



## КООПЕРАТИВНАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ТОРГОВОЙ СЕТИ

Губко М.В., к.т.н.

*Институт проблем управления РАН  
(лаборатория №57, e-mail: [mgoubko@mail.ru](mailto:mgoubko@mail.ru))*

**Ключевые слова:** формирование торговой сети, кооперативная игра, сбалансированность.

### Абстракт

В настоящем докладе обсуждается модель формирования торговых сетей между географически распределенными компаниями-агентами, которые могут производить товар, продавать его на «своем» рынке или перепродавать другим компаниям, неся при этом транспортные издержки. Строится кооперативная игра агентов, доказывається сбалансированность этой игры, что позволяет говорить об устойчивости коалиции, состоящей из всех агентов и эффективности моделируемой экономики.

### 1. Введение

Одной из характерных черт современной мировой экономики является глобализация рынков. Непрерывное развитие коммуникаций между странами и регионами в сочетании с увеличением темпов обмена новыми технологиями приводит к тому, что покупателям одного региона могут предлагаться близкие по своим потребительским свойствам товары, произведенные совершенно разными компаниями, расположенными зачастую весьма далеко от места продажи. При этом конкурентоспособность товара определяется уже не только себестоимостью его производства, но и транспортными, таможенными расходами, связанными с его доставкой к месту продажи.

Таким образом, путь от производителя товара к его потребителю становится таким сложным, что зачастую не может поддерживаться только силами самих производителей. В условиях глобализации рынка производители просто не могут сами заниматься сбытом своей продукции непосредственным потребителям.

Это приводит к появлению разветвленных, многозвенных дилерских сетей, занимающихся распределением товара, его «донесением» до конечного потребителя. Структура этих сетей играет решающую роль в определении того, какие именно товары будут предлагаться на том или ином рынке, по сути,



определяет конкурентоспособность товаров и объемы потребления в различных регионах.

Представление о закономерностях процессов формирования торговых сетей в первую очередь необходимо участникам этих сетей – производителям, дилерам, конечным продавцам, а также новым компаниям, ищущим свое место на рынке. Однако и государственные структуры, формирующие налоговое и таможенное законодательство, должны учитывать эти процессы для прогнозирования воздействия своих решений на экономику страны.

## 2. Модель формирования торговой сети

Рассмотрим множество  $N = \{1, \dots, n\}$  компаний (агентов), находящихся в различных географических регионах и занимающихся производством и продажей одного вида продукции. Каждая компания  $i \in N$  может производить товар в объеме  $0 \leq m_i \leq M_i$  с себестоимостью единицы продукции  $c_i$  и продавать его в своем регионе в объеме  $0 \leq s_i \leq S_i$  по цене  $r_i$ .

Кроме того, любая компания  $i \in N$  может продавать товар другой компании  $j \in N, j \neq i$  в объеме  $0 \leq v_{ij} \leq V_{ij}$ . Цену передачи единицы товара  $j$ -й компании от  $i$ -й компании обозначим  $p_{ij}$ . Цены  $p_{ij}$  – договорные, то есть являются результатом некоторых переговоров между компаниями.

Передача каждой единицы товара от  $i$ -й компании  $j$ -й влечет фиксированные транспортные расходы  $t_{ij} \geq 0$ . Для простоты будем считать, что транспортные расходы оплачивает компания, принимающая товар. Тогда чистый доход  $i$ -й компании от продажи единицы товара  $j$ -й компании равен  $p_{ij}$ , а затраты  $j$ -й компании по приобретению единицы товара у  $i$ -й компании равны  $p_{ij} + t_{ij}$ .

Если у некоторой компании  $i \in N$  есть возможность продать товар компании  $j \in N$  более выгодно, чем на внутреннем рынке, то есть если  $p_{ij} > r_i$ , и  $j$ -й компании выгодно приобретать товар у  $i$ -й компании, то они могут заключить соглашение о поставке товара. Таким образом, формируется торговая сеть – набор направленных связей, соглашений между компаниями о поставке товара. В соответствии с этими соглашениями товар, произведенный одними агентами, передается между агентами до места своей продажи конечному потребителю.

Итак, торговая сеть  $g$  представляет собой направленный граф, вершинами которого являются агенты. Торговая сеть полностью описывается матрицей объемов  $v = (v_{ij})_{i \in N, j \neq i}$ , матрицей цен  $p = (p_{ij})_{i, j \in N, i \neq j}$ , векторами производства  $m = (m_i)_{i \in N}$  и продаж  $s = (s_i)_{i \in N}$ .

Для каждого агента  $i \in N$  должно выполняться ограничение на объем производства  $0 \leq m_i \leq M_i$  и товарный баланс закупок и продаж:

$$\sum_{j \neq i} v_{ij} + s_i = \sum_{j \neq i} v_{ji} + m_i \quad (1)$$



Выполнение товарного баланса означает, что объем продаж агента равен сумме его объемов закупки и объема производства.

Прибыль  $i$ -й компании в торговой сети  $g = \langle v, p, m, s \rangle$  представляет собой разность дохода от продажи товара и затрат по его приобретению или производству.

$$f_i(g) = \sum_{j \neq i} p_{ij} v_{ij} + r_i s_i - \sum_{j \neq i} (p_{ji} + t_{ji}) v_{ji} - c_i m_i \quad (2)$$

### 3. Кооперативная игра агентов

Мы будем моделировать переговорный процесс между агентами с помощью кооперативной игры в форме характеристической функции [1].

Характеристической функцией называется вещественнозначная функция  $v(T)$ , определенная на множестве всех непустых коалиций  $T \subset N$  агентов. Она определяет выигрыш, получаемый коалицией  $T$  (если в процессе игры такая коалиция образовалась) при рациональных действиях ее участников. Если образуется некоторая коалиция агентов, то они действуют совместно, стараясь своими действиями максимизировать суммарный выигрыш коалиции. Очевидно, выигрыш коалиции в общем случае зависит не только от действий участников коалиции, но и от действий агентов, не входящих в коалицию. Обычно в качестве значения характеристической функции коалиции берется ее гарантированный выигрыш при наихудших для нее действиях оппонентов. В рамках рассматриваемой модели это означает, что образующаяся коалиция «изолируется» от остальных агентов и может формировать торговую сеть только между своими участниками. Прибыль коалиции можно записать  $T$  так:

$$f_T(\cdot) = \sum_{i \in T} [r_i s_i - c_i m_i - \sum_{j \in T \setminus i} t_{ij} v_{ij}]. \quad (3)$$

Отметим, что в выражение прибыли коалиции уже не входят цены передачи товара между агентами коалиции.

Обозначим  $x_T = (m_i, s_i, (v_{ij})_{j \in T \setminus i})_{i \in T}$  – действие коалиции. Тогда характеристическая функция  $v(T)$  коалиции  $T$  записывается в виде решения следующей задачи:

$$v(T) = \max_{x_T} f_T(x_T) \text{ при условиях } 0 \leq v_{ij} \leq V_{ij}, 0 \leq m_i \leq M_i, 0 \leq s_i \leq S_i, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in T \setminus i} v_{ij} + s_i = \sum_{j \in T \setminus i} v_{ji} + m_i \text{ для всех } i \in T, j \in T \setminus i$$

Очевидно, эта задача линейного программирования имеет некоторое решение  $y^T = (m_i^T, s_i^T, (v_{ij}^T)_{j \in T \setminus i})_{i \in T}$ . Введем обозначение  $f_i^T := r_i s_i^T - c_i m_i^T - \sum_{j \neq i} t_{ij} v_{ij}^T$ .

В этих обозначениях характеристическая функция коалиции  $T$  имеет вид

$$v(T) = \sum_{i \in T} [r_i^T s_i^T - c_i m_i^T - \sum_{j \neq i} t_{ij} v_{ij}^T] = \sum_{i \in T} f_i^T. \quad (5)$$

Если образуется «максимальная коалиция» (коалиция из всех агентов), то агенты действуют сообща, максимизируя сумму своих целевых функций. В этом случае моделируемая экономика эффективна.



Одним из важнейших вопросов, рассматриваемых теорией кооперативных игр, является вопрос об условиях устойчивости максимальной коалиции. Для существования устойчивой максимальной коалиции необходимо наличие такого распределения выигрыша максимальной коалиции между агентами (дележа), что любая другая коалиция не могла предложить своим участникам большего суммарного выигрыша [2]. Известно, что такое распределение существует в том случае, когда игра сбалансирована [3].

Сбалансированным покрытием называется такое отображение  $d$  из множества собственных коалиций  $2^N \setminus \{N\}$  в отрезок  $[0, 1]$ , что  $\sum_{S: i \in S} d_S = 1$  для всех  $i \in N$ , где

суммирование ведется по собственным коалициям, содержащим  $i$ -го агента.

Игра сбалансирована тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного покрытия  $d$  выполнено неравенство  $\sum_{S \subset N} d_S v(S) \leq v(N)$  [3].

Поскольку  $v(T) = \sum_{i \in T} f_i^T$ , то, как показано в [2], сумму из левой части неравенства можно переписать так:  $\sum_{T \subset N} d_T \sum_{i \in T} f_i^T \equiv \sum_{i \in N} \sum_{T: i \in T} d_T f_i^T$ . Здесь

суммирование во внутренней сумме ведется по всем собственным коалициям, содержащим  $i$ -го агента. Тогда левая часть неравенства приобретает вид

$$\sum_{i \in N} \sum_{T: i \in T} d_T [r_i s_i^T - c_i m_i^T - \sum_{j \neq i} t_{ij} v_{ij}^T] \quad \text{или} \quad (6)$$

$$\sum_{i \in N} [r_i \sum_{T: i \in T} d_T s_i^T - c_i \sum_{T: i \in T} d_T m_i^T - \sum_{j \neq i} t_{ij} \sum_{T: i \in T} d_T v_{ij}^T] \leq \sum_{i \in N} f_i^N.$$

Введем обозначения  $s_i = \sum_{T: i \in T} d_T s_i^T$ ,  $m_i = \sum_{T: i \in T} d_T m_i^T$ ,  $j_{ij} = \sum_{T: i \in T} d_T v_{ij}^T$ ,  $i \in N$ ,  $j \neq i$  и получим условие сбалансированности игры агентов в виде

$$\sum_{i \in N} [r_i s_i - c_i m_i - \sum_{j \neq i} t_{ij} j_{ij}] \leq \sum_{i \in N} f_i^N. \quad (7)$$

Легко проверить, что для любого сбалансированного покрытия действие  $(s, m, j)$  является допустимым действием максимальной коалиции. Таким образом, в левой части неравенства (7) стоит выигрыш коалиции всех агентов при некотором их допустимом действии, справа же стоит максимальный выигрыш этой коалиции по всем допустимым действиям. Следовательно, неравенство верно и игра сбалансирована, образуется устойчивая максимальная коалиция, и экономика агентов эффективна в смысле максимизации их суммарной прибыли.

Нахождение сети, максимизирующей прибыль агентов, сводится к решению задачи (4) для коалиции всех агентов. Эта задача линейного программирования эффективно решается с помощью симплекс-метода.

Для поиска устойчивого дележа прибыли максимальной коалиции между агентами необходимо вычислить характеристическую функцию каждой коалиции решить систему  $2^{n-1}$  неравенств. Перспективным, однако,



представляется поиск для данной задачи эффективного алгоритма построения устойчивого дележа.

Открытым остается и вопрос о способе реализации устойчивого дележа. Необходимо подобрать цены передачи товара между агентами таким образом, чтобы каждый агент получил причитающуюся ему долю суммарной прибыли коалиции. Некоторые связанные с этим проблемы рассмотрены в [4].

Также перспективным представляется исследование процессов ценообразования в предложенной модели формирования торговой сети с использованием аппарата некооперативной теории игр и теории рыночного равновесия, в частности, доказательство существования эффективного некооперативного равновесия игры агентов.

### **Заключение**

Предложена модель формирования торговых сетей между географически распределенными компаниями-агентами, которые могут производить товар, продавать его на «своем» рынке или перепродавать другим компаниям, неся при этом транспортные издержки. Исследована кооперативная игра агентов. Доказана сбалансированность этой игры, что говорит об устойчивости коалиции всех агентов и эффективности моделируемой экономики. Намечены направления дальнейшего развития полученных результатов.

### **Библиографический список**

1. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 150 с.
2. Губко М.В. Управление организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН, 2003. – 140 с.
3. Бондарева О.Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр / Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 119 – 140.
4. Губко М.В. Модель формирования бизнес-схем в транснациональных корпорациях. Системы управления и информационные технологии, 2003, 1-2(12), с. 44-48.