системы можно найти по данным табельного учета. Для этого воспользуемся сведениями о выходе на работу всех категорий работников предприятия, которые можно найти в данных табельного учета рабочего времени (форма № Т-12).

Рассмотрев данные табельного учета в строительном предприятии за период с 1993 по 2002 годы, были выявлены отклонения в фактической численности производственных рабочих от списочного состава. Причем регистрировались случаи, когда сокращенный состав рабочих явно не мог справиться со сменным заданием, то есть случаи, когда в бригаде отсутствовало один – два человека, что в общем –то позволяло выполнять сменное задание, в приводимую выборку не входит. Соответствующие данные приведены в таблице 1.

Таблица 1

	Поне- дельник	Втор- ник	Среда	Четверг	Пятни- ца
Число случаев	101	55	29	41	87
Частота	0,0404	0,022	0,012	0,0164	0,035

По этим данным произведем аппроксимацию значений $\lambda_{01}(t)$ в следующем виде:

$$(5) I_{01} = 0,0404 \cdot \left| \cos\left(\frac{p(t-1)}{5}\right) \right| - 0,0029 \cdot \left| \sin\left(\frac{p(t-1)}{5}\right) \right|.$$

О точности аппроксимации (5) можно судить по графическому представлению на рисунке 1.

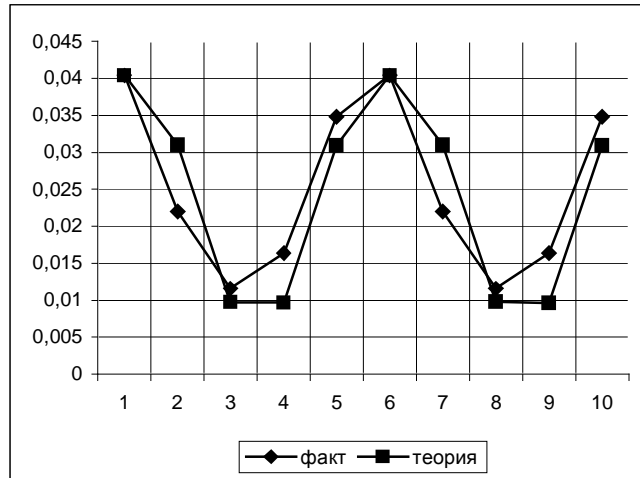


Рис. 1.

Обратный переход системы из состояния 1 в состояние 0 описывается интенсивностью $I_{10}(t) = 1 - I_{01}(t)$ и может быть записан в виде

$$(6) I_{10} = 1 - 0,0404 \cdot \left| \cos\left(\frac{p(t-1)}{5}\right) \right| + 0,0029 \cdot \left| \sin\left(\frac{p(t-1)}{5}\right) \right|,$$

Остальные параметры, описывающие поведение элементарной производственной системы $\lambda_{02}, \lambda_{03}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{13}, \lambda_{31}$, будем считать пока не зависящими от времени со значениями заданными в таблице 2.

Таблица 2

Интен- сивность	λ_{02}	λ_{03}	λ_{20}	λ_{30}	λ_{12}	λ_{21}	λ_{13}	λ_{31}
Значение	0,084	0,112	0,916	0,888	0,084	0,916	0,112	0,888

Осуществляя интегрирование системы уравнений (4) при значениях интенсивностей заданных выражениями (5), (6) и таблицей 2, находим вероятности возможных состояний изучаемой элементарной производственной системы: значения P_0 испытывают незначительные колебания около значения 80,3 %; P_1 – 9,879 %; значения P_2 равно 4,135 %; P_3 – 5,687 %, колебаний эти значения не испытывают.

В целях проверки устойчивости решения производилась замена первого и последнего уравнений системы на нормировочное соотношение (2). Результаты при этом не изменились, что свидетельствует об устойчивости численной реализации решения задачи Коши для приведенной системы дифференциальных уравнений. Полученные при этом решения приведены на рисунке 2.

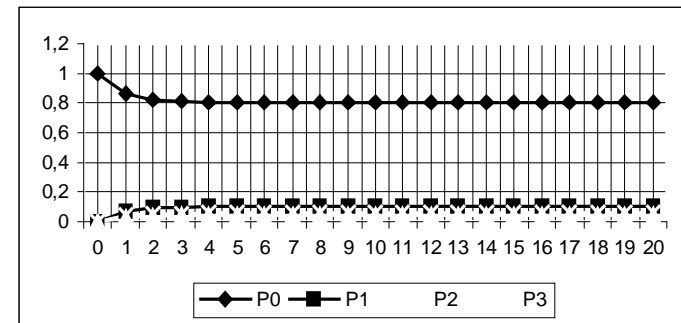


Рис. 2.

Анализируя результаты решения, представленные на рисунке 2, следует отметить, что система и в данном случае имеет стационарные состояния, которые характеризуются небольшими осцилляциями решения около стационарного положения. Стационарного состояния система достигает уже на четвертый день своего функционирования, то есть достаточно быстро, если учесть, что при постоянных интенсивностях такое состояние достигалось на третий день. Если сравнить полученные решения с решением для постоянных интенсивностей, то следует отметить, что произошло уменьшение вероятности пребывания системы в нормальном состоянии, характеризующейся вероятностью P_0 , которая увеличилась с 73 % до 80,3 %. Таким образом, влияние переменной интенсивности сказалось только на величине вероятности пребывания системы в соответствующем состоянии, но, по – прежнему, для такой системы будут характерны почти стационарные состояния с изменениями очень незначительной амплитуды.

Интересным является вопрос о влиянии интенсивности изменения коэффициентов системы уравнений (4) на финальные вероятности. Если предположить, что интенсивность перехода системы из состояния S_0 в состояние S_1 изменяется в пределах от 9,75 % до 40,4 % по периодической зависимости типа (5), то интегрирование системы (4) дает следующие значения для финальных вероятностей: $P_0 = 62,967\%$, $P_1 = 28,31\%$, $P_2 = 4,135\%$, $P_3 = 5,678\%$. Общий вид полученного решения представлен на рисунке 3.

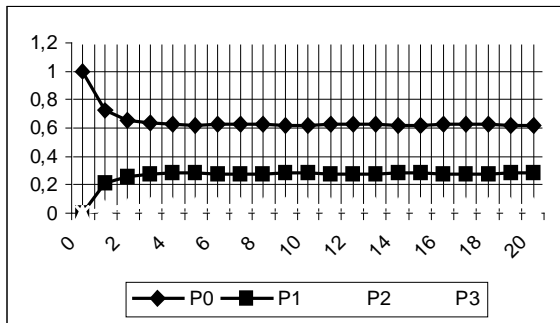


Рис. 3.

Таким образом, даже для случая, когда интенсивность перехода изменялась в широких пределах от 9,75 % до 40,4 %, вычислительный эксперимент показал наличие финальных состояний, которые характерны незначительными изменениями в пределах 1,77 % от минимальной величины P_0 , а вероятности состояний P_2 и P_3 после достижения стационарного состояния на четвертый день не испытывают колебаний совсем.

Рассмотрим теперь случай, когда все интенсивности перехода системы из одного состояния в другое зависят от времени, то есть интенсивность перехода системы из нормального состояния в состояние простоя по техническим и организационным причинам будет определяться соотношениями вида:

$$I_{02} = 0,084 \cdot \left| \cos\left(\frac{p(t-1)}{5}\right) - 0,0019 \cdot \left| \sin\left(\frac{p(t-1)}{5}\right) \right| \right|,$$

$$(7) \quad I_{03} = 0,112 \cdot \left| \cos\left(\frac{p(t-1)}{5}\right) - 0,0029 \cdot \left| \sin\left(\frac{p(t-1)}{5}\right) \right| \right|,$$

$$I_{20} = 1 - I_{02}, \quad I_{30} = 1 - I_{03}, \quad I_{12} = I_{02}, \quad I_{13} = I_{03},$$

$$I_{21} = 1 - I_{12}, \quad I_{31} = 1 - I_{13}.$$

Результаты сравнения с соответствующим стационарным решением представлены на рисунках 4-7.

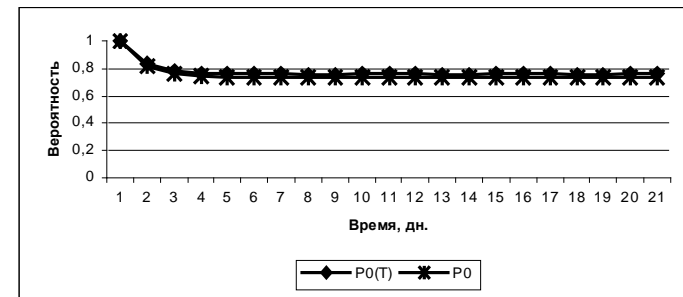


Рис. 4.

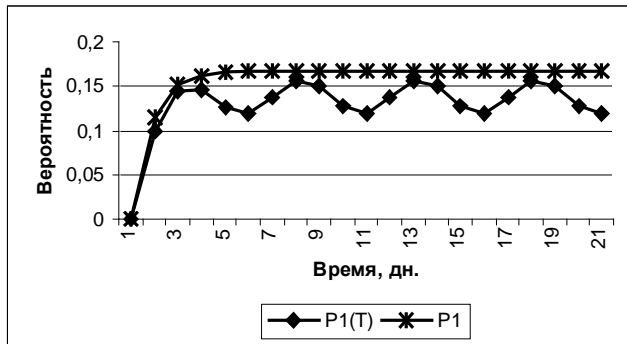


Рис. 5.

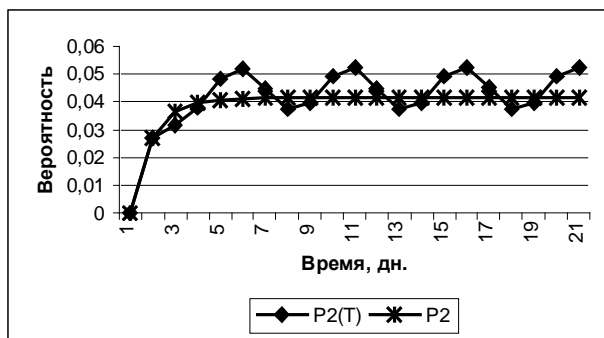


Рис. 6.

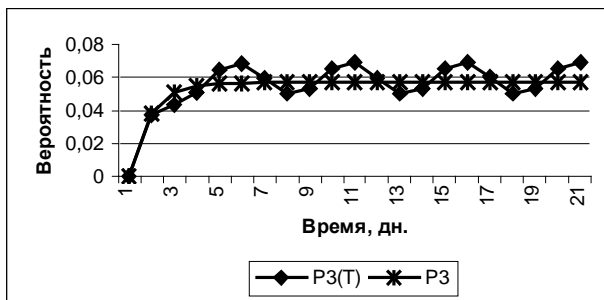


Рис. 7.

Следует отметить, что внешнее совпадение результатов по значению вероятности P_0 (рис. 4) свидетельствует только о том, что в выбранном масштабе эта ошибка не может быть отражена. На рисунке 8 представлено абсолютное отклонение от стационарной вероятности.

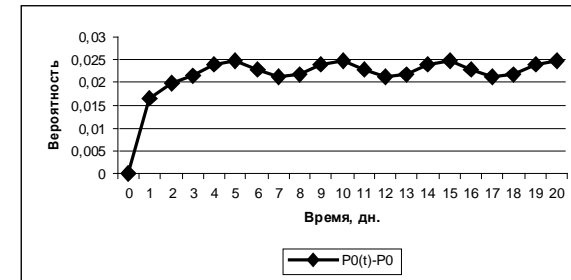


Рис. 8.

Таким образом, численные эксперименты показали несущественность влияния нестационарности интенсивности перехода из состояния S_0 в состояние S_1 , (абсолютное отклонение в результатах составляет максимально 2,46 %), тем самым можно допустить существование финальных вероятностей для нестационарной производственной системы. Для случая, когда переменными являются интенсивности перехода в состояния, характеризующие простой по техническим или организационным причинам, наблюдаются существенные колебания значений вероятности P_i , которые представлены на рисунках 4-7. Колебания значений переходных вероятностей совершаются с периодом, равным периоду колебаний соответствующей интенсивности. Для других состояний отклонение в результатах решения достигает также нескольких процентов, но ввиду малых значений финальной вероятности относительная ошибка может достигать 50%. Значения относительных ошибок для различных вероятностей перехода представлены на рисунке 9.

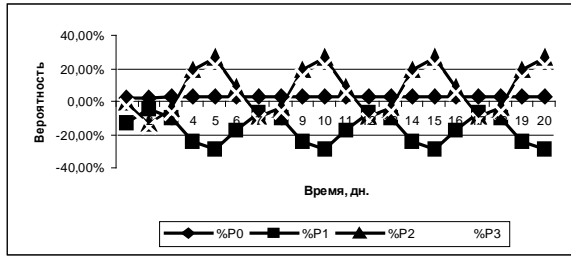


Рис. 9.

Если период колебаний интенсивностей будет различен, то результаты решения представлены на рисунках 10-13.

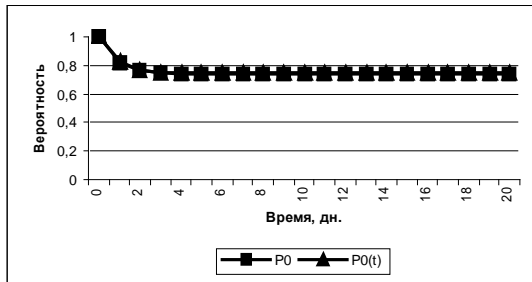


Рис. 10.

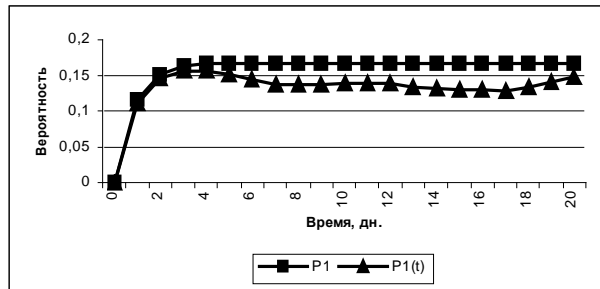


Рис. 11.

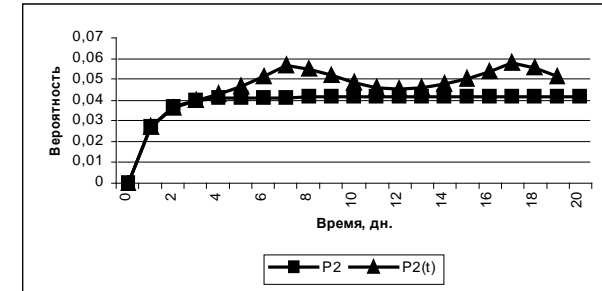


Рис. 12.

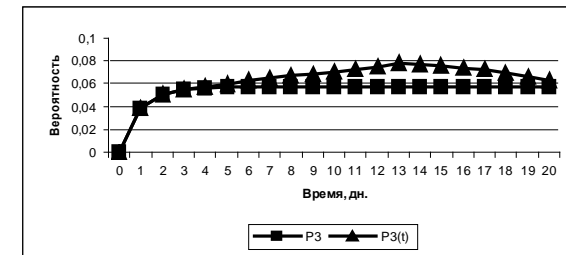


Рис. 13.

Причем результаты были получены для случая, когда интенсивность перехода системы в состояние простоя по технической неисправности имела периодичность 10 дней, а в состоянии простоя по организационным причинам – 22 дня. Абсолютные отклонения от финальной вероятности P_0 представлены на рисунке 14, а относительная ошибка приведена на рисунке 15.

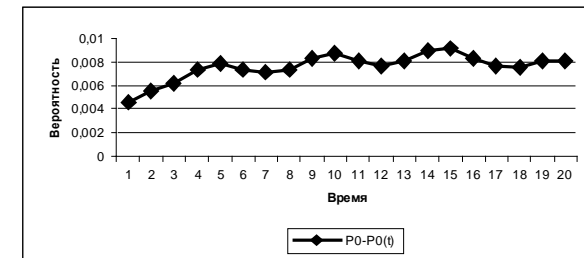


Рис. 14.

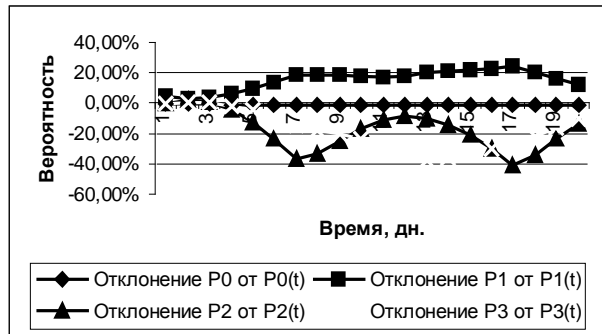


Рис. 15.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. М.: «Финансы и статистика», 2001. – 368 с.
2. Баркалов С.А., Курочка П. Н., Колпачев В.Н. Определение состояния производственной системы. – «Современные сложные системы управления» Сб. тр. междунар. конф. Липецк: ЛГТУ, 2002. С. 7 – 9.