© 2004 г. Губко М.В. канд. техн. наук
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

УПРАВЛЕНИЕ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ С СЕТЕВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ АГЕНТОВ
ЧАСТЬ I: ОБЗОР ТЕОРИИ СЕТЕВЫХ ИГР

Аннотация

В первой части статьи кратко изложены основные результаты теории сетевых игр – раздела теории игр, изучающего закономерности формирования устойчивых связей между целенаправленными субъектами в условиях конфликта. Описаны стратегический, динамический и кооперативный подходы к описанию сетевого взаимодействия. Вторая часть статьи посвящена решению задач управления организационными системами с сетевым взаимодействием агентов.

1. Введение

В настоящее время в теории управления организационными системами разработано большое количество механизмов управления: механизмов стимулирования [1-4], распределения ресурса [5-7], экспертного оценивания [8] и т.д. Однако нельзя сказать, что данные механизмы исчерпывают проблематику управления организационными системами. Одним из актуальных направлений развития теории управления в настоящее время является решение задач формирования состава (набора участников) [9, 10] и структуры [11-13] организационных систем. С одной стороны, решение данных задач во многом опирается на базовые механизмы управления в рамках фиксированной структуры и состава. С другой стороны, моделирование организационных структур требует привлечения нового математического аппарата, выходящего за рамки классических моделей исследования операций [14] и теории игр [15-18], – аппарата теории графов [19] и дискретной оптимизации.

В то же время теоретико-игровые модели давно доказали свою применимость в теории управления и формирование структуры организационной системы не может проводиться только из оптимизационных соображений [12], без учета активности участников организационной системы.

В этом смысле весьма перспективным аппаратом представляется теория сетевых игр – относительно молодой раздел теории игр, акцентирующий внимание как раз на формировании структур (устойчивых связей между игроками) в условиях конфликтных ситуаций.

Первая часть настоящей статьи посвящена краткому обзору моделей и результатов теории сетевых игр, в ней также формулируются некоторые новые концепции решения. Теоретико-игровые модели широко используются в теории управления для решения задач анализа – предсказания поведения участников системы при фиксированном управлении. Только имея решение задачи анализа, исследователь может переходить к решению задач синтеза оптимального управления.

Во второй части статьи рассматриваются задачи управления формированием сетевых структур между участниками организационных систем (агентами), решаются задачи стимулирования в различных моделях сетевого взаимодействия.

2. Сетевые игры

Предметом исследования теории сетевых игр являются ситуации конфликта заинтересованных субъектов (игроков), исходом которых является формирование того или иного набора *связей* между игроками. Понятие «связи» при этом может интерпретироваться весьма широко: ее наличие может обозначать передачу информации или ресурсов между игроками, отношения сотрудничества и дружбы, связь может быть транспортной или описывать взаимное влияние и подчиненность – предмет исследования теории сетевых игр и список содержательно интерпретируемых моделей весьма широки.

Сетевые игры начали исследоваться в конце 70-х – начале 80-х годов прошлого века. С тех пор теория сетевых игр получила свое развитие в работах Р. Майерсона [20], М. Джексона [21-24], В. Бала [25], Ф. Пэйджа [26, 27], С. Куррарини [28], Б. Дутты [29-32], А. Ваттс [23, 24, 33] и многих др. Подход, развиваемый этим исследователями, во многом родствен подходу теории кооперативных игр [18, 34]. Модель сетевой игры можно считать развитием модели кооперативной игры в форме характеристической функции. Однако если в теории кооперативных игр считается, что выигрыши игроков зависят лишь от структуры образующихся коалиций, когда принадлежность игроков к одной коалиции задает отношение эквивалентности[1], то в модели сетевой игры выигрыши уже зависят от всего набора связей между игроками. В этом случае отношение «сотрудничества» между игроками может уже не быть транзитивным.

Такая связь между сетевыми и кооперативными играми позволяет использовать в формулировке концепций решения сетевых игр многочисленные результаты теории кооперативных игр, такие как вектор Шепли [35], *C*-ядро [36] и др.

В то же время оказалось, что модель формирования сетевой структуры между игроками можно записать как игру в нормальной форме [34]. Соответственно появляется возможность сформулировать концепции решения, условно назовем их «стратегическими», основанные на таких теоретико-игровых концепциях решения, как равновесие Нэша [37], сильное равновесие [38] и т.д.

---

[1] Отношением эквивалентности называется рефлексивное транзитивное бинарное отношение.

Можно надеяться, что, как и ранее в теории игр, кооперативный и некооперативный подходы будут взаимно дополнять друг друга в применении их к исследованию моделей сетевого взаимодействия.

Обзор основных подходов и результатов теории сетевых игр начнем с рассмотрения стратегических моделей, поскольку стратегическая (нормальная) форма игры традиционно является базовой моделью теории игр.

3. Модель сетевой игры

Ниже приводится описание стратегической модели сетевой игры, обобщающей ранее исследовавшиеся модели. Далее формулируются основные стратегические концепции решения сетевых игр.

Как отмечалось выше, сетевой игрой называется игровой конфликт, исходом которого является некоторый набор связей между игроками, причем выигрыши игроков зависят только от набора этих связей. Адекватным математическим инструментом моделирования связей между объектами являются графы [39].

Определение 1 [39]. *Графом (ориентированным) называется совокупность* $<N,E>$ *множества вершин* N *и множества дуг* $E \subseteq N \times N$. *Множество дуг представляет собой некоторое множество упорядоченных пар* $ij \in E$ *элементов* $i, j \in N$ *множества вершин.*

Конечные графы[2] удобно описывать с помощью их матриц инциденций.

Определение 2 [39]. *Матрицей инциденций графа* $g =< N,E >$ *называется квадратная* $|N| \times |N|$ *матрица, элемент* g_{ij} *которой равен единице в том случае, если в графе* g *имеется дуга* ij, *и нулю в противном случае.*

Матрица инциденций полностью определяет конечный граф, и ниже данные понятия используются как синонимы.

В рамках рассматриваемых моделей сетевого взаимодействия вершинами графа являются игроки, а дуга интерпретируется как наличие направленной связи между игроками.

Далее графы, вершинами которых являются игроки, часто будут называться *сетями* или *структурами связей*, а дуги такого графа – *связями*.

Пример 1. Пусть имеется множество игроков $N = \{1,...,n\}$, каждый из которых обладает некоторой информацией. Игрок может сообщать имеющуюся у него информацию другим (возможно, не всем) игрокам. Тогда структура сообщений будет описываться конечным графом, вершинами которого являются игроки, а дуга ij содержится в графе тогда и только тогда, когда игрок i сообщает некоторую информацию игроку j.

Если обозначить через $\Theta(N)$ множество всех графов с множеством вершин N, то заинтере-

---

[2] Граф называется конечным, если множество его вершин конечно.

сованность i-го игрока в той или иной структуре связей можно описать функцией выигрыша $f_i : \Theta(N) \to \Re$, $i \in N$, определяющей выигрыш игрока при реализации различных структур.

Таким образом, в модель *сетевой игры* входят множество игроков $N = \{1,\dots,n\}$ и набор функций выигрыша $f_i : \Theta(N) \to \Re$, $i \in N$.

Пример 2 (directed connections model [21]). Пусть в условиях примера 1 выигрыш, который i-й игрок получает от сообщения j-го игрока, равен p_{ij}, а затраты j-го игрока по передаче сообщения i-му игроку равны c_{ji}. Игрок, получивший информацию от другого игрока, может передавать ее далее по сети. Введем коэффициент искажения информации $a \in (0,1)$ при передаче ее по одной дуге. Тогда выигрыш i-го игрока $f_i(g)$ в сети $g = < N, E > \in \Theta(N)$ можно записать в виде $f_i(g) = \sum_{j \in N, j \neq i} p_{ij} a^{d_g(j,i)} - \sum_{j: ij \in E, j \neq i} c_{ij}$, где $d_g(j,i)$ – длина кратчайшего направленного пути в графе g от игрока j к игроку i (если путь отсутствует, считаем, что $d_g(j,i) = +\infty$).

Считается, что игроки могут каким-либо образом воздействовать на формирование определенных связей сети. При этом их роль в процессе формирования связей может быть более сложной, чем показано в примере 1, где образование связи ij зависело только от желания i-го игрока. Во многих сетевых играх для образования связи необходимо согласие обоих игроков – например, игрок по каким либо причинам может отказаться принимать информацию от другого игрока. Итак, чтобы модель сетевой игры стала *стратегической* моделью, необходимо формализовать возможности игроков по образованию связей.

Желание i-го игрока образовать связь ij можно описать переменной x_{ij}^{out}, которая равна единице, если игрок i хочет образовать связь ij, и нулю в противном случае. Индекс «*out*» при переменной показывает, что связь ij по отношению к игроку i является исходящей. Если x_{ij}^{out} равна единице, будем говорить, что игрок i *имеет предложение* к игроку j.

Аналогично можно определить переменную x_{ij}^{in}, говорящую о том, что игрок i согласен на образование дуги ji от игрока j. Индекс «*in*» говорит о том, что дуга ji является входящей по отношению к игроку i. Если x_{ij}^{in} равно единице, будем говорить, что игрок i *принимает предложение* игрока j. [3]

Определение 3. *Действием* x_i *игрока в сетевой игре называется пара* $x_i = (x_i^{out}, x_i^{in})$ *векторов* $x_i^{out} = (x_{i1}^{out},\dots,x_{in}^{out})$, $x_i^{in} = (x_{i1}^{in},\dots,x_{in}^{in})$. *Множество всевозможных пар этих векторов обозначим через* X_i^0.

---

[3] Так как мы интересуемся в основном взаимодействием игроков между собой, переменные x_{ii}^{in}, x_{ii}^{out}, описывающие образование петли ii, не играют особой роли. В рассматриваемых далее моделях выигрыши игроков не будут зависеть от наличия или отсутствия в сети петель. Однако эти переменные удобнее оставить и считать всегда равными нулю.

Таким образом, действие игрока определяет, по сути, множество его оппонентов, к которым игрок хочет образовать исходящую связь, и множество оппонентов, на образование входящей связи от которых игрок согласен.

Тогда в каждой конкретной игре *множество* X_i *допустимых действий* i-го игрока будет *подмножеством* множества X_i^0.

Определение 4. *Профилем действий игроков в сетевой игре называется пара* $x=(x^{out},x^{in})$ *квадратных матриц размера* n*, элементами которых являются компоненты допустимых* x_{ij}^{out}, x_{ij}^{in} *действий игроков. Множество профилей действий сетевой игры обозначим через* $X=\prod_{i\in N} X_i$.

Определение 5. *Обстановкой* x_{-i} *для* i*-го игрока называется пара* $x_{-i}=(x_{-i}^{out},x_{-i}^{in})$ *матриц размера* $n\times(n-1)$*, элементами которых являются компоненты допустимых* x_{ij}^{out}, x_{ij}^{in} *действий всех игроков, кроме* i*-го. Профиль действий* x *складывается из действия игрока* x_i *и его обстановки* x_{-i}*, в этом случае будем писать, что* $x=(x_i,x_{-i})$.

Пусть реализовался некоторый профиль действий $x=(x^{out},x^{in})$. Тогда, если мы считаем, что для образования связи ij необходимо и достаточно согласия обоих игроков, результирующая сеть g определяется поэлементным умножением матрицы x^{out} на транспонированную матрицу x^{in}, т.е. $g=x^{out}\otimes x^{in^T}$. Множество сетей, достижимых при заданном множестве профилей действий X, обозначим через $G(X)$.

Подытоживая сказанное, можно определить *стратегическую модель сетевой игры* как совокупность $<N, f_i, X_i, i\in N>$ множества игроков N, их функций выигрыша $f_i(.)$, $i\in N$ и множеств допустимых действий $X_i\subseteq X_i^0$, $i\in N$.

Пример 3. Пусть игроки, как в примере 1, не могут препятствовать образованию входящих связей. Тогда множество действий i-го игрока состоит только из действий, в которых он согласен на образование любых входящих связей: $X_i=\{x_i\in X_i^0 : \forall j\in N, j\neq i\ x_{ij}^{in}=1\}$. При этом результирующая сеть $g=x^{out}$. Обозначим такое множество действий через X_i^S.

Пример 4. Часто в теории сетевых игр связи между игроками считаются ненаправленными (в отличие от направленных графов). Матрица инциденций ненаправленного графа симметричная, и в рамках рассматриваемой модели игры данную ситуацию можно моделировать, ограничивая игроков только действиями, в которых $x_{ij}^{out}=x_{ij}^{in}$ для всех $i,j\in N$. Тогда out-компоненты действий можно исключить из рассмотрения, поскольку $g=x^{out}\otimes x^{out^T}=x^{in}\otimes x^{in^T}$. Обозначим такое множество действий через X_i^D.

Также ненаправленные графы можно моделировать, считая множества действий игроков равными X_i^0, а выигрыши не зависящими от того, две или одна дуги связывают пару игроков.

Рассмотрение данных примеров позволяет ввести следующее определение.

Определение 6. *Пусть множества действий игроков таковы, что из того, что* i*-й игрок может иметь или не иметь предложение к* j*-му игроку, следует, что* j*-й игрок может принять, а может и не принять это предложение. Тогда будем говорить, что в сетевой игре для образования связи требуется согласие обоих игроков. Если же* $X_i \subseteq X_i^S$*, то будем говорить, что для образования связи достаточно желания одного игрока. Игры, в которых для образования связи требуется согласие обоих игроков, для краткости будем называть играми согласия.*

4. Стратегические концепции решения сетевых игр

Легко видеть, что сформулированная выше стратегическая модель сетевой игры совпадает с определением игры в нормальной форме [34], которая также определяется множеством игроков, их множествами действий и функциями выигрыша. Сетевую игру можно рассматривать как обычную некооперативную игру в нормальной форме, если игроки полностью информированы о параметрах игры и выбирают свои действия одновременно и независимо.

Таким образом, при поиске решений сетевых игр мы можем применять результаты теории некооперативных игр. Использовать данную «одновременную» игру в качестве модели сетевого взаимодействия предложил Р. Майерсон [18]. Он также предложил решением сетевой игры считать равновесие Нэша.

Определение 7 [34]. *Профиль действий игроков* $x \in X$ *игры в нормальной форме* $< N, f_i, X_i >$ *называется равновесием Нэша, если для любого игрока* $i \in N$ *и любого его действия* $x'_i \in X_i$ $f_i(x'_i, x_{-i}) \le f_i(x)$.

Иначе говоря, ни один из игроков не выигрывает, в одиночку отклоняясь от равновесного по Нэшу профиля действий.

Спецификой сетевых игр является то, что исследователя в основном интересует то, какие сети будут образовываться при рациональном поведении игроков, а не то, какие действия игроков привели к данной сети.

Определение 8. *Сеть* g *называется стабильной по Нэшу, если существует равновесный по Нэшу профиль действий игроков, приводящий к данной сети.*

Легко проверить, что если множествами действий игроков являются X_i^0 или X_i^D, то пустая сеть всегда стабильна по Нэшу.

Действительно, в этом случае ни один из игроков не может в одиночку изменить результирующую сеть (и, соответственно, свой выигрыш), если действия остальных игроков не содержат ни предложений, ни согласий на принятие предложений.

С одной стороны, этот факт решает проблему существования равновесия – в отличие от общих некооперативных игр, в которых не гарантируется существование равновесия Нэша (в чистых стратегиях), в сетевых играх как минимум одно равновесие имеется.

Однако, с другой стороны, равновесие Нэша в применении к сетевым играм оказывается довольно слабой концепцией решения, по крайней мере когда для образования связи требуется согласие обоих игроков[4].

Действительно, пустая сеть стабильна по Нэшу *независимо от того, какие выигрыши игроки получают в других сетях*, даже если выигрыши всех игроков в любой из непустых сетей существенно выше их выигрышей в пустой сети.

Ситуация меняется при переходе к моделям, в которых для образования связи требуется желание только одного игрока. Здесь пустая сеть уже не всегда будет стабильной по Нэшу. Мало того, поскольку результирующая сеть взаимно однозначно определяется вектором действий, $g = x^{out}$, то для произвольной игры в нормальной форме, в которой каждый из игроков имеет не более 2^{n-1} возможных действий, существует сетевая игра с такими же функциями выигрыша и множествами действий $X_i \subseteq X_i^S$.

Поэтому никаких предсказаний о том, как выглядит равновесие Нэша в таких сетевых играх, более общих, чем для некооперативных игр вообще, сделать невозможно[5].

Вкратце коснемся свойств равновесия Нэша в играх согласия.

Лемма 1. *Если в игре согласия профиль действий x является равновесием Нэша и приводит к результирующей сети g, то профиль действий x', в котором $x'^{in} = x'^{out} = g$, также будет равновесием Нэша (в профиле действий x' отсутствуют «безответные» предложения).*

Доказательство леммы 1. По определению равновесия Нэша действие x_i является наилучшим ответом i-го игрока на профиль действий x_{-i} его оппонентов. Выигрыш игрока не изменится, если действия оппонентов заменить действиями x'_{-i}, поскольку не изменится результирующая сеть, а множество сетей, которые может реализовать i-й игрок изменением своей стратегии, не расширяется при изменении профиля действий оппонентов с x_{-i} на x'_{-i}.

Значит, действие x_i является наилучшим ответом на x'_{-i}. Но выигрыш игрока не изменится и в том случае, если он заменит свое действие x_i действием x'_i, поскольку не изменится результирующая сеть. Следовательно, для любого игрока x'_i является наилучшим ответом на x'_{-i}, т.е. x' – равновесие Нэша. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *В игре согласия сеть $g \in G(X)$ стабильна по Нэшу тогда и только тогда,*

---

[4] Например, если множества действий равны X_i^0 или X_i^D.

[5] Для решения проблемы существования равновесия тогда можно перейти к рассмотрению смешанных стратегий [34].

когда профиль действий, в котором $x'^{in} = x'^{out} = g$ *, является равновесием Нэша.*

Следствие 2. *В игре согласия сеть* $g \in G(X)$ *стабильна по Нэшу тогда и только тогда, когда любой из игроков не может выиграть от одностороннего разрыва любого количества своих входящих или исходящих связей (в пределах, дозволенных множествами действий* X_i *игроков).*

Действительно, добавление одностороннего предложения или одностороннего приема предложения при профиле действий $x'^{in} = x'^{out} = g$ не приводят к изменению результирующей сети.

Можно отметить, что равновесия Нэша в сетевых играх неравнозначны по силе. Есть «правильные» равновесия, в которых добавление предложения в равновесный профиль действий также приводит к равновесному профилю. А есть «неправильные» равновесия, когда добавление предложения одним игроком приводит к обоюдной выгоде в случае принятия этого предложения другим игроком.

Как показывает следствие 2, в играх согласия для стабильности сети требуется только устойчивость по разрыву связей. Впрочем, от чисто некооперативной концепции решения другого ожидать сложно. Более адекватным для таких игр является предложение Б. Дутты и С. Мутусвами [31] об использовании в исследовании сетевых игр сильного равновесия Нэша, которое допускает образование коалиций между игроками.

Определение 9 [38]. *Профиль действий* x *называется сильным равновесием Нэша, если для любой коалиции* $S \subseteq N$ *и любого вектора ее действий* $x'_S = (x'_i)_{i \in S} \in \prod_{i \in S} X_i$ *из того, что кто-то из участников коалиции строго выигрывает при профиле действий* $(x'_S, x_{N \setminus S})$*, следует, что другой участник коалиции строго проигрывает.*

Иначе говоря, для любой коалиции $S \subseteq N$ и любого игрока $i \in S$ из $f_i(g(x'_S, x_{N \setminus S})) > f_i(g(x))$ следует, что найдется такой игрок $j \in S$, что $f_j(g(x'_S, x_{N \setminus S})) < f_j(g(x))$.

Для сильного равновесия Нэша можно сформулировать аналог леммы 1, который позволяет охарактеризовать сильные равновесия непосредственно в терминах результирующих сетей.

Лемма 2. *Если в игре согласия профиль действий* x *является сильным равновесием Нэша и приводит к результирующей сети* g*, то профиль действий* x'*, в котором* $x'^{in} = x'^{out} = g$ *, также будет сильным равновесием Нэша.*

Доказательство леммы 2. Рассмотрим произвольную коалицию S. Обозначим через $G_S(x_{N \setminus S})$ – множество сетей, достижимых изменениями действий участников коалиции S (при фиксированных действиях $x_{N \setminus S}$ прочих игроков). Так как x – сильное равновесие, отклонение в любую из сетей множества $G_S(x_{N \setminus S})$ невыгодно кому-то из участников коалиции S. Рассмотрим теперь вектор действий x'. Выигрыши участников коалиции S при использовании ими действий

x'_S равны их выигрышам в равновесии *x*. В то же время множество достижимых сетей $G_S(x'_{N\setminus S})$ не шире, чем множество $G_S(x_{N\setminus S})$, поскольку в действиях $x_{N\setminus S}$ теперь отсутствуют безответные предложения.

Так как коалиции *S* не было выгодно отклоняться ни в одну из сетей множества $G_S(x_{N\setminus S})$, ей невыгодно отклоняться из точки x' ни в одну из сетей более узкого множества $G_S(x'_{N\setminus S})$. Так как это верно для произвольной коалиции, профиль действий x' является сильным равновесием Нэша. Лемма 2 доказана.

Определение 10 [31]. *В играх согласия сеть* $g' \in G(X)$ *называется достижимой из сети* $g \in G(X)$ *отклонениями коалиции* $S \subseteq N$, *если из того, что* $ij \in g'$, $ij \notin g$, *следует, что* $i, j \in S$, *а из того, что* $ij \in g$, $ij \notin g'$, *следует, что либо* $i \in S$, *либо* $j \in S$.

Определение 11 [31]. *В играх согласия сеть* $g \in G(X)$ *называется сильно стабильной тогда и только тогда, когда для любой коалиции S и любой сети* g', *достижимой из сети g отклонениями коалиции S, из того, что найдется такой участник коалиции* $i \in S$, *что* $f_i(g') > f_i(g)$, *следует, что найдется и такой участник коалиции* $j \in S$, *что* $f_j(g') < f_j(g)$.

Таким образом, понятие сильной стабильности вводится только для игр согласия, в которых для образования связи требуется согласие обоих игроков.

Лемма 3. *В игре согласия сеть* $g \in G(X)$ *сильно стабильна тогда и только тогда, когда существует сильно равновесный по Нэшу профиль действий, приводящий к сети g.*

Доказательство леммы 3. По определению сеть сильно стабильна тогда и только тогда, когда для любой коалиции в любой сети, достижимой отклонениями данной коалиции, из того, что один из игроков коалиции выигрывает, следует, что другой игрок коалиции проигрывает. Достижимыми отклонениями коалиции *S* являются сети, где могут рваться связи, в которых участвует один из игроков коалиции, и образовываться связи между участниками коалиции.

По лемме 2, если есть сильное равновесие Нэша, приводящее к сети *g*, то и профиль действий $x'^{in} = x'^{out} = g$ также является сильным равновесием. Легко видеть, что множество $G_S(x_{N\setminus S})$ сетей, достижимых из точки $x'^{in} = x'^{out} = g$ изменениями действий произвольной коалиции *S*, совпадает с множеством достижимых сетей, удовлетворяющих определению сильной стабильности, т.е. сеть *g* сильно стабильна. Аналогично показывается, что если сеть сильно стабильна, то профиль действий, в котором $x'^{in} = x'^{out} = g$, является сильным равновесием Нэша. Лемма 3 доказана.

Следствие 3. *Сеть* $g \in G(X)$ *сильно стабильна тогда и только тогда, когда профиль действий, в котором* $x'^{in} = x'^{out} = g$, *является сильным равновесием Нэша.*

Сильное равновесие (и сильная стабильность) существенно расширяет возможности игроков по их воздействию на формирование сети. Кроме того, сильно равновесные сети обладают многими привлекательными свойствами, в частности, они всегда оптимальны по Парето [31].

Однако применение концепции сильного равновесия существенно ограничивается тем, что во многих играх сильные равновесия отсутствуют.

Пример 5. Рассмотрим игру трех лиц, в которой связи сети ненаправленные. В пустой сети все игроки получают выигрыш, равный единице, в полной сети – равный трем. В сетях с одной связью участники связи получают выигрыш, равный двум, оставшийся игрок – равный нулю. В сетях с двумя связями игрок, имеющий две связи, получает нулевой выигрыш, остальные игроки – выигрыши, равные четырем (см. рис. 1). Легко проверить, что в данной игре отсутствуют сильно стабильные сети. Стабильными же по Нэшу оказываются пустая сеть и сети с одной дугой.

Другой проблемой сильной стабильности являются высокие требования к коммуникативным возможностям игроков, их способностям к образованию коалиций, что ограничивает область применения этой концепции лишь играми с небольшим количеством участников.

В связи с этим существует необходимость в концепциях, «промежуточных» между равновесием Нэша и сильным равновесием.

Определение 12. *Профиль действий x назовем k-равновесием, если для любой коалиции $S \subseteq N$ размера $|S| \le k$ и любого вектора ее действий $x'_S = (x'_i)_{i \in S} \in \prod_{i \in S} X_i$ из того, что кто-то из участников коалиции строго выигрывает при профиле действий $(x'_S, x_{N \setminus S})$, следует, что другой участник коалиции строго проигрывает.*

Данное определение выделяет параметрический (с параметром k) класс решений игры, представляющих собой, по сути, сильные равновесия Нэша с ограничением k на максимальный размер коалиции.

Очевидно, что с ростом параметра k множество k-равновесных векторов действий не расширяется. 1-равновесия являются обычными равновесиями Нэша, n-*равновесия* – сильными равновесиями Нэша. Переход от 1-равновесий к 2-равновесиям в большой степени решает проблему «лишних» равновесий Нэша.

Тогда для игр согласия можно обобщить сильную стабильность до k-стабильности.

Определение 13. *В играх согласия будем говорить, что сеть $g' \in G(X)$ k-достижима из сети $g \in G(X)$ отклонением коалиции S, если она достижима (в соответствии с определением 10) и размер коалиции S не превышает k, $|S| \le k$.*

Определение 14. *Сеть $g \in G(X)$ k-стабильна, если для любой сети $g' \in G(X)$, k-достижимой из сети g отклонениями некоторой коалиции S, из того, что кто-то из участ-*

ников коалиции строго выигрывает от отклонения, следует, что найдется другой участник коалиции, который строго проигрывает.

Также можно доказать и аналоги лемм 2 и 3:

Лемма 4. *Если в игре согласия профиль действий x является k-равновесием и приводит к результирующей сети g, то профиль действий x', в котором $x'^{in} = x'^{out} = g$, также будет k-равновесием.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2 с учетом ограничений на размер коалиций.

Лемма 5. *Сеть $g \in G(X)$ k-стабильна тогда и только тогда, когда существует k-равновесный профиль действий, приводящий к сети g.*

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 3 с учетом ограничений на размер коалиций.

Введение параметрического класса k-равновесий позволяет ранжировать равновесия Нэша (1-равновесия) по «силе», приписывая каждому из них вес, равный максимальному номеру k, при котором данный профиль еще остается k-равновесием.

Как и для сильного равновесия Нэша, для k-равновесий при $k > 1$ можно ввести понятие *нестрогого* k-равновесия. В нем для отклонения коалиции от некоторого профиля действий необходимо строгое увеличение выигрыша всех участников коалиции. В «обычном» же k-равновесии коалиции выгодны отклонения, при которых выигрывают лишь некоторые из ее участников. Отличия между обычным и нестрогим k-равновесием иллюстрирует следующий пример.

Пример 6. В игре, описанной в примере 5 (см. рис. 1), пустая сеть имеет вес 1, так как она является 1-равновесием, но не является 2-равновесием. Сети из одной связи не являются 2-равновесиями, но являются нестрогими 2-равновесиями. Нестрогих 3-равновесий в данной игре нет. Таким образом, логично считать, что исходом данной игры, скорее всего, будет сеть, состоящая из одной связи.

5. Попарная стабильность

Рассмотренные в предыдущем разделе концепции решения показывают, что для игр согласия целесообразно формулировать концепцию решения не в терминах действий, а в терминах результирующих сетей.

Примером такой концепции решения является введенное М. Джексоном и А. Волынским [21] понятие попарно стабильных сетей. Первоначально попарная стабильность была сформулирована для ненаправленных сетей. Приводимое ниже определение расширено на случай сетей общего вида.

Определение 15 [21]. *В игре согласия сеть* $g \in G(X)$ *называется попарно стабильной тогда и только тогда, когда*

1) *для любой пары игроков* $i, j \in N$ *, если сеть* $g \setminus ij \in G(X)$ *(т.е. сеть* $g \setminus ij$ *реализуема некоторым профилем действий), то* $f_i(g \setminus ij) \le f_i(g)$ *,* $f_j(g \setminus ij) \le f_j(g)$ *;*

2) *если сеть* $g \cup ij \in G(X)$ *реализуема некоторым профилем действий, и в этой сети один из игроков строго выигрывает (* $f_i(g \cup ij) > f_i(g)$ *или* $f_j(g \cup ij) > f_j(g)$*), то другой строго проигрывает.*

Определение попарной стабильности для игр на ненаправленных сетях, в которых или связь отсутствует, или является двунаправленной, следует немного видоизменить.

Определение 16 [21]. *Если рассматриваются только ненаправленные сети, то в игре согласия сеть* $g \in G(X)$ *называется попарно стабильной тогда и только тогда, когда*

1) *для любой пары игроков* $i, j \in N$ *, если сеть* $g' := g \setminus \{ij, ji\} \in G(X)$ *(т.е. сеть* g' *реализуема некоторым профилем действий), то* $f_i(g') \le f_i(g)$ *,* $f_j(g') \le f_j(g)$ *;*

2) *если сеть* $g'' := g \cup \{ij, ji\} \in G(X)$ *реализуема некоторым профилем действий и в этой сети один из игроков строго выигрывает (* $f_i(g'') > f_i(g)$ *или* $f_j(g'') > f_j(g)$*), то другой строго проигрывает.*

Таким образом, в отличие от равновесия Нэша данная концепция решения допускает согласованное добавление связи игроками, если это им выгодно. Преимуществом попарной стабильности является ее простота.

Однако возможна ситуация, когда в попарно стабильной сети игрок может выиграть, разорвав в одностороннем порядке несколько входящих или исходящих связей. Таким образом, попарно стабильная сеть может не быть стабильной по Нэшу, что, несомненно, является недостатком концепции попарной стабильности.

Данный недостаток можно преодолеть, требуя от сети не только попарной стабильности, но и стабильности по Нэшу.

Определение 17. *В игре согласия сеть назовем гибридно-стабильной, если она попарно стабильна и стабильна по Нэшу.*

Гибридно-стабильными являются сети, в которых ни один из игроков не может выиграть, в одностороннем порядке разрывая входящие и/или исходящие связи, и два игрока не могут одновременно выиграть от добавления связи между ними.

Гибридная стабильность является промежуточной концепцией решения между стабильностью по Нэшу и 2-равновесием.

Действительно, 2-равновесными являются те гибридно-стабильные сети, в которых два игрока не могут одновременно выиграть, **согласованно** разрывая связи.

Сравнивая гибридную стабильность со стратегическими концепциями предыдущего раздела, можно видеть, что рассмотренные концепции решения сетевых игр можно выстроить по возрастанию их предсказательной силы следующим образом: 1-равновесие (равновесие Нэша) $\rightarrow$ гибридное равновесие $\rightarrow$ 2-равновесие $\rightarrow$ ... $\rightarrow$ n-равновесие (сильное равновесие Нэша). Кроме того, для каждого из k-равновесий при $k > 2$ можно построить его ослабление до нестрогого k-равновесия. Общая схема равновесий приведена на рис. 2 (стрелки направлены в сторону усиления равновесий).

6. Сетевые игры в развернутой форме

Как следует из предыдущих разделов, высокая неопределенность относительно поведения оппонентов, с которой сталкиваются игроки в процессе игрового конфликта, приводит к трудностям при использовании некооперативных концепций решения для предсказания исходов сетевой игры. С этой проблемой в первую очередь сталкивается даже не исследователь игры, а сами игроки. В такой ситуации от них логично ожидать некоторых действий, направленных на снижение неопределенности принятия решения.

Одним из способов снижения неопределенности, как показано выше, является образование коалиций между игроками и согласованный выбор ими действий. Такой подход к описанию игры оправдан, если формирование любых коалиций возможно в рамках содержательной постановки рассматриваемой задачи. В то же время такие неограниченные возможности по формированию коалиций приводят к тому, что равновесных по коалиционным отклонениям сетей во многих играх не оказывается вовсе.

Таким образом, равновесие Нэша позволяет предсказать исход сетевой игры в случае, когда игроки не могут вести совместные действия, а сильное равновесие – когда игроки имеют возможность образовывать произвольные коалиции и сравнивать свои выгоды от вхождения в любую из возможных коалиций.

В промежутке между этими моделями лежит широкий класс ситуаций, в которых соглашения между игроками возможны, но ограничены тем или иным *протоколом* их взаимодействия.

Выше была рассмотрена концепция k-равновесия, которая, по сути, представляет собой способ учета ограничений такого вида, а именно ограничений на размер образовывающихся коалиций.

В более же общем случае общение возможно только между некоторыми игроками или переговоры между игроками не могут продолжаться неограниченно долго (скажем, ограничено количество итераций предложение-ответ, которыми могут обмениваться игроки) и т.д. Для унифицированного описания подобных ситуаций используются модели *игр в развернутой форме* [18].

Игры в развернутой форме, в частности, позволяют моделировать игровые ситуации, в которых игроки выбирают действия не одновременно, и простейшая сетевая игра в развернутой форме задается указанием порядка, в котором игроки выбирают действия, зная, какие действия выбрали игроки, делавшие ход перед ними.

Однако чаще предметом сетевой игры в развернутой форме являются переговоры между игроками об образовании тех или иных связей. После того, как определен протокол общения игроков, данную игру можно решать с применением классических концепций решения [18].

Одной из первых сетевых игр в развернутой форме была следующая игра, предложенная Р. Ауманном и Р. Майерсоном [20].

Задается упорядочение $i_k j_k$, $k = 1,2,...$ всех возможных ненаправленных связей между игроками. Затем последовательно игроки i_k и j_k принимают решение о том, формировать связь $i_k j_k$ или нет, зная выборы игроков, сделавших ход перед ними. В случае образования связи $i_k j_k$ это решение не может быть пересмотрено. Однако если связь не образуется и некоторая пара игроков, делающих выбор, впоследствии принимает решение сформировать связь друг между другом, игроки i_k и j_k могут пересмотреть свой выбор.

Еще одним примером моделирования формирования сетей с помощью игр в развернутой форме является рассматриваемая в следующем разделе модель С. Куррарини и М. Морелли [28], в которой предметом переговоров является не только образование связи, но и перераспределение между игроками их выигрышей.

С формальной точки зрения подход, основанный на задании протокола взаимодействия игроков, безупречен. Однако стоит отметить, что моделирование даже самых простых переговорных процессов между игроками приводит к весьма сложным играм в развернутой форме. Таким образом, продуктивное исследование таких игр возможно только в относительно простых частных случаях.

Среди других подходов к моделированию процессов формирования сетей стоит отметить подход, предложенный А. Уаттс [33] и модифицированный А. Уаттс и М. Джексоном [24], основанный на динамической модели формирования связей.

В исходной модели А. Уаттс [33] процесс формирования связей начинается с пустой сети. В этой модели игроки считаются недальновидными, поскольку смотрят лишь «на одну связь вперед»: на каждом шаге случайным образом выбирается одна из связей, и если данная связь уже имеется в сети и один из участников связи выигрывает от ее разрыва, то связь удаляется из сети. Если же данная связь в сети отсутствует и один из участников выигрывает от ее добавления, а второй не проигрывает, то данная связь добавляется в сеть. Процесс продолжается до достижения сети, в которой ни одна из связей не может быть ни удалена, ни добавлена.

Легко проверить, что множество возможных конечных сетей такого процесса является подмножеством множества попарно стабильных сетей. Однако ввиду недальновидности игроков в некоторых играх процесс будет оставаться вечно на пустой сети, если в сети, состоящей из единственной связи, один из участников связи получает выигрыш меньший, чем в пустой сети. Стоит также отметить, что конечные сети процесса существенно зависят от того, из какой сети процесс стартует.

Для преодоления этих трудностей модель была модифицирована [24]: была добавлена вероятность $e > 0$ «ошибки» при добавлении или удалении связи, когда связь добавляется или удаляется наперекор желанию участников связи.

Теперь процесс формирования сети продолжается бесконечно, причем для каждой сети можно определить стационарную вероятность ее посещения процессом. Анализ этих вероятностей позволяет сделать выводы о стабильности тех или иных сетей [24].

7. Кооперативные модели сетевых игр

Несмотря на то, что, как показано выше, сетевые игры можно рассматривать как разновидность игр в нормальной форме, большее распространение в настоящее время получил подход, построенный на аналогии с теорией кооперативных игр, базовой моделью которой является представление игры в форме характеристической функции [34]. Данное представление позволяет описать игру в более простой форме и сконцентрировать внимание исследователя на вопросах взаимодействий между игроками, приводящих к реализации той или иной сети.

Построение для сетевых игр аналога характеристической функции требует предположения о трансферабельности выигрышей между игроками. Тогда можно ввести понятие *функции стоимости игры*.

Определение 18 [21]. *Для произвольной сетевой игры* $< N, f_i, X_i >$ *функцией стоимости называется сумма функций выигрыша всех игроков* $v(g) = \sum_{i \in N} f_i(g)$*, где сеть* $g \in G(X)$.

Для простоты будем считать, что стоимость пустой сети равна нулю. Кроме того, до конца данного раздела сети считаются ненаправленными.

Теперь можно забыть о функциях индивидуального выигрыша игроков – первичным понятием становится функция стоимости игры, которая каждой возможной сети ставит в соответствие совокупный выигрыш игроков, а индивидуальные выигрыши заменяются понятием *правила распределения*. Для множества игроков $N = \{1,\ldots,n\}$ множество всех сетей обозначим как $\Theta(N)$. Множество же всех возможных функций стоимости данных сетей обозначим через $V(N)$.

Определение 19 [21]. *Правилом распределения называется отображение* $Y : N \times \Theta(N) \times V(N) \to R^n$ *такое, что* $\sum_{i \in N} Y_i(N, g, v(.)) = v(g)$.

Таким образом, правило распределения для каждой сети в произвольной сетевой игре (заданной своей функцией стоимости) указывает способ распределения стоимости игры между игроками.

Каждое правило распределения является универсальным – оно относится сразу ко всем играм. Кроме того, правило распределения зависит не только от сети и стоимости данной сети, оно зависит и от стоимостей других сетей в данной игре.

Пример 7. Пожалуй, самым простым правилом распределения является эгалитарное правило [21] $Y_i^e(N, g, v(.)) = v(g)/n$, распределяющее стоимость игры поровну между всеми игроками.

Прослеживается очевидная аналогия между правилом распределения сетевой игры и операторами значения кооперативных игр [35], ставящими в соответствие каждой кооперативной игре способ распределения между игроками выигрыша максимальной коалиции.

Как и в теории кооперативных игр, в теории сетевых игр акцент в исследованиях делается на поиске правил распределения, при которых эффективные сети (сети максимальной стоимости или оптимальные по Парето сети) были бы стабильными (попарно стабильными или сильно стабильными). При этом желательно, чтобы правило распределения удовлетворяло требованиям справедливости и здравого смысла, таким, например, как принцип равных возможностей, анонимность, независимость [21].

Для того чтобы формализовать эти понятия, дадим ряд определений.

Определение 20 [21]. *Компонентой ненаправленной сети* $g \in \Theta(N)$ *будем называть связную компоненту соответствующего ненаправленного графа, состоящую более чем из одного игрока. Множество всех компонент сети обозначим через* $C(g)$, *а разбиение игроков по компонентам – через* $\Pi(g)$.

Для произвольного подмножества $S \subseteq N$ обозначим через $g \mid S$ сужение сети g на множество игроков S.

Определение 21 [21]. *Функция стоимости игры* v *называется компонентно-аддитивной, если для произвольной сети* $g \in \Theta(N)$ $v(g) = \sum_{h \in C(g)} g(h)$.

Таким образом, для компонентно-аддитивной функции стоимости игры стоимость каждой компоненты не зависит от других компонент сети.

Определение 22 [21]. *Правило распределения называется компонентно-независимым, если для произвольной компонентно-аддитивной функции стоимости* v, *для любой сети* $g \in \Theta(N)$ *и для любого множества игроков* $S \in \Pi(g)$, *образующих компоненту,* $\sum_{i \in S} Y_i(g, v) = v(g \mid S)$.

Отметим, что понятие компонентной независимости правила распределения относится только к играм с компонентно-аддитивными функциями стоимости.

Для произвольной перестановки игроков p (взаимно однозначного отображения N на N) и произвольной сети $g \in \Theta(N)$ обозначим через g^p сеть, состоящую из связей $p(i)p(j)$ таких, что $ij \in g$, и только из них.

Определение 23 [21]. *Функция стоимости игры называется анонимной, если для произвольной сети* $g \in \Theta(N)$ $v(g^p) = v(g)$, *т.е. стоимость сети зависит только от ее структуры, а не от номеров игроков, образующих те или иные связи.*

Определение 24 [21]. *Для заданной перестановки* p *обозначим* $v^p(g) = v(g^{p^{-1}})$. *Тогда правило распределения называется анонимным, если для произвольной игры* $< N, v >$, *произвольной сети* $g \in \Theta(N)$ *и произвольной перестановки* p *игроков* $Y_{p(i)}(g^p, v^p) = Y_i(g, v)$.

Иначе говоря, если игроки перенумерованы и стоимость сетей изменяется в соответствии с перенумерацией, то выигрыши перенумерованных игроков при анонимном правиле распределения не изменятся.

Пример 8 [21]. Определим компонентно-эгалитарное правило Y^{ce} распределения следующим образом: если функция стоимости игры не компонентно-аддитивная, то для любой сети $Y^{ce}(g,v) \equiv Y^e(g,v)$. Для компонентно-аддитивной же функции стоимости, сети g и любого игрока $i \in S \in \Pi(g)$ $Y_i^{ce}(g,v) \equiv v(g \mid S)/|S|$. Легко проверить, что данное правило является анонимным и компонентно-независимым.

Данные требования к правилу распределения являются формальным описанием представлений о справедливости. Действительно, если стоимость сети аддитивна по компонентам, то почему правило распределения должно перераспределять выигрыш между компонентами? Также, очевидно, что справедливое правило распределения должно зависеть только от вкладов игроков в формирование стоимости сети, а не от их номера.

Определение 25 [21]. *Для произвольной игры* $< N, v >$ *сеть* $g \in \Theta(N)$ *называется эффективной, если для любой другой сети* $g' \in \Theta(N)$ $v(g) \geq v(g')$.

Определение 26 [21]. *Для произвольной игры* $< N, v >$ *сеть* $g \in \Theta(N)$ *называется эффективной по Парето относительно правила распределения* Y, *если не существует сети, в которой каждый из игроков получал бы не меньший выигрыш, а один или несколько игроков – строго больший выигрыш, чем в сети* $g \in \Theta(N)$.

Как отмечено выше, важным вопросом является исследование устойчивости эффективных в том или ином смысле сетей, поиск правил распределения, которые приводили бы к тому, что эффективная сеть являлась бы в некотором смысле стабильной, т.е. реализация эффективной сети была бы в интересах игроков. Требования же справедливости правила распределения являются гарантией того, что для реализации эффективной устойчивой сети все игроки будут согласны использовать это правило. Как, однако, оказывается, требования устойчивости, эффективности и справедливости согласовать не так просто.

Теорема 1 [21]. *Не существует анонимного компонентно-аддитивного правила распределения, при котором для любой игры хотя бы одна из эффективных сетей была попарно стабильна.*

Для доказательства данного утверждения достаточно показать невозможность построения требуемого правила распределения для игры трех лиц, в которой стоимость полной сети и любой сети с одной связью равна единице, а стоимость любой сети с двумя связями равна 13/12.

В то же время очевидно, что если не требовать от правила распределения анонимности и компонентной независимости, то эгалитарное правило распределения снимает противоречие между эффективностью и стабильностью (как попарной, так и сильной).

Тот же результат можно получить, опуская только одно из требований – или компонентную независимость, или анонимность правила распределения. В первом случае можно использовать эгалитарное правило [21], во втором же – требуется более сложное правило, предложенное Б. Дуттой и С. Мутусвами [31].

Теорема 2 [21, 31]. *Рассмотрим класс таких функций стоимости игры, что стоимость любой непустой сети строго больше нуля. Для этого класса функций стоимости существует компонентно-независимое правило распределения, при котором хотя бы одна эффективная сеть будет попарно стабильной. Кроме того, несмотря на то, что это правило не анонимно, оно является анонимным для эффективных и попарно стабильных сетей.*

Противоречие между стабильностью, эффективностью и справедливостью можно также устранить, если требовать не эффективности, а лишь Парето-эффективности стабильных сетей. Оказывается [40], что компонентно-эгалитарное правило гарантирует попарную устойчивость хотя бы одной эффективной по Парето сети.

Также известно [22], что к отрицательному результату теоремы 1 приводят только случаи, когда в эффективных сетях есть игроки с единственной связью (или без связей вообще). Если отбросить такие игры, то противоречия между эффективностью и попарной стабильностью относительно анонимного, компонентно-независимого правила распределения также не возникает. Будем говорить, что сеть $g \in \Theta(N)$ не имеет «висячих концов», если в этой сети любой из игроков имеет как минимум две связи.

Теорема 3 [22]. *Существует такое анонимное, компонентно-независимое правило распределения, что для любой анонимной функции стоимости игры, имеющей эффективные сети без «висячих концов», найдется эффективная попарно стабильная сеть (без «висячих концов»).*

Это правило распределения является модификацией компонентно-эгалитарного правила.

Существуют и другие классы игр, для которых доказана эффективность попарно или сильно стабильных сетей при определенных правилах распределения (более подробно см. [22]).

Наконец, кратко коснемся относительно нового направления развития теории сетевых игр, объединяющего в себе черты игр в развернутой форме и кооперативных игр. Отличительной чертой игры в развернутой форме, описанной в статье С. Куррарини и М. Морелли [28], является то, что индивидуальные выигрыши игроков не заданы заранее (известна только стоимость сетей), а правило распределения является предметом переговоров игроков наряду с той сетью, которую игроки планируют сформировать.

В работе Куррарини и Морелли рассматриваются только игры согласия на ненаправленных сетях с анонимными компонентно-аддитивными функциями стоимости. Игроки делают ход последовательно в соответствии с некоторым внешним их упорядочением, зная ходы предшествующих игроков. Ход i-го игрока заключается в предложении $x_i = (x_{ij})_{i \neq j}, x_{ij} \in \{0,1\}$ об образовании связей с другими игроками и в запросе $d_i \geq 0$, определяющем сумму выигрыша, который i-й игрок хочет получить в результате игры. Результирующая сеть строится следующим образом: компонента h входит в результирующую сеть, если с образованием каждой связи этой компоненты согласны участники связи и сумма запросов d_i игроков, входящих в компоненту h, не превышает ее стоимости $v(h)$. Доказывается, что в данной игре всегда существует совершенное равновесие по подыграм.

Для того чтобы сформулировать условия, при которых равновесия являются эффективными, введем следующие определения:

Определение 27 [28]. *Связь* ij *называется критической для сети* $g \in \Theta(N)$, *если ее удаление увеличивает количество компонент сети* g.

На языке теории графов такие связи называются мостами.

Определение 28 [28]. *Функция стоимости игры называется монотонной по размеру, если для произвольной сети* g *и произвольной ее критической связи* ij $v(g) > v(g - ij)$. *Если функция стоимости игры монотонна по размеру, то любая эффективная сеть состоит из единственной компоненты.*

В [28] показывается, что если функция стоимости монотонна по размеру, то любое совершенное равновесие по подыграм приводит к эффективной сети. Там же доказан аналогичный результат и для некоторых модификаций рассмотренной игры.

Описанные результаты позволяют охарактеризовать перспективность применения тех или иных правил распределения в процессе формирования сетей, что позволяет предлагать определенные «хорошие» правила распределения, скажем, правительству или другому управляющему органу, если этот управляющий орган может зафиксировать правила институционально. Эта черта кооперативного подхода к сетевым играм сближает его с рассматриваемыми в следующей части статьи задачами управления сетевым взаимодействием.

8. Заключение

В первой части статьи кратко изложены основные результаты теории сетевых игр. Описаны стратегический, динамический и кооперативный подходы к описанию сетевого взаимодействия игроков. Несмотря на то, что теория сетевых игр – еще относительно молодое научное направление, на сегодняшний момент она уже представляет собой мощный аппарат моделирования процессов формирования сетей между целенаправленными субъектами, позволяющий использовать его в задачах управления этими процессами.

Решению задач управления сетевым взаимодействием посвящена вторая часть статьи.

Список литературы

1. *Новиков Д.А.* Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // АиТ. 1997. № 6. С. 3 - 26.
2. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001.
3. *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
4. *Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.
5. *Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др.* Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989.
6. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
7. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997.
8. *Бурков В.Н.* Методы теории активных систем в экспертных оценках / Экспертные оценки в задачах управления, 1982.
9. *Караваев А.П.* Модели и методы управления составом активных систем. М.: ИПУ РАН, 2003.
10. *Губко М.В.* Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН, 2003.
11. *Новиков Д.А.* Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН, 2003.
12. *Воронин А.А., Мишин С.П.* Оптимальные иерархические структуры. М.: ИПУ РАН, 2003.
13. *Губко М.В., Мишин С.П.* Оптимальная структура системы управления технологическими связями / Матер. междунар. науч. конф. «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 2002. С. 50 – 54.
14. *Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высш. шк., 1986.
15. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
16. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985.
17. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
18. *Myerson R.B.* Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.
19. *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А.* Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001.
20. *Aumann R., Myerson R.* Endogenous Formation of Links Between Players and Coalitions: An Application of the Shapley Value // The Shapley Value, Cambridge University Press, 1988. P 175–191.

21. *Jackson M.O., Wolinsky A.* A Strategic Model of Social and Economic Networks // J. Econom. Theory. 1996. N 71. P 44–74.
22. *Jackson M.O.* The Stability and Efficiency of Economic and Social Networks // Advances in Econom. Design. 2003.
23. *Jackson M.O. and Watts A.* The Existence of Pairwise Stable Networks // Seoul J. Econom. 2001. V 14. N. 3. P 299-321.
24. *Jackson M.O. and Watts, A.* The Evolution of Social and Economic Networks // J. Econom. Theory. 2002. V 106, N 2. P 265-295.
25. *Bala V. and Goyal S.* A Strategic Analysis of Network Reliability // Review of Economic Design. 2000. N 5. P 205–228.
26. *Page F.* Farsighted Stability in Network formation // Group Formation in Economics: Networks, Clubs, and Coalitions. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
27. *Page F., Wooders M., Kamat S.* Networks and Farsighted Stability. DP University of Warwick. 2001.
28. *Currarini S., Morelli M.* Network Formation with Sequential Demands // Rev. Econom. Design. 2000. N 5. P 229–250.
29. *Dutta B., Jackson M.O.* The Stability and Efficiency of Directed Communication Networks // Rev. Econom. Design. 2000. N 5, P 251–272.
30. *Dutta B., Jackson M.O.* On the Formation of Networks and Groups // Networks and Groups: Models of Strategic Formation, Heidelberg: Springer-Verlag. 2003.
31. *Dutta, B., Mutuswami S.* Stable Networks // J. Econom. Theory. 1997. N 76. P 322–344.
32. *Dutta B., van den Nouweland A., Tijs S.* Link Formation in Cooperative Situations // Int. J. Game Theory. 1998. N 27. P 245–256.
33. *Watts A.* A Dynamic Model of Network Formation // Games and Econom. Behavior. 2001. N 34. P 331–341.
34. *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир, 1971.
35. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
36. *Бондарева О.Н.* Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 119 – 140.
37. *Нэш Д.* Бескоалиционные игры / Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 205 – 221.
38. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. М.: Высш. шк., 1998.
39. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1968.
40. *Banerjee S.* Efficiency and Stability in Economic Networks. mimeo: Boston University, 1999.

Иллюстрации

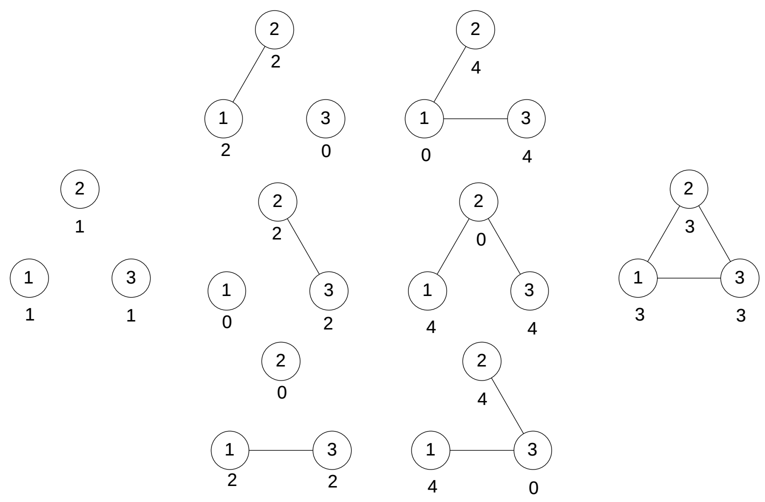

Рис. 1. Сетевая игра трех лиц

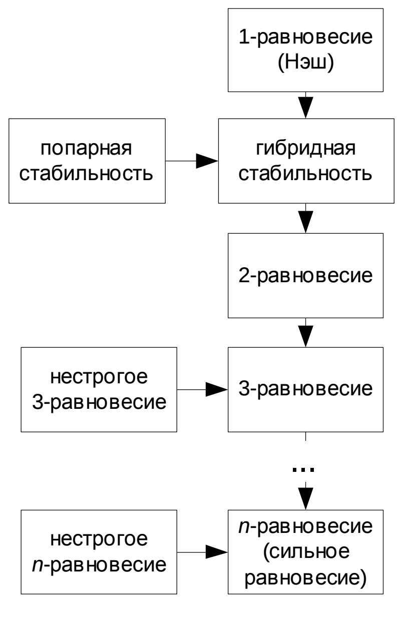

Рис. 2. Стратегические концепции решения сетевых игр.

Подписи к иллюстрациям

Рис. 1. Сетевая игра трех лиц

Рис. 2. Стратегические концепции решения сетевых игр.