© 2004 г. Губко М.В. канд. техн. наук

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

УПРАВЛЕНИЕ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ С СЕТЕВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ АГЕНТОВ ЧАСТЬ II. ЗАДАЧИ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Аннотация

На базе модели сетевой игры агентов формулируется задача управления сетевым взаимодействием агентов в организационных системах. Подробно исследуется задача стимулирования сетевого взаимодействия в случаях, когда центр для предсказания поведения агентов использует концепции стабильности по Нэшу, попарной, гибридной и сильной стабильности.

1. Введение

В настоящее время в теории управления организационными системами разработано большое количество механизмов управления: механизмов стимулирования [1-4], распределения ресурса [5-7], экспертного оценивания [8] и т.д. Однако нельзя сказать, что данные механизмы исчерпывают проблематику управления организационными системами. Одним из актуальных направлений развития теории управления в настоящее время является решение задач формирования состава и структуры организационных систем [9-11]. Весьма перспективным аппаратом моделирования процессов формирования структур представляется теория сетевых игр, обзор основных подходов и результатов которой содержится в первой части настоящей статьи [12]. Ниже рассматриваются задачи управления формированием сетевых структур между участниками организационных систем (агентами), решаются задачи стимулирования в различных моделях сетевого взаимодействия.

2. Сетевые игры

В целях автономности второй части статьи кратко приведем изложенные в [12] основные результаты теории сетевых игр, используемые далее при решении задач стимулирования.

Сетевой игрой называется игровой конфликт, исходом которого является некоторый набор связей между игроками, причем выигрыши игроков зависят только от набора этих связей. Связи между игроками моделируются направленными и ненаправленными графами [13] (ниже графы часто называются сетями, а их дуги – связями), вершинами графа являются игроки, а дуга интерпретируется как наличие связи между игроками.

Если обозначить через $\Theta(N)$ множество всех графов с множеством вершин N, то заинтересованность i-го игрока в той или иной структуре связей можно описать функцией выигрыша $f_i : \Theta(N) \to \Re$, $i \in N$, определяющей выигрыш игрока при реализации различных сетей.

Действие $x_i \in X_i$ игрока в сетевой игре – это пара множеств; множество его оппонентов, к которым игрок хочет образовать исходящую связь, и множество оппонентов, на образование входящей связи от которых игрок согласен. Совокупность действий игроков задает профиль действий $x \in X := \prod_{i \in N} X_i$. Связь в сети образуется тогда и только тогда, когда оба участника связи согласны на ее образование (такие игры называются играми согласия). Множество сетей, достижимых при заданном множестве профилей действий X, обозначим через $G(X)$.

Профиль действий игроков называется равновесием Нэша, если ни один из игроков не выигрывает, в одиночку отклоняясь от этого профиля действий [14]. Сеть называется стабильной по Нэшу, если существует равновесный по Нэшу профиль действий игроков, приводящий к данной сети. В [12] показывается, что в игре согласия сеть $g \in G(X)$ стабильна по Нэшу тогда и только тогда, когда любой из игроков не может выиграть от одностороннего разрыва любого количества своих входящих или исходящих связей (в пределах, дозволенных множествами действий игроков). Также показывается, что в игре согласия пустая сеть всегда стабильна по Нэшу.

Профиль действий называется сильным равновесием Нэша [15], если никакая коалиция игроков не может отклониться от него, не уменьшив выигрыш хотя бы одного своего участника.

Определение 1 [16]. *В играх согласия сеть* $g' \in G(X)$ *называется достижимой из сети* $g \in G(X)$ *отклонениями коалиции* $S \subseteq N$, *если из того, что* $ij \in g'$, $ij \notin g$, *следует, что* $i, j \in S$, *а из того, что* $ij \in g$, $ij \notin g'$, *следует, что либо* $i \in S$, *либо* $j \in S$.

Определение 2 [16]. *В играх согласия сеть* $g \in G(X)$ *называется сильно стабильной тогда и только тогда, когда для любой коалиции* S *и любой сети* g', *достижимой из сети* g *отклонениями коалиции* S, *из того, что найдется такой участник коалиции* $i \in S$, *что* $f_i(g') > f_i(g)$, *следует, что найдется и такой участник коалиции* $j \in S$, *что* $f_j(g') < f_j(g)$.

В [12] показывается, что в игре согласия сеть $g \in G(X)$ сильно стабильна тогда и только тогда, когда существует сильно равновесный по Нэшу профиль действий, приводящий к сети g.

Сильно равновесные сети обладают многими привлекательными свойствами, в частности, они всегда оптимальны по Парето [16]. Однако применение концепции сильного равновесия существенно ограничивается тем, что во многих играх сильные равновесия отсутствуют.

Определим k-равновесие, как сильное равновесие Нэша с ограничением $k \in \{1,\dots,n\}$ на максимально возможный размер образующейся коалиции. Тогда 1-равновесия являются обычными равновесиями Нэша, *n-равновесия* – сильными равновесиями Нэша. С ростом параметра k множество k-равновесных векторов действий не расширяется. Для игр согласия аналогично можно обобщить сильную стабильность до k-стабильности.

Рассмотренные выше концепции решения показывают, что для игр согласия целесообразно формулировать концепцию решения не в терминах действий, а в терминах результирующих сетей. Примером такой концепции решения является введенное М. Джексоном и А. Волынским [17] понятие попарно стабильных сетей.

Определение 3 [17]. *Если рассматриваются только ненаправленные сети, то в игре согласия сеть $g \in G(X)$ называется попарно стабильной тогда и только тогда, когда*

1) *если для любой пары игроков $i, j \in N$ сеть $g' := g \setminus \{ij\} \in G(X)$ (т.е. сеть g' реализуема некоторым профилем действий), то $f_i(g') \le f_i(g)$, $f_j(g') \le f_j(g)$;*
2) *если сеть $g'' := g \cup \{ij\} \in G(X)$ реализуема некоторым профилем действий и в этой сети один из игроков строго выигрывает ($f_i(g'') > f_i(g)$ или $f_j(g'') > f_j(g)$), то второй строго проигрывает.*

В отличие от равновесия Нэша, данная концепция решения допускает согласованное добавление связи игроками, если это им выгодно. Однако попарно стабильная сеть может не быть стабильной по Нэшу, что, несомненно, является недостатком попарной стабильности. Данный недостаток можно преодолеть, требуя от сети не только попарной стабильности, но и стабильности по Нэшу. Такую сеть назовем гибридно-стабильной.

Рассмотрев концепции решения теории сетевых игр, перейдем к решению задач управления организационными системами с сетевым взаимодействием участников.

3. Задача управления сетевым взаимодействием

Рассмотрим организационную систему, состоящую из управляющего органа – центра и n управляемых субъектов – агентов. Пусть агенты вовлечены в сетевую игру $< N, f_i, X_i >$. Выигрыш каждого агента зависит от того, какая сеть $g \in G(X)$ реализовалась. В отсутствие управления со стороны центра агенты разыгрывают сетевую игру, реализуя ту или иную сеть $g_0 \in G(X)$. Центр имеет свои предпочтения $\Phi(g)$ на множестве возможных сетей $G(X)$, и, возможно, его не устраивает реализовавшаяся сеть g_0.

Для того чтобы воздействовать на сетевое взаимодействие агентов, центр должен иметь возможность изменять выигрыши агентов при реализации той или иной сети, т.е. выигрыш i-го агента $f_i(.) = f_i(g,u)$, где u – некоторое управление центра из множества допустимых управлений U.[1)] Очевидно, что и выигрыш центра в общем случае зависит от выбираемого им управления: $\Phi(.) = \Phi(g,u)$. Примем стандартный порядок функционирования ОС [4], согласно которому сначала центр сообщает агентам управление $u \in U$, затем агенты при заданном управлении реализуют ту или иную сеть $g \in P(u)$ (где $P(u) \subseteq G(X)$ – множество рациональных в том или ином (конкретизируемом ниже) смысле сетей при заданном управлении u), после чего все участники ОС получают свои выигрыши: центр – $\Phi(g,u)$, агенты – $f_i(g,u)$, $i \in N$.

Таким образом, *задача управления* заключается в том, чтобы выбором допустимого управления максимизировать выигрыш центра при условии, что при фиксированном управлении агенты выбирают сеть в соответствии с принятым принципом рационального поведения. Иначе говоря, задача управления состоит в том, чтобы найти

(1) $u^* \in Arg \max\limits_{u \in U} \min\limits_{g \in P(u)} \Phi(g,u)$.

Минимум в данном выражении связан с применением центром принципа максимального гарантированного результата (МГР), согласно которому центр рассчитывает на то, что агенты выбирают наихудшую для него сеть из множества $P(u)$ рациональных сетей. Альтернативой является использование центром гипотезы благожелательности [6], при этом благожелательно настроенные к центру агенты выбирают наилучшую для центра рациональную сеть: тогда

(2) $u^* \in Arg \max\limits_{u \in U} \max\limits_{g \in P(u)} \Phi(g,u)$.

Максимизируемое в формуле (2) выражение называется *эффективностью управления*, а в формуле (1) – *гарантированной эффективностью управления* [6].

Рассмотрим более подробно элементы рассмотренной модели, ее возможные модификации и практически важные частные случаи.

3.1. Принципы рационального поведения агентов

В работах по теории игр считается, что участники игры (агенты) рациональны, т.е. стремятся выбором своих действий максимизировать свой выигрыш. Сложность игровых моделей заключается в том, что в большинстве случаев принцип рациональности невозможно сформулировать в виде оптимизационной задачи, поскольку выигрыш каждого агента зависит от целенаправленных (рациональных) действий остальных агентов. В настоящее время считается, что рациональные исходы игрового конфликта должны быть в том или ином смысле *устойчивы*, *стабильны* относительно целенаправленных отклонений от данного исхода одного (равновесие Нэша, Байеса-Нэша [14, 15, 18]) или нескольких (сильное равновесие Нэша, *C*-ядро кооперативных

[1)] В соответствии с принятой в [18] классификацией, подобное управление называется мотивационным. Рассмотрение других видов управления (институционального, информационного и др.) не является предметом данной работы, но является перспективным направлением будущих исследований.

игр [18, 19]) агентов.

Этот классический теоретико-игровой подход был также принят и при исследовании моделей сетевого взаимодействия игроков – сетевых игр. Выше были сформулированы различные концепции решения сетевой игры: равновесие Нэша, сильное равновесие, попарная и гибридная стабильность. Обозначим: $P_k(u)$ – множество k-равновесных (при фиксированном управлении) сетей, где $k = 1,\dots,n$; $P_{pair}(u)$ – множество попарно стабильных при фиксированном управлении сетей; $P_{gibr}(u)$ – множество гибридно-стабильных сетей.

Таким образом, как и в теории некооперативных игр, в моделях сетевых игр отсутствует единственный «непререкаемый» принцип рационального поведения, поэтому центр при решении задачи управления должен делать те или иные предположения относительно поведения агентов. В терминах описанной выше модели, центр может считать множество $P(u)$ рациональных сетей множеством попарно стабильных сетей, сильно стабильных сетей или использовать другую концепцию рациональности.

После выбора концепции рациональности перед центром возникают проблемы, связанные со слабой прогностической силой всех существующих на сегодняшний день концепций решения: в большинстве известных игр стабильными оказываются несколько сетей и центр должен каким-то образом выбрать из данного множества единственный прогноз поведения агентов. Пожалуй, простейшими правилами предсказания являются упомянутые выше принцип МГР и гипотеза благожелательности, согласно которым центр рассчитывает на реализацию соответственно наихудшей или наилучшей для себя сети из множества стабильных сетей.

Легко проверить, что в рамках гипотезы благожелательности для реализации некоторой сети g центру достаточно добиться того, чтобы она была стабильной, и не заботиться о том, чтобы она была единственной стабильной сетью.

В сетевых играх существует еще одно, помимо общепринятого объяснения (связанного с тем, что необходимое центру равновесие является для агентов фокальной точкой [18]), обоснование использования центром гипотезы благожелательности. Пусть возможности управления центра таковы, что, помимо собственно управления, стабилизирующего те или иные сети, центр может выбирать начальное состояние сети g_0 [2)].

Если теперь центр выберет в качестве начального состояния некоторую равновесную сеть, то он может быть уверенным (в рамках принятых им предположений о рациональном поведении агентов), что данная сеть и будет исходом игры, т.е. агенты не смогут самостоятельно изменить исход на другую равновесную сеть.

Как отмечено в [12], концепции равновесия сетевых игр обладают разной предсказательной

[2)] Строго говоря, такую возможность следует отнести к сфере институционального управления [20].

силой и более сильные концепции требуют и более сильных предположений о коммуникативных способностях агентов. В этом случае использование центром равновесия Нэша в сочетании с применением принципа МГР будет являться проявлением его консервативности: при отсутствии уверенности в том, что агенты смогут реализовать сильно стабильную сеть, центр берет минимум в формуле (1) по более широкому множеству (равновесных по Нэшу сетей).

Более мощный инструмент предсказания поведения агентов дают центру динамические модели формирования сетей [21, 22], которые позволяют приписать каждой сети вероятность ее реализации. В этом случае применение принципа МГР или гипотезы благожелательности центр может заменить усреднением по множеству рациональных сетей с учетом вероятностей их образования. Тогда задачу управления можно переформулировать следующим образом: найти такое управление u^*, чтобы

(3) $u^* \in Arg \max_{u \in U} \sum_{g \in P(u)} \Phi(g,u) p(g,u)$,

где $p(g,u)$ – вероятностное распределение на множестве рациональных исходов $P(u)$. Тем не менее данная работа ограничивается исследованием статических игр агентов.

3.2. Предпочтения центра

Следующим элементом модели, нуждающимся в пояснении, является целевая функция (функция выигрыша) центра $\Phi(g,u)$. В общем случае цели центра могут быть произвольными, однако для задач управления характерны некоторые рассматриваемые ниже частные виды целей центра.

Простейшим видом целевой функции центра может быть стремление к формированию агентами конкретной сети или одной из множества $D \subseteq \Theta(N)$ желательных для центра сетей. В этом случае целевую функцию центра можно записать в виде

$$\Phi(g,u) = \begin{cases} H_1, g \in D \\ H_2, g \notin D \end{cases},$$

где $H_1 >> H_2$ – выигрыш центра при «нормальном» с его точки зрения поведении агентов, а H_2 – его потери при «ненормальном» поведении. Центр с такой целевой функцией обычно называют *принципиальным* [23].

Так, например, центр может стремиться к образованию *полной сети*, в которой имеется все возможные связи. Примером подобной задачи является формирование связей в группе (коллективе, отделе, подразделении и т.д.), когда центр заинтересован в максимально тесном взаимодействии подчиненных ему сотрудников.

Обратно, центр может быть заинтересован и в формировании пустой сети. Примером такой задачи является задача предотвращения утечки секретной информации, где связь между агентами означает передачу подобной информации.

Несмотря на простоту и удобство подобных целевых функций, зачастую на практике предпочтения центра оказываются более сложными, включающими градацию возможных сетей по их предпочтительности.

Широко распространенной на практике целью центра является обеспечение максимального суммарного выигрыша агентов, т.е. формирование ими сети, имеющей максимальную суммарную стоимость. Несмотря на то, что в этом случае цель центра совпадает с целью управляемой системы (множества агентов), задача управления в ней далека от тривиальной. Как показано в многочисленных работах (см., например, [9, 17, 24, 25]), эффективная в смысле стоимости игры сеть далеко не всегда оказывается стабильной. В этом случае, как показано в следующем разделе, центр вынужден воздействовать на распределение выигрыша между игроками таким образом, чтобы снять противоречие между стабильностью и эффективностью.

В рассмотренных выше примерах целевая функция центра не зависит от применяемого им управления. Более сложным (но, пожалуй, и более распространенным) является случай, когда центр осуществляет управление «за свой счет», неся при этом затраты на управление. Наиболее распространенным способом учета в целевой функции центра затрат на управление является ее разбиение на разность между доходом $H(g)$ от результата деятельности (реализовавшейся сети g) и затратами на управление $S(g,u)$, зависящими как от используемого центром управления u, так и от реализовавшейся сети g. Тогда $\Phi(g,u) = H(g) - S(g,u)$. Такая целевая функция характерна для рассматриваемых подробно ниже задач стимулирования.

3.3. Допустимые управления

Наиболее важным в задачах управления элементом модели является множество допустимых управлений, которое полностью определяет возможные способы воздействия центра на поведение управляемой системы (агентов). Как отмечено выше, в данной работе рассматривается только мотивационное управление, т.е. воздействие центра на выплаты, получаемые агентами в результате сетевого взаимодействия. Следовательно, результатом управления являются те или иные функции выигрыша $f_1(g,u),\dots, f_n(g,u)$. Общеизвестно [6, 18, 23], что эффективное мотивационное управление возможно только при наличии обратной связи, когда мотивация агентов центром зависит от реализовавшегося исхода игры, т.е. управление является функцией $u = u(g)$.

Таким образом, если обозначить через Ξ множество всех функций, отображающих множество всевозможных сетей $\Theta(N)$ во множество всевозможных функций выигрыша агентов: $\Xi := \{u : G \to \Re^n\}$, то в каждой (рассматриваемой абстрактно) задаче мотивационного управления множество допустимых управлений U можно представить как некоторое подмножество множества Ξ.

Так, например, пусть сетевая игра задана множеством агентов N и функцией стоимости игры $v(g)$, а центр может произвольно перераспределять значение игры (суммарный выигрыш) между агентами. Тогда множество допустимых управлений имеет вид:

$$U = \{Y(g) : \forall g \in \Theta(N) \sum_{i \in N} Y_i(g) = v(g)\}.$$

К данному классу задач управления можно отнести описанные в первой части настоящей статьи [12] задачи согласования эффективности и стабильности, в которых ищется правило распределения, гарантирующее оптимальность (эффективность) стабильных сетей. В упомянутой работе в числе прочего показывается, что эгалитарное правило распределения $Y_i = v(g)/n$ снимает противоречие между эффективностью и стабильностью.

Тем не менее во многих задачах управление не сводится к распределению стоимости игры между игроками. Например, в рассматриваемых ниже задачах стимулирования имеются фиксированные функции выигрыша агентов $f_i^0(g)$ в отсутствие управления, а центр может лишь доплачивать агентам неотрицательное стимулирование $s_i(g)$. При этом управление – это вектор-функция $s = (s_1(g), \ldots, s_n(g))$, множество допустимых управлений имеет вид

$$U = \{s = (s_1(g), \ldots, s_n(g)) : \forall i \in N, \forall g \in G \; s_i(g) \geq 0\},$$

а функции выигрыша агентов равны

$$f_i(g, s) = f_i^0(g) + s_i(g), \; i \in N.$$

4. Задачи стимулирования в моделях сетевого взаимодействия

Предложенная постановка задачи управления сетевым взаимодействием является достаточно общей и позволяет охватить широкий класс задач управления организационными системами. Однако в ее общем виде она является слишком сложной для получения простых содержательно интерпретируемых результатов. Поэтому в соответствии с принятым в [8] подходом предлагается конкретизировать данную модель для решения частных задач управления ОС. Одной из наиболее часто возникающих задач управления ОС является задача стимулирования, мотивации сотрудников. Данная задача была подробно исследована как в случае некооперативного [1, 2, 24], так и кооперативного [26, 27] поведения агентов в веерной и матричной структурах управления. Однако в реальных ОС возникают ситуации, которые более естественным образом формализуются с помощью моделей сетевого взаимодействия агентов, чем с помощью моделей классической теории игр. Это, например, задачи стимулирования оптимального информационного обмена между сотрудниками подразделения, задачи построения оптимальных технологических схем взаимодействия предприятий в вертикально интегрированных корпорациях и многие другие. Как показано в [28], к задачам стимулирования можно свести и некоторые задачи построения обменных схем.

Таким образом, логичным представляется начать исследование задач управления сетевым взаимодействием именно с задач стимулирования.

4.1. Задача стимулирования в веерной организационной структуре с сетевым взаимодействием агентов

Рассмотрим систему, состоящую из центра и n агентов. В отсутствие управления агенты являются участниками сетевой игры с функциями выигрыша $f_1^0(g),\dots,f_n^0(g)$, $g\in G(X)$. Будем считать, что действия агентов не ограничены, т.е.[3] $X_i = X_i^0$ (см. [12]). Центр с функцией дохода $H(g)$, зависящей от набора образовавшихся между агентами связей, имеет возможность назначать агентам функции стимулирования $s=(s_1(g),\dots,s_n(g))$ за реализацию того или иного исхода – сети. Множество всех возможных неотрицательных функций стимулирования обозначим через U_0.

Как центр, так и агенты имеют полную информацию о параметрах системы. В системе принят стандартный порядок функционирования, т.е. центр, делая ход первым, сообщает агентам набор функций стимулирования, зависящих от их действий. Далее агенты выбирают действия, центр получает доход и выплачивает агентам стимулирование.

В этих условиях целевая функция центра равна $\Phi(g,s)=H(g)-\sum_{i\in N}s_i(g)$, а целевые функции агентов $f_i(g,s)=f_i^0(g)+s_i(g)$.

Как отмечено выше, для предсказания поведения агентов центр должен выбрать ту или иную концепцию их рационального поведения. Ниже рассматривается применение центром k-стабильности (в том числе стабильности по Нэшу и сильной стабильности), попарной и гибридной стабильности. В рамках каждой из этих концепций стабильная сеть может быть не единственной, поэтому центр должен выбрать, будет он использовать для выбора результирующей сети принцип МГР или гипотезу благожелательности.

Рассмотрим сначала случай, когда центр рассчитывает на благожелательное поведение агентов. В этом случае задача центра заключается в том, чтобы найти систему стимулирования

$$u^*=(s_1(g),\dots,s_n(g))\in Arg\max_{u\in U_0}\max_{g\in P_1(u)}[H(g)-\sum_{i\in N}s_i(g)].$$

Напомним, что $P(u)$ – множество стабильных в том или ином смысле сетей при заданном управлении u.

---

[3] Таким образом, сетевая игра агентов является игрой согласия [12].

Как отмечено выше, для реализации любой сети в качестве исхода игры агентов, центру, в силу гипотезы благожелательности, достаточно обеспечить ее стабильность (при этом в игре агентов могут быть и другие стабильные сети).

Разобьем решение задачи на два этапа: на первом этапе для каждой сети g^* найдем систему стимулирования

$s^*(g,g^*) = (s_1^*(g,g^*),...,s_n^*(g,g^*))$,

обеспечивающую стабильность сети g^* с минимальными затратами $C(g^*) := \sum_{i\in N} s_i(g^*)$ со стороны центра. Тогда на втором этапе достаточно найти самую выгодную для центра сеть, вычислив максимум выражения

(4) $\tilde{\Phi}(g^*) := H(g^*) - C(g^*) \to \max\limits_{g^*\in G(X)}$

по всем возможным сетям $g^* \in G(X)$.

Итак, зафиксируем сеть $g^* \in G(X)$. Если при нулевом стимулировании со стороны центра она является стабильной, то положим $s^*(g,g^*) = \vec{0}$, $C(g^*) = 0$, поскольку для обеспечения ее стабильности стимулирования со стороны центра не требуется. В противном случае нужны положительные доплаты всем или некоторым из агентов.

Лемма 1. *Для произвольной системы стимулирования $s(g,g^*)$, обеспечивающей k-стабильность, попарную или гибридную стабильность сети g^*, одноточечная система стимулирования*

(5) $s^*(g,g^*) = \begin{cases} s(g^*,g^*), & g = g^* \\ 0, & g \neq g^* \end{cases}$

обеспечивает при тех же затратах на стимулирование соответственно k-стабильность, попарную или гибридную стабильность сети g^*. Иначе говоря, стабильность сети сохраняется при переходе к одноточечной системе стимулирования.

Доказательство леммы 1. Очевидно, что если агенты выбирают сеть g^*, то затраты центра на стимулирование для исходной и одноточечной систем стимулирования одинаковы. Докажем, что при переходе центра к одноточечной системе стимулирования (5) сохраняется стабильность сети g^*.

Выписав последовательно определения k-стабильности, попарной и гибридной стабильности сети g^* при использовании центром некоторой системы стимулирования $s(g) = (s_1(g),...,s_n(g))$, легко заметить, что в них входят только неравенства вида

(6) $f_i^0(g^*) + s_i(g^*) > f_i^0(g) + s_i(g)$, $f_i^0(g^*) + s_i(g^*) \geq f_i^0(g) + s_i(g)$

для тех или иных агентов $i \in N$ и сетей $g \in G(X)$.

При переходе центром к одноточечной системе стимулирования (5) выигрыши $f_i(g^*)$ агентов в сети g^* не изменяются. Поскольку для любой сети $g \neq g^*$ и любого агента $i \in N$ его стимулирование за эту сеть при одноточечной системе стимулирования не превышает исходного стимулирования, т.е. $s(g, g^*) \geq s^*(g, g^*) = 0$, то выигрыши всех игроков в сетях $g \neq g^*$ не увеличиваются при переходе центром к одноточечной системе стимулирования (5). Следовательно, все неравенства вида (8) остаются верными и при одноточечной системе стимулирования, что гарантирует стабильность сети g^* при этой системе стимулирования. Лемма 1 доказана.

Таким образом, при решении задачи стимулирования можно ограничиться классом одноточечных систем стимулирования, что сильно упрощает задачу, поскольку центру достаточно вычислить лишь n чисел – стимулирование за выбор агентами сети g^*.

Процедура поиска одноточечной системы стимулирования с минимальными затратами существенно зависит от используемой центром концепции решения, поэтому далее отдельно рассматриваются стабильность по Нэшу, попарная и сильная стабильность.

4.2. **Стабильность по Нэшу**

Как следует из леммы 1, центр может ограничиться одноточечными функциями стимулирования.

Если для произвольного агента $i \in N$ обозначить через $G_i^-(g^*)$ множество сетей, получаемых из сети g^* разрывом одной или нескольких связей этого агента, то по определению стабильности по Нэшу сеть g^* стабильна тогда и только тогда, когда для любого агента $i \in N$ и любой сети $g \in G_i^-(g^*)$ $f_i(g) \leq f_i(g^*)$.

Следовательно, для любой сети $g \in G_i^-(g^*)$ стимулирование $s_i^*(g^*)$ за выбор сети g^* должно удовлетворять неравенству $s_i^*(g^*) \geq \max[f_i^0(g) - f_i^0(g^*); 0]$.

Следовательно, можно сформулировать следующее

Утверждение 1. *Минимальное стимулирование, обеспечивающее стабильность по Нэшу сети g^*, вычисляется по формуле*

(7) $s_i^*(g^*) = \max[\max\limits_{g \in G_i^-(g^*)} f_i^0(g) - f_i^0(g^*); 0]$ *для каждого агента* $i \in N$.

В ряде случаев это выражение можно упростить. Для произвольной сети $g \in G(X)$ и агента $i \in N$ обозначим через $g - i$ сеть, в которой разорваны все связи i-го агента**.**

Определение 4. *Будем говорить, что функция выигрыша* $f_i^0 : G(X) \to \Re$ *не возрастает* *по добавлению связей агента* $i \in N$*, если для произвольной сети* $g \in G(X)$ $f_i^0(g-i) \geq f_i^0(g)$*. Набор функций выигрыша* $f^0 = (f_1^0, ..., f_n^0)$ *не возрастает по добавлению связей агентов, если каждая функция* f_i^0 *не возрастает по образованию связей агента* $i \in N$*.*

В случае невозрастающего набора функций выигрыша выражение (7) принимает вид $s_i^*(g^*) = f_i^0(g^*-i) - f_i^0(g^*)$.

Такая функция стимулирования аналогична широко используемой в теории управления организационными системами квазикомпенсаторной системе стимулирования [2].

Пример 1. *Рассмотрим модификацию «модели связей» (connections model) [12, 17], а именно, предположим, что затраты* c_{ij} *по образованию связи несет i-й агент, т.е.* $f_i^0 = -\sum_{j:ij \in g} c_{ij}$*, а доход от связей получает центр:* $H(g) = \sum_{i \in N} \sum_{j \neq i} d^{d_g(i,j)}$*, где* $d_g(i,j)$ *– расстояние между игроками i и j в сети g,* $0 < d < 1$ *– коэффициент затухания информации в связи. Очевидно, что набор функций* f^0 *не возрастает по добавлению связей агентов. Тогда для обеспечения стабильности по Нэшу некоторой сети* g^* *центр должен просто компенсировать затраты агентов на ее образование:*

$s_i^* = \sum_{j:ij \in g} c_{ij}$, $i \in N$, $C(g^*) = \sum_{ij \in g} c_{ij}$.

При этом поиск наиболее выгодной для центра сети сводится к максимизации выражения $\sum_{i \in N} \sum_{j \neq i} d^{d_g(i,j)} - \sum_{ij \in g} c_{ij}$ *(подобные задачи рассматривались, например, в [17]).* •

Вкратце коснемся случая, когда центр не может рассчитывать на благожелательность агентов. Тогда он вынужден использовать принцип МГР, т.е. считать, что среди стабильных по Нэшу сетей агенты выберут наихудшую для него.

Как уже упоминалось, в любой игре согласия пустая сеть стабильна по Нэшу. Следовательно, при любом назначаемом центром стимулировании гарантированный результат центра не превышает его дохода в случае пустой сети.

В то же время во многих задачах минимум дохода центра достигается именно на пустой сети, и тогда система является практически неуправляемой в смысле максимального гарантированного результата при использовании центром равновесия Нэша для предсказания поведения агентов.

4.3. Попарная и гибридная стабильность

Как следует из леммы 1, при поиске оптимального стимулирования центр может ограничиться одноточечными функциями стимулирования.

Определим, какое минимальное стимулирование s_i^* за выбор некоторой сети g^* необходимо обеспечить агентам, чтобы эта сеть была попарно стабильной.

Смежные сети для сети g^* можно разбить на две категории: это сети $g^* - ij$, $ij \in g^*$ (отклонения с разрушением связи) и сети $g^* + ij$, $ij \notin g^*$ (отклонения с образованием связи).

Для того чтобы сеть была стабильной относительно разрушения связей, для всех $ij \in g$ должны быть выполнены условия:

$f_i^0(g^* - ij) \le f_i^0(g^*) + s_i^*$, $f_j^0(g^* - ij) \le f_j^0(g^*) + s_j^*$.

Т.е. для обеспечения стабильности сети g^* относительно разрушения связи $ij \in g$ центр должен доплатить агентам, вовлеченным в данную связь, суммы

$s_i^-(ij) := \max[f_i^0(g^* - ij) - f_i^0(g^*);0]$, $s_j^-(ij) = \max[f_j^0(g^* - ij) - f_j^0(g^*);0]$,

а для стабильности по всем подобным отклонениям выплаты должны быть следующими:

(8) $s_i^- := \max\limits_{ji, ij \in g^*} s_i^-(ij)$, $i \in N(g^*)$.

Для обеспечения устойчивости сети относительно образования связи $ij \notin g^*$ необходимо выполнение одного из условий:

(9) $f_i^0(g^* + ij) < f_i^0(g^*) + s_j^*$ или $f_j^0(g^* + ij) < f_j^0(g^*) + s_j^*$.

Для некоторых из подобных связей для выполнения условий (9) выплат s_i^- (цель которых заключается в том, чтобы гарантировать стабильность относительно отклонений с разрушением связи) уже достаточно. Однако в общем случае остается некоторое множество связей $L_{g^*}^+$, относительно которых сеть g^* попарно нестабильна при суммах выплат s_i^-.

Для обеспечения устойчивости сети g^* относительно образования связи ij из множества $L_{g^*}^+$ центр должен доплатить одному из агентов, образующих эту связь. К сожалению, для обеспечения минимальности затрат на стимулирование центр при принятии этого решения должен учитывать и все другие связи из множества $L_{g^*}^+$. Так, если в связи $ij \in L_{g^*}^+$ для того, чтобы выполнялось условие (9) дешевле стимулировать агента i, то обеспечение устойчивости по другой связи $jk \in L_{g^*}^+$ может потребовать таких выплат агенту j, что устойчивость относительно отклонения $ij \in L_{g^*}^+$ будет обеспечена «сама собой». Кроме того, необходимо учитывать обязательные для обеспечения стабильности по разрыву связей выплаты s_i^-.

Для определения минимальных выплат s_i^+, гарантирующих стабильность относительно образования связей, введем в рассмотрение величины b_{ij}^i, b_{ij}^j, $ij \in L_{g^*}^+$, $d_{ij}^i, d_{ij}^j \in \{0;1\}$. При этом

$b_{ij}^{i}=1$ в том случае, если для обеспечения стабильности относительно образования связи $ij \notin g^*$ центр стимулирует агента *i*. Совокупность всех b_{ij}^{i}, b_{ij}^{j}, $ij \in L_{g^*}^{+}$ обозначим через b .

Задачу определения s_i^+ можно сформулировать в виде поиска

(10) $Arg\min_b[\sum_{i \in N} \max_{ij \in L_{g^*}^{+}}\{b_{ij}^{i}(f_i^0(g^*+ij)-f_i^0(g^*))\}]$ при условиях

$b_{ij}^{i}+b_{ij}^{j}=1$ для всех $ij \in L_{g^*}^{+}$. Тогда

(11) $s_i^+=\max_{ij \in L_{g^*}^{+}}\{b_{ij}^{i}[f^i(g^*+ij)-f^i(g^*)]\}$, $i \in N(L_{g^*}^{+})$.

Заметим, что выплаты могут потребоваться и агентам, не вовлеченным в сеть g^*. Задача (10) является задачей дискретного программирования.

И окончательно запишем,

(12) $s_i^*=\max[s_i^+;s_i^-]$, $C(g^*)=\sum_{i \in N} s_i^*$.

Первый этап решения завершен. Второй этап сводится к стандартной задаче дискретной оптимизации (4), которая может быть решена перебором. В результате получаем решение в виде оптимальной для центра сети g^{**} и реализующей ее системы стимулирования. Для обеспечения строгой попарной устойчивости (чтобы все неравенства в определении попарной устойчивости выполнялись строго) центр может доплатить каждому агенту произвольно малую константу за выбор необходимой центру сети g^{**}.

Таким образом, можно сформулировать следующее

Утверждение 2. *Для решения задачи стимулирования центр должен для каждой нестабильной в отсутствие стимулирования сети решить задачу дискретной оптимизации* (10), *посчитать значение выражения* (8), *а затем один раз решить задачу дискретной оптимизации* (4) *по выбору оптимальной для стимулирования сети.*

Данную вычислительную задачу нельзя назвать простой, ее сложность весьма быстро растет с числом агентов[4]. Тем не менее существуют практически важные случаи, когда задачу можно сильно упростить.

Определение 5. *Набор функций* $f^0=(f_1^0,...,f_n^0)$ *строго попарно убывает по добавлению связей, если для произвольной сети* $g \in G(X)$ *и любой связи* $ij \notin g$ *либо* $f_i^0(g)>f_i^0(g+ij)$, *либо* $f_j^0(g)>f_j^0(g+ij)$.

Если набор функций выигрыша f^0 строго попарно убывает по добавлению связей, то про-

---

[4] Для решения данной задачи можно применить «жадный» алгоритм, при использовании которого для разрушения каждой связи центр стимулирует более «дешевого» агента, а затем изыскивает возможности сокращения стимулирования.

извольная непустая сеть попарно доминируется только отклонениями с разрывом связи. Таким образом, при поиске минимальных затрат на стимулирование задачу (10) можно не решать, что существенно снижает вычислительную сложность.

Пример 2. Рассмотрим игру из примера 1. Очевидно, что набор функций f^0 строго попарно убывает по добавлению связей. Тогда для обеспечения попарной стабильности сети g^* центр должен доплатить

$s_i^* := \max_{ij \in g^*} c_{ij}$, $i \in N(g^*)$, $C(g^*) := \sum_{i \in N(g^*)} \max_{ij \in g^*} c_{ij}$.

Отметим, что при такой системе стимулирования для агентов любая сеть g^* Парето-доминируется пустой сетью, но остается попарно стабильной. Для симметричной по затратам модели связей, в которой выполняется $c_{ij} = c$, $C(g^*) := |N(g^*)|c$, при фиксированном множестве $N(g)$ оптимальна полная сеть между агентами данного множества, при этом $\Phi(g) = |N(g)|(|N(g)|-1)d - c|N(g)|$. Легко посчитать, что тогда при $|N| < c/d + 1$ оптимальна пустая сеть, в противном случае – полная сеть, состоящая из всех агентов. •

В данном примере центру, получающему весь доход, выгодна полная сеть из всех агентов, поскольку затраты на содержание сети линейно зависят от числа вовлеченных в нее участников, а доход растет квадратично.

Пример 2 иллюстрирует тот факт, что попарная стабильность может противоречить принципу индивидуальной рациональности агентов. Действительно, так как при использовании центром оптимальной системы стимулирования выигрыши агентов отрицательны для всех оптимальных с точки зрения центра сетей, любому агенту выгодно в одностороннем порядке разорвать все свои связи, получая нулевой выигрыш. В то же время попарная стабильность не требует устойчивости относительно таких отклонений, что противоречит постулату о том, что для поддержания связи требуется согласие обоих участвующих в ней агентов.

Подобного недостатка лишены концепции сильной стабильности и равновесие Нэша. При этом недостаток равновесия Нэша – большое число равновесий – в большой степени снимается использованием гипотезы благожелательности.

Если центр использует гибридную стабильность в качестве концепции решения игры агентов, то для обеспечения стабильности некоторой сети он должен стабилизировать ее и по Нэшу, и в смысле попарной стабильности. Очевидно, что выплаты в оптимальной одноточечной системе стимулирования будут равны максимуму из выплат (7), обеспечивающих стабильность по Нэшу, и выплат (12), обеспечивающих попарную стабильность сети. Для строго попарно убывающих наборов функций выигрыша понятия гибридной стабильности и стабильности по Нэшу совпадают.

4.4. **Сильная стабильность**

Напомним, что лемма 1 остается верной и для сильной стабильности.

Рассмотренный выше пример 2 показывает, что для «монотонных» в некотором смысле функций выигрыша агентов задача поиска оптимальной системы стимулирования сильно упрощается. Этот факт приобретает особенную актуальность при поиске систем стимулирования, обеспечивающих сильную стабильность желательной для центра «плановой» сети, в силу большого количества неравенств, входящих в определение стабильности.

Определение 6. *Будем говорить, что набор функций* $f^0 = (f_1^0, ..., f_n^0)$ *имеет глобальный максимум в некоторой сети* g_0, *если для произвольной сети* $g \in G$ *и произвольного агента* $i \in N$ $f_i^0(g) \le f_i^0(g_0)$.

Определение 7. *Пусть задан некоторый набор функций выигрыша* f^0. *Будем говорить, что выигрыш аутсайдеров не зависит от сети, если для произвольных сетей* $g_1, g_2 \in G(X)$ *и произвольного агента* $i \in N$ $f_i^0(g_1 - i) = f_i^0(g_2 - i)$, *т.е. выигрыш агента одинаков во всех сетях, в которых он не принимает участия.*

Набор функций выигрыша из примера 1 имеет глобальный максимум в пустой сети $g = \varnothing$. Такая ситуация типична для организационных систем, когда связи в сети образуются в интересах центра, а не агентов. Кроме того, выигрыш аутсайдеров при этом наборе функций не зависит от сети (и равен нулю).

Определение 8. *В играх согласия сеть* $g^* \in G(X)$ *называется строго сильно стабильной тогда и только тогда, когда для любой коалиции S и любой сети* g, *достижимой из сети* g^* *отклонениями коалиции S, найдется такой участник коалиции* $i \in S$, *что* $f_i(g) < f_i(g^*)$.

В отличие от сильной стабильности сеть $g^* \in G(X)$ не будет строго сильно стабильной, если найдется сеть *g*, достижимая отклонениями коалиции *S*, в которой выигрыши всех участников коалиции совпадают с их выигрышами в сети g^*.

Утверждение 3. *Пусть набор функций* f^0 *имеет глобальный максимум в пустой сети. Тогда при квазикомпенсаторной системе стимулирования*

$$(13)\quad s_i^*(g, g^*) = \begin{cases} f_i^0(\varnothing) - f_i^0(g^*) + e/n, & g = g^* \\ 0, & g \ne g^* \end{cases},$$

где $e > 0$ – *произвольно малая строго положительная константа, сеть* $g^* \in G(X)$ *является единственной строго сильно стабильной сетью.*

Доказательство утверждения 3. Докажем, что сеть g^* будет строго сильно стабильной при такой системе стимулирования. Пусть это не так, тогда найдется такая коалиция $S \subseteq N$, сеть *g*, достижимая из сети g^* отклонениями коалиции S и агент $i \in S$, что $f_i(g) > f_i(g^*)$. Но по условию для произвольной сети $g \in G(X)$ и любого агента $i \in N$ $f_i^0(g) \leq f_i^0(\varnothing)$. Следовательно, для любой сети $g \neq g^*$ $f_i(g) = f_i^0(g) \leq f_i^0(\varnothing) < f_i^0(\varnothing) + e/n = f_i(g^*)$. Получили противоречие, следовательно, сеть g^* строго сильно стабильна. Любая сеть $g \neq g^*$ не стабильна по отклонению в сеть g^* коалицией из всех агентов, так как при этом все игроки строго выигрывают. Утверждение 3 доказано.

Появление произвольно малой добавки в выражении для стимулирования связано с необходимостью обеспечения строгого предпочтения агентами сети g^*.

Утверждение 4. *Если в условиях предыдущего утверждения выигрыш аутсайдеров при выигрышах f^0 не зависит от сети, то минимальные затраты по обеспечению сильной стабильности сети g^* равны $\sum_{i \in N}[f_i^0(\varnothing) - f_i^0(g^*)]$.*

Доказательство утверждения 4. Пусть существует некоторая система стимулирования $s^0(g, g^*)$, обеспечивающая сильную стабильность сети g^* со строго меньшими затратами (в силу леммы 1 можно считать, что эта система стимулирования одноточечная). Тогда найдется агент $i \in N$, для которого $s_i^0(g^*, g^*) < f_i^0(\varnothing) - f_i^0(g^*)$. Но поскольку выигрыши аутсайдеров f^0 не зависят от сети, то $f_i^0(g^* - i) = f_i^0(\varnothing) > f_i^0(g^*) + s_i^0(g^*, g^*)$ и сеть g^* нестабильна относительно отклонений агента $i \in N$ в сеть $g^* - i$. Утверждение 4 доказано.

Отсюда следует, что в условиях утверждения 4 квазикомпенсаторная система стимулирования (13) является e-оптимальной.

Как видно, в данном частном случае выражение для минимальных затрат на стимулирование имеет даже более простой вид, чем для попарной стабильности. Кроме того, данная система стимулирования удовлетворяет принципу индивидуальной рациональности.

Условие независимости выигрыша аутсайдеров в утверждении 4 является существенным. Приведем пример, в котором это условие не выполнено и результат утверждения неверен.

Пример 3. *Пусть имеются три агента, сети ненаправленные, и выигрыши агентов f^0 в отсутствие управления определены так, как показано на рис. 1. В остальных сетях выигрыши всех агентов равны нулю. Набор функций f^0 имеет глобальный максимум в пустой сети, но выигрыш первого агента различен для пустой сети и сети с единственной связью 23, в которых он является аутсайдером. Из утверждения 4 следует, что минимальные затраты по обеспечению сильной стабильности полной сети равны 15. Но легко проверить, что система стимулирования, в которой выплаты за полную сеть первому агенту равны 2, а двум другим агентам равны 6, также обеспечивает сильную стабильность полной сети.* •

В условиях утверждения 4 сильно стабильная сеть является единственной. Следовательно, квазикомпенсаторная система стимулирования решает задачу при использовании центром как гипотезы благожелательности, так и принципа МГР.

Оптимальная для центра сеть находится максимизацией выражения $H(g^*) + \sum_{i \in N} f_i^0(g^*) - \sum_{i \in N} f_i^0(\varnothing)$ по сети $g^* \in G(X)$. Стоит отметить, что в этом случае оптимальная для центра сеть является оптимальной по Парето для системы в целом, поскольку максимизирует сумму функций дохода центра и агентов.

Заметим также, что доказательство утверждения 4 основано на проверке устойчивости сети g^* относительно отклонений от нее отдельных игроков. Следовательно, результат утверждения остается верным, и если рассматривать в качестве концепции решения игры агентов не сильную стабильность, а стабильность по Нэшу, т.е. в условиях утверждения 4 понятия сильной стабильности и стабильности по Нэшу эквивалентны.

4.5. **Ограничения на стимулирование**

До сих пор мы предполагали, что центр может назначать агентам любое неотрицательное стимулирование, т.е. множество всех допустимых систем стимулирования U совпадало со всевозможными отображениями множества реализуемых агентами сетей в пространство $\Re_+^n$ выплат агентам. На практике, однако, центр зачастую ограничен возможными механизмами стимулирования. Эти ограничения позволяют ввести следующую систему классификации множеств допустимых управлений [4].

1. *Ограничения на максимальное стимулирование* могут иметь вид

   (14) $\sum_{i \in N} s_i(g) \le M(g)$ или

   (15) $s_i(g) \le M_i(g)$, $i \in N$,

   где $M(g)$ – верхнее ограничение на возможное совокупное стимулирование, $M_i(g)$ – верхнее ограничение на стимулирование i-го агента.

2. *Связанные / несвязанные системы стимулирования.*

   В несвязанных системах стимулирования выплаты агенту могут зависеть только от его действий. В рассматриваемых моделях сетевого взаимодействия данное ограничение можно определить как зависимость стимулирования агента только от наличия или отсутствия в сети связей, на формирование которых он может воздействовать. В играх согласия это все связи, участником которых является данный агент.

   Обозначим через $g \mid \{i\}$ подсеть сети g, полученную удалением связей, участником которых не является i-й агент. Тогда несвязное стимулирование i-го агента в игре согласия зависит только от подсети $g \mid \{i\}$.

3. *Унифицированные / персонифицированные системы стимулирования.* В унифицированной системе стимулирования при реализации каждой сети все агенты должны получать одинаковые выплаты, т.е. для любых агентов $i, j \in N$ и любой сети $g \in G(X)$ $s_i(g) = s_j(g)$.

Среди ограничений на максимальное стимулирование наиболее типичны «ресурсные» ограничения (14). Известно [4], что эти ограничения никак не сказываются на первом этапе решения задачи стимулирования – определении минимальных затрат на реализацию той или иной сети, а лишь ограничивают множество реализуемых сетей при максимизации выигрыша центра (4). Т.е. описанные выше результаты легко адаптируются для случая подобных ограничений на стимулирование. Ограничения же на максимальное индивидуальное стимулирование (15) существенно сказываются на минимальных затратах на стимулирование, и такие задачи требуют отдельного исследования.

Все описываемые выше системы стимулирования являются одноточечными и, следовательно, связанными – стимулирование агента зависит от всей сети. Однако легко предложить несвязанные системы стимулирования той же эффективности, что и предлагаемые одноточечные. Идея состоит в том, что агент «наказывается» нулевым стимулированием в том и только в том случае, когда его связи не совпадают с «запланированными» центром.

Утверждение 5. *Пусть в игре согласия некоторая одноточечная система стимулирования $s(g^*, g)$ обеспечивает стабильность по Нэшу (попарную или гибридную стабильность) сети $g^* \in G(X)$. Тогда несвязанная система стимулирования*

$$(16)\quad s_i^*(g^*, g) = \begin{cases} s_i(g^*, g^*), & g \mid \{i\} = g^* \mid \{i\} \\ 0, & g \mid \{i\} \neq g^* \mid \{i\} \end{cases}$$

также обеспечивает стабильность по Нэшу (попарную или гибридную стабильность соответственно) сети $g^* \in G(X)$ с теми же затратами, что и исходная система стимулирования $s(g^*, g)$.

Доказательство утверждения 5. Очевидно, что затраты по реализации сети g^* одинаковы для систем стимулирования $s(g^*, g)$ и $s^*(g^*, g)$, поэтому доказательства требует только стабильность сети g^* при несвязной системе стимулирования (16).

Пусть при исходной системе стимулирования сеть g^* стабильна по Нэшу. Для того чтобы она была стабильна по Нэшу при системе стимулирования (16), необходимо, чтобы для каждого агента $i \in N$ его выигрыш в каждой из сетей множества $G_i^-(g^*)$ не превышал его выигрыша в сети g^*.

Но для любой из сетей $g \in G_i^-(g^*)$ связи *i*-го агента отличаются от его связей в сети g^*, т.е.

$g\,|\{i\} \neq g^*\,|\{i\}$ и система стимулирования (16) дает нулевые выплаты i-му агенту, так же как и исходная одноточечная система стимулирования. Следовательно, сеть g^* стабильна по Нэшу при системе стимулирования (16). Доказательство утверждения для попарной и гибридной стабильности аналогично. Утверждение 5 доказано.

Результат утверждения 5 с одной оговоркой верен и для сильной стабильности.

Утверждение 6. Пусть в игре согласия некоторая одноточечная система стимулирования $s\,(g^*, g)$ обеспечивает строгую сильную стабильность сети $g^* \in G(X)$. Тогда несвязанная система стимулирования (16) также обеспечивает строгую сильную гибридную стабильность сети g^* с теми же затратами, что и исходная система стимулирования.

Доказательство утверждения 6. Очевидно, что затраты по реализации сети g^* одинаковы для систем стимулирования $s\,(g^*, g)$ и $s^*(g^*, g)$. Проверим, что система стимулирования (16) обеспечивает строгую сильную стабильность сети g^*. Для этого рассмотрим произвольную сеть g и некоторую коалицию S, для которой сеть g достижима. Покажем, что существует такой агент $i \in S$, что $g\,|\{i\} \neq g^*\,|\{i\}$ и $f_i^0(g) < f_i^0(g^*) + s_i(g^*, g^*)$.

Пусть это не так, т.е. для всех агентов $i \in S$ из того, что $f_i^0(g) < f_i^0(g^*) + s_i(g^*, g^*)$ следует, что $g\,|\{i\} = g^*\,|\{i\}$. Рассмотрим тогда коалицию $S' \subseteq S$, состоящую из тех участников коалиции S, для которых $f_i^0(g) \geq f_i^0(g^*) + s_i(g^*, g^*)$. Поскольку связи исключенных из коалиции S участников не изменяются при отклонении в сеть g, сеть g достижима и меньшей коалицией S'.

Но для обеспечения строгой сильной стабильности сети g^* при одноточечной системе стимулирования $s\,(g^*, g)$ необходимо, чтобы нашелся агент $j \in S'$, который бы строго проигрывал от такого отклонения, т.е. для которого выполнялось бы неравенство $f_i^0(g) < f_i^0(g^*) + s_i(g^*, g^*)$.

Из полученного противоречия следует, что для любой сети g и любой коалиции S, для которой сеть g достижима, найдется такой агент $i \in S$, что $g\,|\{i\} \neq g^*\,|\{i\}$ и $f_i^0(g) < f_i^0(g^*) + s_i(g^*, g^*)$. Но стимулирование этому агенту за сеть g равно нулю и при использовании центром несвязанной системы стимулирования (16).

Подытоживая, имеем, что при использовании центром системы стимулирования (16) для любой коалиции S и любой сети g, достижимой из сети g^* отклонениями коалиции S, найдется такой участник коалиции $i \in S$, что $f_i(g) < f_i(g^*)$, т.е. сеть g^* строго сильно стабильна при этой системе стимулирования. Утверждение 6 доказано.

Итак, все полученные выше результаты обобщаются на случай, когда центр ограничен лишь несвязанными системами стимулирования.

В заключение отметим, что все рассматриваемые выше системы стимулирования являются персонифицированными. Как показано в [29], для продуктивного исследования унифицированных систем стимулирования необходимо предположение монотонности выигрышей агентов по некоторому параметру, называемому типом агента. Непосредственное обобщение результатов [29] на случай сетевого взаимодействия представляется проблематичным, но поиск оптимальных унифицированных систем стимулирования является перспективным направлением исследований.

5. **Заключение**

В статье кратко изложены основные подходы и результаты теории сетевых игр. На базе модели сетевой игры агентов сформулирована задача управления сетевым взаимодействием агентов в организационных системах. Подробно исследована задача стимулирования сетевого взаимодействия в случаях, когда центр использует концепции стабильности по Нэшу, попарной, гибридной и сильной стабильности для предсказания поведения агентов.

Исследование задачи стимулирования показало, что общие подходы теории управления организационными системами позволяют решать задачи стимулирования сетевого взаимодействия. В то же время задачи управления сетевым взаимодействием имеют свою специфику – зачастую поиск оптимальной системы стимулирования связан с решением трудоемких задач дискретной оптимизации. Несмотря на это, в ряде практически важных случаев удается получить аналитическое выражение для оптимальной системы стимулирования.

Список литературы

1. *Новиков Д.А.* Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // АиТ. 1997. № 6. С. 3 – 26.
2. *Новиков Д.А.* Механизмы стимулирования в моделях активных систем с нечеткой неопределенностью. М.: ИПУ РАН, 1997.
3. *Новиков Д.А.* Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998.
4. *Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.
5. *Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др.* Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989.
6. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
7. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997.
8. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999.
9. *Новиков Д.А.* Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН, 2003.
10. *Бурков В.Н., Кузнецов Н.А., Новиков Д.А.* Механизмы управления в сетевых структурах // АиТ. 2002. № 12. С. 96 – 115.
11. *Мишин С.П.* Оптимальное стимулирование в многоуровневых иерархических структурах. // АиТ. 2004. № 5. С. 96-119.
12. *Губко М.В.* Задачи управления организационными системами с сетевым взаимодействием участников, I. // АиТ. 2004. № 8.
13. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1968.
14. *Нэш Д.* Бескоалиционные игры / Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961.
15. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. М.: Высш. шк., 1998.
16. *Dutta B., Mutuswami S.* Stable Networks // J. Econom. Theory. 1997. 76, P. 322 – 344.
17. *Jackson M.O., Wolinsky A.* A Strategic Model of Social and Economic Networks // J. Econom. Theory. 1996. 71, P. 44 – 74.
18. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.
19. *Myerson R.B.* Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.
20. *Новиков Д.А.* Институциональное управление организационными системами. М.: ИПУ РАН, 2003.
21. *Jackson M.O., Watts A.* The Existence of Pairwise Stable Networks // Seoul J. Econom. 2001. V. 14. № 3, P. 299 – 321.

22. *Jackson M.O., Watts A.* The Evolution of Social and Economic Networks // J. Econom. Theory. 2002. V. 106. № 2, P. 265 – 295.
23. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
24. *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
25. *Banerjee S.* Efficiency and Stability in Economic Networks. mimeo: Boston University, 1999.
26. *Губко М.В.* Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН. 2003.
27. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Кооперативное взаимодействие центров в задачах стимулирования в организационных системах / Тр. междунар. конф. «Современные сложные системы управления предприятием». Липецк: ЛГТУ, 2001. С. 47 – 51.
28. *Коргин Н.А.* Неманипулируемые механизмы обмена в активных системах. М:. ИПУ РАН, 2003.
29. *Караваев А.П.* Модели и методы управления составом активных систем. М.: ИПУ РАН, 2003.

Иллюстрации

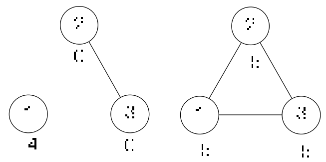

Рис. 1.

Подписи к иллюстрациям

Рис. 1.