© 2004 г. С. П. Мишин, к-т физ.-мат. наук
(Институт проблем управления РАН, smishin@newmail.ru)

ОПТИМАЛЬНОЕ СТИМУЛИРОВАНИЕ В МНОГОУРОВНЕВЫХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Рассмотрена модель многоуровневой иерархической структуры, элементы которой стремятся максимизировать свою “прибыль” (разность между стимулированием и затратами на руководство подчиненными элементами), перестраивая подчиненную им часть структуры. Для различных вариантов информированности о функционале затрат решена задача выбора оптимального стимулирования, приводящего к равновесной структуре (в которой перестроения не выгодны элементам) с минимальными суммарными выплатами.

1. Введение

В последние десятилетия большое внимание уделяется построению формальных моделей *организационных систем*. Характерной чертой организационной системы является целенаправленность поведения ее элементов (*активность*). Необходимость построения указанных моделей обусловлена, на наш взгляд, потребностью в количественном анализе постоянно усложняющегося взаимодействия экономических агентов, в переходе от “описательной экономики” к решению задач оптимального управления экономическими системами.

Однако, несмотря на большое количество работ, до создания исчерпывающей модели организационной системы еще весьма далеко [1, 2, 3]. Связано такое положение дел со сложностью и многогранностью предмета исследования. Работы ведутся в рамках теории активных систем [2], теории иерархических игр [3, 4, 5], теории контрактов [6 - 9]. Одно из наименее исследованных направлений – моделирование структуры организационной системы [10, 11]. Ряд работ по структурной оптимизации [12 - 20] не претендуют на полноту исследования структурных эффектов по двум причинам: во-первых, как показано в [15], на сегодняшний день решены только отдельные частные задачи из большого класса проблем структурной оптимизации, во-вторых, оптимизационный подход не учитывает активности элементов, которая может создавать внутренние “напряжения” и приводить к разрушению неравновесной оптимальной структуры.

В последние годы за рубежом вопросу оптимизации равновесных структур уделяется все больше внимания [21 - 26]. В этих работах рассматриваются модели взаимодействия элементов, которые могут быть связаны произвольным графом (сетью). Однако в такой постановке тяжело выработать универсальную концепцию равновесия (см. раздел 4).

С содержательной точки зрения весьма важны иерархические структуры, хорошо описывающие взаимодействие элементов многих организационных систем [20, 27]. К сожалению, пока не создано сколько-нибудь полного аппарата анализа многоуровневых иерархических структур, учитывающего активность элементов, которые могут изменять подчиненные им участки структуры. Одна из трудностей состоит в переменном составе игроков, которые могут вступать в структуру и выходить из нее. Однако, даже при постоянном составе, исследование игры в классической постановке приводит к задачам колоссальной сложности [11][1]. В связи с этим интересны исследования игр специального вида, например задач стимулирования [28]. Однако в [28] исчерпывающе исследованы лишь двухуровневые (веерные) структуры. *Таким образом, представляется актуальным проводимое в данной работе исследование стимулирования элементов многоуровневой иерархической структуры, которое позволяет создать равновесную структуру с минимальными расходами (оптимальное стимулирование)*. Под “ходом” элемента понимается выбор им своих подчиненных. От выбора подчиненных зависят затраты элемента (на выполнение руководящих функций) и стимулирование (“вознаграждение”). Максимизируя разность между стимулированием и затратами (“прибыль”), элементы последовательно делают ходы “сверху вниз” (самоорганизуются) и формируют таким образом равновесную структуру. В работе найдены оптимальные стимулирования и равновесные структуры для различных классов функционала затрат элементов и информированности о нем метацентра.

2. Иерархические структуры и графы организации

О п р е д е л е н и е 1. *Иерархической структурой* (*иерархией*) *назовем ориентированный граф G*=(*V,E*) *без циклов,* $E \subset V \times V$.[2] *Для ребра* $(u,v) \in E$ *вершину u назовем заместителем вершины v в графе G. Если из вершины* $u \in V$ *в вершину* $v \in V$ *существует путь, то вершину u назовем подчиненным вершины v в графе G, а v – начальником вершины u.*

Данное определение согласуется с общепринятой моделью иерархической структуры, под которой понимают совокупность несимметричных отношений типа начальник – подчиненный ему заместитель (ориентированность) без замкнутых цепочек (ацикличность). Вершине иерархии подчинены ее заместители, заместители заместителей и т.п.

О п р е д е л е н и е 2. *Вершину без подчиненных назовем исполнителем. Все множество исполнителей иерархии G*=(*V,E*) *обозначим через* N_G. *Остальные вершины назовем управляющими. Для управляющей вершины* $v \in V \setminus N_G$ *множество подчиненных исполнителей назовем подчиненной группой и обозначим* $g_G(v)$, $g_G(v) \subseteq N_G$. *Управляющую вершину без начальников назовем высшей.*

Под исполнителями могут пониматься, например, рабочие, а под управляющими вер-

---

[1] В работе исследовалось разбиение игроков по уровням, определяющее последовательность их ходов. Количество задач поиска равновесия очень быстро растет по мере увеличения числа игроков.

[2] V – множество вершин графа, E – множество ребер. Граф считаем конечным. Некоторые методы анализа бесконечных иерархий приведены в [16].

шинами – “руководящий состав”. Группа $g_G(v)$ – множество исполнителей, которыми управляет вершина v (непосредственно или через некоторую цепочку заместителей). Можно привести множество содержательных интерпретаций, например рассмотренную в [15, 29] модель организации взаимодействия исполнителей, связанных графом технологических отношений. На рис. 1 приведены примеры технологического графа[3] (он расположен в плоскости) и “надстроенной” над ним управляющей иерархии. На рисунке слева управляющей вершине I подчинена группа исполнителей {1, 2, 3}, вершине II – группа {4, 5, 6}, а вершине III – все исполнители – группа {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} (группы обведены непрерывными линиями).

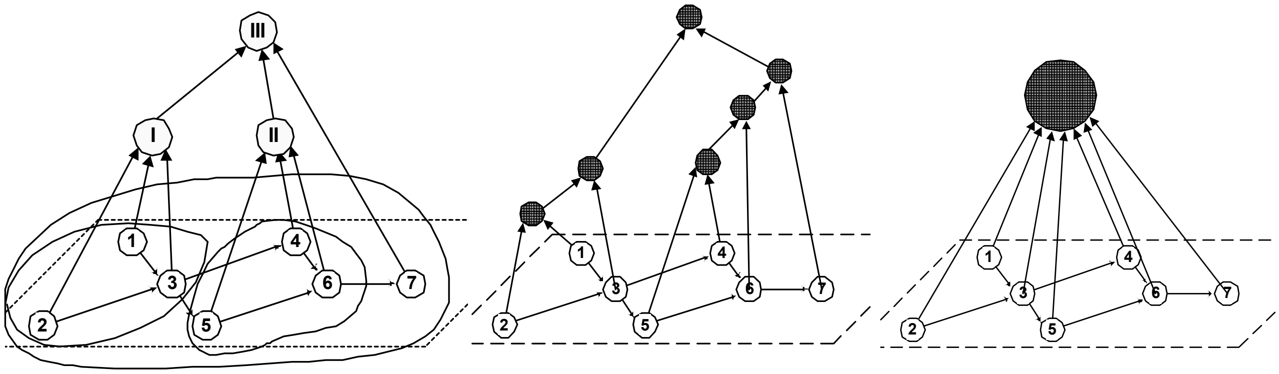


Рис. 1. Примеры графов организации технологических отношений

О п р е д е л е н и е 3. *Множество допустимых иерархий обозначим через Ω. Все множество исполнителей обозначим через* $N = \bigcup_{G \in \Omega} N_G$. *Под группой g будем понимать любое конечное подмножество множества исполнителей –* $g \subseteq N$.

То есть множество *N* включает вершины, которые являются исполнителями хотя бы в одной из рассматриваемых иерархий[4]. В примере на рис.1 N={1,2,3,4,5,6,7}.

О п р е д е л е н и е 4. *Для заданных групп исполнителей* $f_1, \ldots, f_m \subseteq N$ *графом организации* (*организацией*) *групп* $f_1,\ldots,f_m$ *назовем любую иерархию* $G=(V,E)$, *в которой найдутся вершины, управляющие каждой из групп* $f_1,\ldots,f_m$, *т. е. существуют* $v_1, \ldots, v_m \in V$, *для которых* $g_G(v_1)=f_1,\ldots,$ $g_G(v_m)=f_m$. *Множество всевозможных графов организации набора групп* $\mathbf{f}=\{f_1,\ldots,f_m\}$ *обозначим через* $O(f_1,\ldots,f_m)$ *или* $O(\mathbf{f})$.

То есть граф организации содержит вершины, управляющие (непосредственно или с помощью некоторой цепочки заместителей) взаимодействием исполнителей в заданных группах. Содержательно каждая группа может отвечать, например, за выпуск одного из изделий (реализацию одного из проектов), а вершины $v_1,\ldots,v_m$ могут соответствовать начальникам цехов (проект менеджерам). Набор групп $\mathbf{f}=\{f_1,\ldots,f_m\}$ при этом соответствует всему набору выпускаемых изделий (реализуемых проектов).

---

[3] Ребра графа означают потоки сырья, материалов, энергии, информации и т.п. с заданной интенсивностью.
[4] Ниже в настоящей работе отождествляются иерархии, одинаковые с точностью до “переименования” управляющих вершин. То есть, можно считать, что вершина $a \in N$ либо не входит в $G \in \Omega$, либо является в G исполнителем, исключая случаи, когда исполнитель в некоторых иерархиях является управляющей вершиной.

Далее будем считать, что среди групп $f_1,\dots,f_m$ нет тривиальных (состоящих из одного исполнителя) и вложенных друг в друга ($f_i \subseteq f_j$ для $i \neq j$). Содержательно это требование достаточно естественно: взаимодействие в тривиальной группе организовывать не нужно (всю “работу” выполняет один исполнитель), а в случае $f_i \subseteq f_j$ достаточно организовать взаимодействие в группе f_j, чтобы было организовано взаимодействие в подгруппе f_i. Если некоторой высшей вершине v подчинена группа $g_G(v)$, не входящая в набор $\{f_1,\dots,f_m\}$, то после удаления v граф G по-прежнему останется организацией из $O(\mathbf{f})$ и будет выполнять все функции (организовывать взаимодействие в нужных группах). Ниже под организациями будем понимать графы без “лишних” высших вершин, т. е. любой граф $G \in O(\mathbf{f})$ содержит ровно m высших вершин, которым подчинены группы $f_1,\dots,f_m$.

На рис. 2 приведены примеры организаций (множество исполнителей $N=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$). Вместо самих управляющих вершин на рисунке изображены управляемые ими группы (управляющие вершины можно назвать произвольно). Слева на рисунке изображена организация двух групп $f_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ и $f_2=\{a_2,a_3,a_4\}$. Вершины f_1 и f_2 управляют непосредственно исполнителями, входящими в группу. Назовем такую организацию *веерной*. В центре рис. 2 группы f_1 и f_2 организуются с помощью последовательного “присоединения” исполнителей[5]. Такие организации назовем *последовательными*.

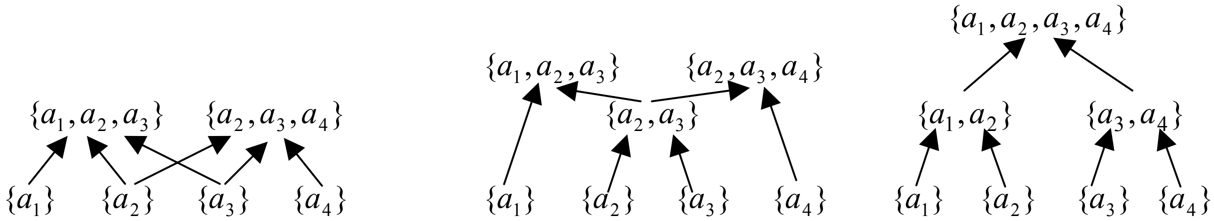


Рис. 2. Примеры графов организации

Справа на рис. 2 изображена организация одной группы $f=N=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. Каждая группа организуется из непересекающихся подгрупп. Отсутствует множественное подчинение. Граф представляет собой *дерево* (из каждой вершины, кроме корня f, выходит ровно одно ребро). *Множество деревьев организации одной группы f обозначим через $D(f)$*. Определим также *r-организацию – граф, каждой вершине которого подчинено не более r заместителей*. На рис. 2 слева изображена 3-организация, остальные графы – 2-организации[6].

Граф организации формализует понятие “функций” иерархической структуры, которая существует не “сама по себе”, а выполняет конкретные “задачи” (организует взаимодействие в группах). Ниже в данной работе кроме всего множества графов организации $\Omega=O(\mathbf{f})$ рассматривается множество деревьев $\Omega=D(f)$, так как этот класс структур, во-первых, иссле-

---

[5] При этом промежуточная группа $\{a_2,a_3\}$ используется как для организации f_1, так и для организации f_2.

[6] Последовательная организация – частный случай 2-организации. Строгие определения терминов, выделенных курсивом, читатель, при желании, может сформулировать самостоятельно или найти в [15].

дован наиболее полно, а во-вторых, в [15] показано, что деревья описывают разнообразные частные модели иерархических структур. Далее термины “структура”, “иерархия”, “организация” используются как синонимы.

3. Функционалы

О п р е д е л е н и е 5. *Структурным функционалом назовем отображение* $F:\Omega\to R$, *ставящее в соответствие каждой допустимой иерархии действительное число по формуле* $F(G)=\sum_{v\in V/N_G} F(g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k))$, *где* $G=(V,E)\in\Omega$ *– иерархия,* $v_1,\ldots,v_k\in V$ *– заместители вершины* v, *а* $F(g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k))\geq 0$ *– функционал организации взаимодействия, заданный на всевозможных наборах групп исполнителей*[7] (*не зависящий от порядка аргументов*).

Ниже рассматриваются различные структурные функционалы. Поясним определение 5 на примере функционала затрат. Если вершина v “руководит” заместителями $v_1,\ldots,v_k$, то ее затраты, вообще говоря, могут зависеть от характеристик самой вершины v, ее заместителей $v_1,\ldots,v_k$ и даже от характеристик всех остальных вершин графа G. Однако для достижения простоты модели, которая дает возможность ее исследования, мы вынуждены ограничивать класс функционалов разумным образом. Определение 5, по сути, опирается на 2 предположения. Первое предположение – затраты руководителя v зависят только от управляемого им *звена*, т. е. от заместителей $v_1,\ldots,v_k$, но не зависят от подчиненных более низких уровней и других частей графа[8]. Второе предположение – *анонимность*, согласно которой затраты руководителя v зависят не от персональных “качеств” заместителей $v_1,\ldots,v_k$, а от подчиненных им групп $g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k)$, т. е. от “задач”, которые фактически выполняют заместители (руководят подчиненными исполнителями).

То есть содержательно структурный функционал $F(g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k))\geq 0$ может, например, определять затраты на “координацию взаимодействия”[9] между группами $g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k)$ (при этом взаимодействие исполнителей внутри групп уже координируют заместители $v_1,\ldots,v_k$). В задаче организации технологического взаимодействия исполнителей (см. пример на рис. 1) затраты руководителя на координацию подчиненных групп зависят от “суммы взаимодействий” между этими группами. Например, затраты $F(\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7\})$ вершины III (см. рис. 1) определяются суммарными потоками между этими группами, т. е. потоками по ребрам технологического графа (3,4); (3,5); (6,7).

---

[7] Здесь и далее одной и той же буквой обозначено значение функционала на иерархии и на наборе (множестве) групп, что не приводит к путанице в силу различия аргументов.
[8] Это предположение вполне разумно, если система находится в “стабильной ситуации”, когда заместители четко справляются со своими обязанностями и не передают “свои проблемы” начальнику.
[9] Под координацией взаимодействия групп может пониматься как деятельность менеджера по распределению заданий по группам, контролю за их выполнением и т.д., так и, например, обучение групп исполнителей в связи с изменением выпускаемой продукции и т.п. То есть конкретная интерпретация работы руководителя зависит от специфики моделируемой системы.

В [15] показано, что если на множестве иерархий Ω задан произвольный функционал $F:\Omega \to R$, обладающий свойствами аддитивности (представим в виде суммы значений по отдельным звеньям) и анонимности (не изменяется при “переименовании” управляющих вершин), то он структурен. Таким образом, при выполнении ограничений, достаточно разумных с содержательной точки зрения, функционал можно считать структурным. Корректность указанных ограничений на практике для конкретной системы может быть установлена либо априори, либо на основании соответствия результатов моделирования объекту. В данной работе этот вопрос не рассматривается.

В силу анонимности переименование управляющей вершины не влияет на значение структурного функционала. Это иллюстрирует, например, рис. 2. Каждому графу на рисунке можно сопоставить сколько угодно иерархий, по-разному называя управляющие вершины. Но все эти иерархии будут управлять одними и теми же группами, значение структурного функционала будет одним и тем же (такие иерархии названы в [15] *структурно эквивалентными*). Поэтому *ниже отождествляются все структурно эквивалентные иерархии*.

4. Стимулирование. Концепция равновесия. Самоорганизация

О п р е д е л е н и е 6. *Функционалом затрат иерархии назовем структурный функционал* $Z(G)=\sum_{v\in V/N_G} Z(g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k))$, *где* $G=(V,E)$ *– иерархия* $G\in\Omega$, $v_1,\ldots,v_k$ *– заместители вершины* v, *а* $Z(g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k))\geq 0$ *– затраты вершины* v. *Функционалом стимулирования назовем структурный функционал* $P(G)=\sum_{v\in V/N_G} P(g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k))$, *где* $P(g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k))\geq 0$ *– стимулирование вершины* v.

В [15] рассмотрена задача поиска иерархии, оптимальной в смысле некоторого структурного функционала. Основной недостаток такого подхода состоит в том, что учитываются только интересы *метацентра* (например, владельца организации), т. е. максимизируется суммарная эффективность всей структуры без учета “интересов” отдельных управляющих вершин. Это может приводить к неравновесным ситуациям (внутренним напряжениям), т. е. к стремлению вершин изменить структуру. Определение 6 дает возможность учесть интересы (активность) управляющей вершины v с помощью *функционала прибыли*:

$$F(g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k)) = P(g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k)) - Z(g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k)), \quad (1)$$

т. е. разности дохода (стимулирования) и затрат вершины v.[10] Множество исполнителей N будем считать неизменным, не учитывая их активности (например, предполагая постоянную

---

[10] Под затратами имеются в виду не субъективные затраты вершины, а объективные затраты на выполнение работ по координации, выраженные в тех же единицах, что и стимулирование. Субъективные затраты в модели не учитываются, так как рассматриваются только структурные (анонимные) функционалы. Считаем, что при превышении субъективных затрат конкретной вершины над объективно необходимыми, эту вершину можно заменить. Аналогично не рассматриваются вопросы “качества работы”. Предполагается, что результат работы – факт координации заместителей – не может быть “хорошим” или “плохим”.

заработную плату и простоту замены в случае ухода исполнителя)[11]. Управляющая вершина несет затраты $Z(g_G(v_1),\ldots, g_G(v_k))$, поэтому для ее работы в организации необходимо стимулирование (вершина не будет выполнять организационные функции “за свой счет”). Содержательно стимулирование $P(g_G(v_1),\ldots, g_G(v_k))$ можно понимать как вознаграждение, выплачиваемое метацентром управляющей вершине в качестве компенсации за ее работу по управлению заместителями $v_1,\ldots, v_k$ (за координацию взаимодействия групп $g_G(v_1),\ldots, g_G(v_k)$).

Предваряя формальное определение, обсудим понятие равновесия в иерархической структуре. В последние годы резко возрос интерес к игровым моделям на различных графах. Например, ряд зарубежных работ [21 - 26] посвящен рассмотрению всевозможных графов (а не только ориентированных ациклических!) на заданных вершинах и целевых функций каждой вершины, зависящих от всего графа. Задача метацентра найти наилучшую для себя равновесную структуру, в которой вершины не могут увеличить целевую функцию в рамках определенного круга действий. Принципиальная трудность здесь состоит в неоднозначности определения допустимых действий. В результате можно получить широкий диапазон концепций равновесия – от попарной стабильности [25][12] до сильной стабильности [24].[13] При этом попарная стабильность не учитывает достаточно очевидных действий вершины (например, отказ от всех связей), а сильно стабильное состояние во многих случаях не существует. Таким образом, в случае произвольных графов определить разумную концепцию равновесия можно, лишь опираясь на конкретную содержательную интерпретацию, что затрудняет исследование абстрактной модели.

В графах организации понятие равновесия удается ввести достаточно естественно. Рассмотрим вершину v графа G, которой подчинены заместители $v_1,\ldots,v_k$. Вершине v подчинена группа $g_G(v)$, которая организуется из подгрупп $g_G(v_1),\ldots,g_G(v_k)$, подчиненных заместителям. Граф организации $G \in O(f_1,\ldots,f_m)$ обеспечивает управление заданными группами $f_1,\ldots,f_m$ (см. определение 4). Каждая вершина графа G обеспечивает управление подчиненной ей группой. Таким образом, естественно считать, что вершина v не может установить связи с исполнителями, не входящими в $g_G(v)$ (расширить группу), а также отказаться от части исполнителей (сузить группу), так как в этом случае вершина перестала бы выполнять возложенную на нее функцию[14]. Однако при условии выполнения своей функции (руководство заданной группой $g_G(v)$) вершина v обычно может достаточно свободно менять своих замес-

[11] Под исполнителем можно также подразумевать конкретную обязанность (рабочее место и т.п.), для выполнения которой несложно подобрать сотрудника или сотрудников.

[12] Никакой вершине не выгодно удалять связь, и никаким двум вершинам не выгодно вступать в новую связь.

[13] Никакая коалиция не может перестроить граф так, чтобы это было выгодно всем ее членам.

[14] Тем самым мы исключаем активность, состоящую, например, в установлении связей с начальниками высших уровней, минуя непосредственных начальников с целью занятия их места, и т.п. виды активности, связанные со сменой группы исполнителей, управляемой вершиной. Промоделировать подобные эффекты в рамках структурных функционалов представляется проблематичным в силу их анонимности.

тителей независимо от “желания” вышестоящих вершин или метацентра[15], так как информация о “качестве работы” заместителя и необходимости в нем обычно передается именно вершиной v и может быть ей искажена в своих интересах. Таким образом, вершина v свободно выбирает количество заместителей k и произвольно разбивает группу $g_G(v)$ на k подгрупп.

О п р е д е л е н и е 7. *Иерархию* $G=(V,E)$ *назовем равновесной в управляющей вершине* $v \in V$, *если на наборе ее заместителей* $v_1,\dots,v_k$ *достигается максимум прибыли* (*1*) *вершины* v *по всем разбиениям группы* $g_G(v)$: $F(g_G(v_1),\dots,g_G(v_k)) = \max\limits_{g_G(v)=h_1\cup\dots\cup h_l} F(h_1,\dots,h_l) \geq 0$.[16] *Иерархия называется равновесной, если она равновесна во всех своих управляющих вершинах. Множество равновесных иерархий из* Ω *при заданных функционалах* Z *и* P *обозначим через* $R_{Z,P}(\Omega)$. *Разбиение* $g_G(v)$ *на подгруппы назовем тривиальным, если одна из подгрупп* $g_G(v_1),\dots, g_G(v_k)$ *совпадает с* $g_G(v)$.

Условие неотрицательности максимума означает неравновесность ситуаций, в которых затраты вершины v не компенсируются ни при каком разбиении группы $g_G(v)$. В этих условиях “работа” в организации вообще не выгодна вершине, и руководство группой $g_G(v)$ не может быть осуществлено, так как метацентр не может заставить активный элемент участвовать в игре в ущерб “своим интересам”.[17]

Если рассматриваются все организации $\Omega=O(\mathbf{f})$, $\mathbf{f}=\{f_1,\dots,f_m\}$, то изменения состава заместителей (в результате максимизации прибыли по определению 7) не выведут иерархию за пределы Ω, так как высшие вершины по-прежнему будут руководить группами $f_1,\dots,f_m$. Если рассматриваются деревья $\Omega=D(f)$, то в определении 7 учитываются лишь разбиения группы $g_G(v)$ на непересекающиеся подгруппы, т. е. запрещается изменение структуры на недревовидную. Тогда перестроения опять же не выведут иерархию за пределы Ω.

Рассмотрим теперь произвольную структуру $G \in \Omega$. Сначала высшие вершины выбирают заместителей так, чтобы максимизировать функционал прибыли (1), затем то же проделывают выбранные заместители и т.д. *Процесс изменения структуры в результате активности* (1) *назовем самоорганизацией*. При самоорганизации возможны следующие ситуации:

1. Максимум в определении 7 достигается на тривиальном разбиении[18]. Один из заместителей управляет той же группой и создает еще одного такого же заместителя. Получаем бесконечно растущую *бюрократическую цепочку* начальников (см. рис.3 справа при $\alpha<1$).

2. Максимум в определении 7 отрицателен, т. е. при заданном стимулировании P организовать взаимодействие в одной из образовавшихся групп невозможно.

---

[15] Если один заместитель подчинен нескольким независимым начальникам, то “желание” одного из них отказаться от заместителя означает не удаление этой вершины из иерархии, а лишь удаление ребра подчинения.

[16] Для множества деревьев $\Omega=D(f)$ максимум берется по разбиениям на непересекающиеся подгруппы.

[17] Если вершинам необходима некоторая “норма” прибыли, то это легко учесть, увеличив функционал затрат, что никак не меняет математической постановки.

[18] В случае дерева один заместитель полностью дублирует функции своего начальника, который стремится “поменьше сделать”, поручая “всю работу” заместителю (например, при постоянном “окладе”).

У т в е р ж д е н и е 1. *Если максимум прибыли в определении 7 неотрицателен и достигается на нетривиальных разбиениях, то множество $R_{Z,P}(\Omega)$ непусто и процесс самоорганизации с любой начальной иерархии $G \in \Omega$ приведет к одной из равновесных структур*[19].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольную иерархию $G \in \Omega$. В процессе самоорганизации первая ситуация возникнуть не может в силу нетривиальности оптимальных разбиений, а вторая – в силу неотрицательности максимума. Тогда при разбиении группы $g_G(v)$ любая подгруппа будет строго вложена в $g_G(v)$ (заместитель управляет меньшей группой, чем начальник), т. е. ее мощность уменьшится. Начав с высших вершин (которые руководят группами $f_1,\ldots,f_m$), получим после их выбора заместителей, руководящих меньшими группами. На следующем шаге мощность еще уменьшится. В итоге роль заместителей будут выполнять исполнители, и процесс закончится. Результатом по определению 7 будет равновесная организация, что одновременно доказывает непустоту $R_{Z,P}(\Omega)$. •

Выполнение условий утверждения 1 позволяет метацентру избежать проблем с построением равновесной структуры[20]. Для этого метацентр может создать простейшую веерную иерархию (“нанять” m управляющих вершин, наделив их правом выбирать заместителей и обязанностью руководить нужными группами $f_1,\ldots,f_m$) и получить одну из равновесных структур в результате самоорганизации.

5. Информированность метацентра. Оптимальное стимулирование

Предполагаем, что метацентр распоряжается “финансовыми ресурсами”, т. е. произвольным образом выбирает функционал P, стремясь минимизировать суммарное стимулирование. Также считаем, что после выбора функционала P он становится общим знанием[21] (по терминологии [30]). С содержательной точки зрения это предположение можно считать выполненным для многих крупных организаций, политика заработной платы которых предусматривает стимулирование каждой штатной единицы.

О п р е д е л е н и е 8. *Назовем информированностью метацентра о функционале затрат Z множество Ξ структурных функционалов, о котором метацентру точно известен факт $Z \in \Xi$. Случай $\Xi = \{Z\}$ будем называть полной информированностью.*

Содержательно информированность о функционале затрат означает степень знания метацентром (например, владельцем) специфики управления принадлежащей ему организацией. Если род деятельности организации нов для метацентра, то разумно предполагать отсутствие информации, если же метацентр вполне компетентен и представляет реальные за-

---

[19] Также несложно показать, что единственность максимума приводит к единственности равновесной структуры.

[20] Метацентр может просто не знать равновесных структур в силу недостаточной информации о Z (см. ниже).

[21] То есть все значения функционала известны всем управляющим вершинам, входящим в иерархию, и сразу же становятся известны новым управляющим вершинам, если они начинают “работать” в иерархии.

траты управляющих вершин, то информированность можно считать близкой к полной. Ниже считаем информированность заданной[22]. Также считаем, что метацентр наблюдает структуру, складывающуюся при самоорганизации, и выплачивает соответствующее стимулирование.

Определение 9. *Минимальными расходами метацентра назовем величину*[23]*:*

(2) $\min_{P\in\Theta}\max_{Z\in\Xi}\max_{G\in R_{Z,P}(\Omega)} P(G)$ *для максимального гарантированного результата* (*МГР*),

(3) $\min_{P\in\Theta}\max_{Z\in\Xi}\min_{G\in R_{Z,P}(\Omega)} P(G)$ *для гипотезы благожелательности* (*ГБ*),

стимулирование P, для которого достигается минимум (*2*) *или* (*3*)*, назовем оптимальным, а соответствующую иерархию назовем оптимальной равновесной структурой.*

То есть предполагаем, что выбором $P\in\Theta$ метацентр минимизирует расходы на стимулирование равновесной структуры. Θ – множество допустимых функционалов стимулирования. Если нет никаких ограничений, то Θ – множество всех структурных функционалов (ниже, если не оговорено противное, исследуется именно этот случай). Иначе Θ может определять некоторые законодательные, традиционные и т.п. ограничения на возможные стимулирования. Также под Θ может пониматься ряд зарекомендовавших себя на практике простых и легко реализуемых стимулирований [28]. Некоторые примеры будут рассмотрены ниже. Они позволяют ответить на вопрос, когда в рамках “простых” функционалов стимулирования найдется оптимальное. Если выбранное стимулирование приводит к пустому множеству равновесных структур $R_{Z,P}(\Omega)$, то считаем $\min_{\varnothing} P(G)=\max_{\varnothing} P(G)=+\infty$, исключая тем самым из рассмотрения стимулирования без равновесных структур.

Максимум по $Z\in\Xi$ в определении 9 берется, так как метацентр не может полагаться на “благожелательность” совершенно неизвестных ему “организационных сложностей” и предполагает худший для себя результат[24].

Гипотеза благожелательности предполагает, что из всего множества равновесных структур реализуется наилучшая для метацентра структура (с минимальными расходами). Максимальный гарантированный результат предполагает реализацию наихудшей для метацентра равновесной структуры (с максимальными расходами). То есть (2) соответствует случаю, в котором метацентр не может создать нужную структуру и не может рассчитывать на благожелательность управляющих элементов, поэтому предполагает заведомо худший для себя результат. ГБ (3) целесообразно использовать, если метацентр полностью информирован о Z (а следовательно, и о $R_{Z,P}(\Omega)$) и способен сразу создать оптимальную равновесную

---

[22] Далее в работе качественно обсуждаются задачи идентификации функционала затрат, т. е. повышения информированности (сужения множества Ξ).

[23] При повышении информированности (сужении Ξ) расходы метацентра убывают, при снижении – возрастают.

[24] Если предположить, что метацентру известно вероятностное распределение функционала Z по множеству Ξ, то максимум по $Z\in\Xi$ следует заменить математическим ожиданием.

структуру. В остальных случаях целесообразно использовать МГР (2), так как в процессе самоорганизации может образоваться любая равновесная структура. В рассмотренных ниже частных случаях после решения задачи (2) метацентр может создать простейшую веерную иерархию, самоорганизация которой приведет к оптимальной равновесной структуре[25]. Разумеется, МГР в общем случае требует бóльших расходов метацентра, чем ГБ.

6. Полная информированность

Т е о р е м а 1. *Пусть G^* – иерархия, минимизирующая суммарные затраты*:

$$G^* = (V^*, E^*) = \arg\min_{G \in \Omega} Z(G). \tag{4}$$

Тогда при полной информированности в (*3*) *будет оптимальна равновесная структура G^*, а соответствующее оптимальное стимулирование определяется по формуле:*

$$P^*(g_1,...,g_k) = \begin{cases} Z(g_1,\dots,g_k), \text{если } \exists v \in V^* \text{ с заместителями } v_1,\dots v_k, \text{ для которых} \\ \qquad g_{G^*}(v_1) = g_1,\dots,g_{G^*}(v_k) = g_k, \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что G^* равновесна. Пусть $v \in V^*$, а $v_1,\dots,v_k \in V^*$ – заместители v. Тогда $P^*(g_{G^*}(v_1),\dots,g_{G^*}(v_k)) = Z(g_{G^*}(v_1),\dots,g_{G^*}(v_k))$, причем на любом другом разбиении группы $g_{G^*}(v)$ на подгруппы $h_1,\dots,h_l$ выполнено $P^*(h_1,\dots, h_l) \le Z(h_1,\dots, h_l)$.[26] То есть на заместителях вершины v действительно достигается максимум ее прибыли (1) (равный 0), следовательно, иерархия G^* равновесна. Рассмотрим иерархию $G \in R_{Z,P}(\Omega)$, равновесную при некотором стимулировании P. Имеем $P(G) \ge Z(G)$, так как иначе затраты хотя бы одной управляющей вершины больше стимулирования и иерархия неравновесна. Так как G^* минимизирует затраты, имеем $Z(G) \ge Z(G^*)$. Кроме того, $Z(G^*)=P^*(G^*)$, так как затраты каждой управляющей вершины иерархии G^* в точности компенсируются стимулированием P^*. В результате имеем $P(G) \ge P(G^*)$, т. е. для стимулирования P^* и равновесной иерархии G^* достигается абсолютный минимум расходов метацентра. Следовательно, стимулирование P^* и структура G^* оптимальны в смысле (3). •

Основное значение теоремы состоит в ее содержательной трактовке. Если метацентр точно знает функционал затрат (специфику управления организацией), то он может найти структуру G^*, выполняющую свои функции оптимально с объективной точки зрения (с ми-

---

[25] В общем случае могут появиться бюрократические цепочки или отрицательный максимум прибыли (см. первый и второй случаи перед утверждением 1). Тогда метацентру необходимо либо более точно идентифицировать функционал Z (один из вариантов – начинать с разных структур в надежде “попасть” в равновесную структуру при самоорганизации), либо изменить стимулирование, обнулив его для тривиальных разбиений и повысив для отрицательных максимумов. Второй путь наиболее прост, но может привести к неоптимальности полученного стимулирования.

[26] P^* может быть либо равным Z, либо нулевым.

нимальными суммарные затратами), после чего компенсировать затраты вершин этой структуры и не компенсировать все остальные затраты (стимулирование P^*). То есть метацентр фактически обязывает управляющие вершины руководить теми наборами групп, которые он "считает" целесообразными, и с помощью нулевого стимулирования не дает возможности организовывать другие наборы групп. Как видно из доказательства, обеспечить метацентру расходы, меньшие $P^*(G^*)=Z(G^*)$, невозможно, так как в этом случае просто не будет равновесных структур. Подобные стимулирования и соответствующие им равновесные структуры мы будем называть ниже *абсолютно оптимальными*.

Итак, метацентру достаточно решить задачу (4), создать структуру G^* и выбрать стимулирование (5) для получения абсолютно оптимального стимулирования и равновесной структуры. То есть *задача стимулирования при полной информации сводится к оптимизационной*. Этот результат, доказанный в [28] для веерных структур, по теореме 1 верен и для многоуровневых иерархий. Для поиска G^* (решения задачи (4)) могут потребоваться большие вычислительные затраты [15]. Аналитические методы и алгоритмы оптимизации иерархий для структурных функционалов приведены в [15]. Теорема 1 показывает необходимость дальнейшего совершенствования методов оптимизации иерархических структур.

Абсолютно оптимальному стимулированию свойственна *неустойчивость* по отношению к колебаниям затрат [28, 31, 32]. Для многоуровневых структур неустойчивость приобретает наиболее ярко выраженный (абсолютный) характер. В случае малого роста затрат одной вершины она отказывается выполнять свои функции, передавая "возмущение" (подчиняя своих заместителей) вышестоящей вершине, которая в общем случае также не может покрыть возросшие затраты стимулированием и передает "возмущение" еще выше. В результате разрушается одна или несколько высших вершин, и структура перестает выполнять свои функции. Избежать этого эффекта можно, заранее увеличивая функционал затрат на величину ожидаемых колебаний (добавляя "запас прочности")[27]. Как показывают примеры ниже, неполная информированность и использование МГР (2) могут в некоторых случаях "автоматически" обеспечить устойчивость.

7. Случаи неполной информации. Уравнительное стимулирование

Если информированность метацентра о функционале затрат Z достаточно низка, то максимум по $Z \in \Xi$ в (2) и (3) может быть весьма велик и найденное оптимальное стимулирование окажется практически неприемлемым. *Ниже мы рассмотрим частные случаи решения задач* (*2*) *и* (*3*) *для множества деревьев* $\Omega=D(f)$. В некоторых случаях при достаточно низкой информированности (широком Ξ) удается найти абсолютно оптимальное стимулиро-

[27] Если в функционал затрат уже добавлена некоторая "норма прибыли" вершины, то колебания могут компенсироваться за счет прибыли вершин.

вание! В других случаях удается подобрать стимулирование, которое приводит к равновесной структуре с минимальными суммарными затратами вершин, хотя стимулирование и превосходит эти затраты. В силу $\Omega=D(f)$ заместители одной вершины всегда управляют непересекающимися группами. Ниже это специально не оговаривается.

Определение 10. *Уравнительным назовем одинаковое стимулирование* $P(g_1,\ldots,g_k)=P_0=const$ *любой управляющей вершины.*

Уравнительное стимулирование предусматривает выплату одинаковой суммы всем управляющим вершинам независимо от выполняемых ими функций. Предполагаем, что константа P_0 достаточно велика для покрытия затрат всех вершин хотя бы одного дерева из $D(f)$ (иначе не будет ни одного равновесного дерева).

Определение 11. *Структурный функционал затрат Z назовем расширяющим, если для любого набора попарно непересекающихся групп* $g_1,\ldots,g_k$, $k\geq 2$ *выполнено неравенство* $Z(g_1,\ldots,g_k)<Z(g_1\cup g_2,g_3,\ldots,g_k)$, *сужающим, если выполнено обратное неравенство* $Z(g_1,\ldots,g_k)> Z(g_1\cup g_2,g_3,\ldots,g_k)$.[28]

Для уравнительного стимулирования увеличение прибыли управляющей вершины равносильно уменьшению затрат. Тогда для сужающего функционала затрат управляющей вершине всегда выгодно уменьшить число заместителей (сузить дерево), объединив функции двух заместителей (группы g_1 и g_2), а для расширяющего, напротив, всегда выгодно увеличить число заместителей (расширить дерево), распределив функции одного заместителя (группу $g_1\cup g_2$) на двоих[29]. Очевидно, что уравнительное стимулирование и сужающий функционал затрат приведут к бюрократическим цепочкам, так как управляющей вершине выгодно переподчинить всю свою группу одному заместителю, минимизировав свои затраты. Исключить бюрократические цепочки позволяет *уравнительное стимулирование с исключением*, в котором $P(g_1)=0$.[30]

Утверждение 2. *В случае уравнительного стимулирования и расширяющего функционала затрат единственным равновесным деревом на* $D(f)$ *будет веерная организация, в случае уравнительного стимулирования с исключением и сужающего функционала затрат равновесные деревья будут 2-организациями.*

Доказательство. Рассмотрим высшую вершину v, которой подчинены все исполнители дерева $D\in D(f)$ (то есть все исполнители группы f). Расширяющий функционал затрат сделает выгодным для v увеличение количества заместителей до тех пор, пока вершине v не будут подчиняться непосредственно все исполнители дерева. То есть равновесна ве-

---

[28] Так как Z не зависит от порядка аргументов, неравенство не меняется при объединении любой пары групп. Применяя неравенство последовательно, докажем его справедливость для объединения любого набора групп.
[29] Можно аналогично определить свойства сужения/расширения для всего функционала прибыли и ставить задачу подбора стимулирования, приводящего к сужающему/расширяющему функционалу прибыли и т.п.
[30] В этом случае руководить одним заместителем невыгодно.

ерная организация и только она. Если в дереве $D \in D(f)$ у управляющей вершины v больше двух заместителей, то в случае сужающего функционала затрат для v выгодно уменьшить число заместителей. Следовательно, равновесными могут быть лишь 2-организации. •

Свойства сужения/расширения локальны, т. е. относятся к уменьшению затрат одной вершины. В [15] были введены понятия *выпуклости/вогнутости* функционала затрат, которые соответственно требуют уменьшения/увеличения числа заместителей для минимизации суммарных (глобальных) затрат всей структуры. *Решением задачи* $\min\limits_{G \in D(f)} Z(G)$ *минимизации суммарных затрат на* $D(f)$ *при выпуклом функционале будет некоторая 2-организация*[31]*, при вогнутом функционале – веерная организация* (см. [15]).

Предположим, что у вершины v имеются заместители $v_1,\ldots,v_r$, u, причем вершинам $v_1,\ldots,v_r$ подчинены группы $g_1,\ldots,g_r$, а у вершины u, в свою очередь, имеются заместители $v_{r+1},\ldots,v_k$, которым подчинены группы $g_{r+1},\ldots,g_k$. Тогда вогнутость означает, что, не увеличивая суммарных затрат структуры, можно убрать заместителя u и переподчинить вершины $v_{r+1},\ldots,v_k$ непосредственно вершине v: $Z(g_1,\ldots,g_k) \le Z(g_1,\ldots,g_r,g_{r+1} \cup \ldots \cup g_k) + Z(g_{r+1},\ldots,g_k)$. Очевидно, что если функционал расширяющий, то неравенство выполнено, даже без второго слагаемого справа (при удалении вершины u не только “исчезают” ее затраты, но и уменьшаются затраты вершины v). Итак, *любой расширяющий функционал вогнут*.

Для уравнительного стимулирования и расширяющего функционала затрат любое дерево $G \in D(f)$ в результате самоорганизации придет к веерной структуре $G_{веер}$ (см. утверждение 2), на которой к тому же достигаются минимально возможные суммарные затраты (в силу вогнутости расширяющего функционала): $Z(G_{веер})=Z(\{a_1\},\ldots,\{a_n\})$, где $f=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Тогда при $P_0=Z(G_{веер})$ достигается минимум стимулирующих выплат, т. е. *уравнительное стимулирование абсолютно оптимально*, следовательно, это решение задач (2) и (3).[32] Таким образом, если известно, что функционал затрат расширяющий, метацентру достаточно подчинить всех исполнителей одному начальнику и выбрать уравнительное стимулирование. Если константа $Z(G_{веер})$ неизвестна, то один из вариантов действий состоит в последовательном уменьшении P_0, пока веерная структура не станет неравновесной – единственная управляющая вершина откажется выполнять свои функции[33]. Содержательно функционал затрат расширяющий, если управляющей вершине проще самой выполнить всю работу, чем перепоручать ее заместителям, а затем их контролировать. То есть расширяющий функционал

---

[31] Это также верно для произвольных организаций (не деревьев) любого набора групп, см. [15].

[32] В данном случае равновесная структура единственна, (2) и (3) совпадают.

[33] То есть, по сути, метацентр пытается идентифицировать неизвестную ему характеристику функционала. Рассмотрение задач идентификации см. в [33, 34]. Если управляющая вершина осведомлена о незнании значения $Z(G_{веер})$ метацентром (об идентификации), то она может пытаться дезинформировать метацентр, отказываясь от управления при достаточно большом P_0. Здесь и ниже мы не будем рассматривать подобные рефлексивные игры [30], считая, что отказ вершины окончателен, и она уходит из организации, а метацентр пытается найти ей замену, возможно повышая P_0.

разумно описывает небольшие организации, решающие не слишком сложные задачи. В этом случае метацентр может найти абсолютно оптимальное стимулирование, не зная “деталей” функционала, т. е. при достаточно широком Ξ.

Для сужающего функционала затрат и уравнительного стимулирования с исключением[34] все равновесные структуры будут 2-деревьями и возможны следующие ситуации[35].

1. Сужающий функционал затрат – выпуклый. Структуры, минимизирующие суммарные затраты, будут 2-деревьями, однако могут быть как равновесными, так и нет (см. примеры ниже). В этом случае при отсутствии прочей информации уравнительное стимулирование с исключением может быть разумным вариантом, так как равновесные структуры и структуры, минимизирующие затраты, принадлежат одному классу 2-деревьев.

2. Сужающий функционал затрат – вогнутый. Минимизирует затраты веерная структура (максимум заместителей), которая в некотором смысле противоположна равновесным 2-деревьям (минимум заместителей). То есть при отсутствии прочей информации уравнительное стимулирование с исключением использовать неразумно, так как это может привести к компенсации больших затрат.

3. Сужающий функционал затрат – ни выпуклый, ни вогнутый. Необходимо дополнительное исследование, так как дерево, минимизирующее затраты, может быть каким угодно (см. раздел 9).

8. Примеры функционалов

Для произвольной группы $g \subseteq N$ ее сложность $C(g) = \sum_{a\in g} C(a)$ определим как сумму сложностей исполнителей, входящих в группу g. Для любого исполнителя $a \in N$ сложность $C(a)>0$ считаем заданной. Заметим, что сложность аддитивна, т. е. для непересекающихся групп g_1, g_2 выполнено $C(g_1 \cup g_2) = C(g_1) + C(g_2)$. Рассмотрим примеры функционалов затрат $Z(g_1,\dots,g_k)$, которые зависят не от самих групп $g_1,\dots,g_k$, а от их сложностей:

(I) $$Z(g_1,\dots,g_k) = [C(g_1)^\alpha + \dots + C(g_k)^\alpha - \max(C(g_1)^\alpha,\dots,C(g_k)^\alpha)]^\beta;$$

(II) $$Z(g_1,\dots,g_k) = [C(g_1)^\alpha + \dots + C(g_k)^\alpha]^\beta;$$

(III) $$Z(g_1,\dots,g_k) = [C(g)^\alpha / \max(C(g_1)^\alpha,\dots,C(g_k)^\alpha) - 1]^\beta;$$

(IV) $$Z(g_1,\dots,g_k) = [\textstyle\sum_{i=\overline{1,k}} C(g)^\alpha - C(g_i)^\alpha]^\beta;$$

(V) $$Z(g_1,\dots,g_k) = C(g)^\alpha / \min(C(g_1)^\beta,\dots,C(g_k)^\beta),$$

где группа $g = g_1 \cup \dots \cup g_k$ организуется из подгрупп $g_1,\dots,g_k$, $\alpha,\beta \in (0;+\infty)$ – параметры

---

[34] Уравнительное стимулирование влечет бесконечные расходы метацентра (бюрократические цепочки).

[35] Как показывают примеры ниже, сужающий функционал может быть и выпуклым, и вогнутым, и ни выпуклым, ни вогнутым.

функционала (функционалы (I) - (IV) рассмотрены в [15]).

Содержательно функционалы (I) - (V) описывают затраты руководителя (менеджера) на управление заместителями. Основой для исчисления затрат служит сложность группы, содержательно описывающая сложность или объем выполняемой ей работы (ее также можно соотнести с квалификацией работников). Различные виды функционалов соответствуют нескольким типам внутригруппового взаимодействия заместителей и их непосредственного начальника. Качественно такие типы взаимодействия описаны в различных работах по менеджменту[36] (см., например, [35 - 39]).

У т в е р ж д е н и е 3. *Функционал (II) при* $\alpha<1$ – *сужающий, а при* $\alpha>1$ – *расширяющий*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство для расширяющего функционала $Z(g_1,\ldots,g_k)< <Z(g_1\cup g_2,g_3,\ldots,g_k)$. Обозначим $x=C(g_1)$, $y=C(g_2)$, тогда для функционала (II) неравенство перепишется в виде $x^{\alpha}+y^{\alpha}<(x+y)^{\alpha}$, что выполняется при $\alpha>1$ для любых $x>0$, $y>0$. При $\alpha<1$ выполняется обратное неравенство, т. е. функционал сужающий.[37] •

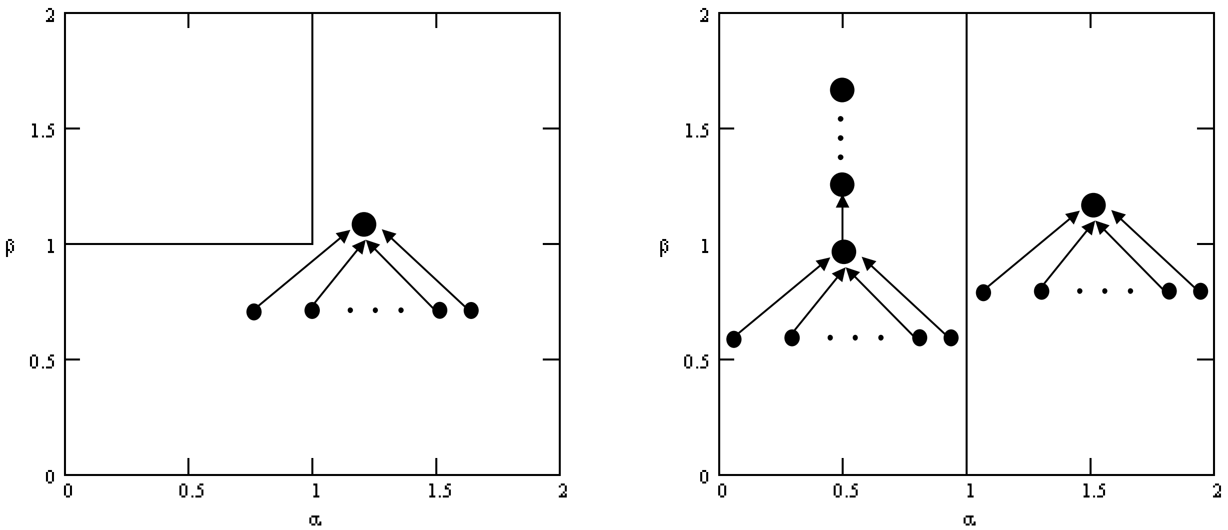


Рис. 3. Иерархии, минимизирующие затраты (слева), и равновесные (справа) для (II)

Функционал (II) вогнут, за исключением области $\alpha<1$, $\beta>1$ (см. [15]), т. е. минимизирует суммарные затраты веерная структура (рис. 3 слева). При $\alpha>1$ веерная структура будет

---

[36] Так, функционал (I) соответствует заместителям, среди которых имеется "полулидер" [37], который не требует затрат на руководство собой. Таким образом, затраты руководителя определяются суммой сложностей всех заместителей, за исключением "полулидера", т. е. максимально "сложного" заместителя.

Функционал (II) соответствует заместителям без лидера. Здесь все затраты на координацию берет на себя руководитель, затраты которого определяются суммой сложностей всех заместителей.

Функционал (III) соответствует заместителям с лидером, конструктивная роль которого приводит к снижению затрат руководителя на координацию взаимодействия [36] (чем больше сложность лидера, тем больше координирующих функций он может взять на себя).

Функционал (IV) соответствует затратам в процессе индивидуальной работы руководителя с заместителями [39] (например, при обучении). Затраты определяются разностями между сложностью результата совместной деятельности (соизмеримой со "сложностью" руководителя) и сложностями заместителей (подгрупп).

Функционал (V) соответствует случаю, когда один малоквалифицированный заместитель увеличивает затраты на руководство всей группой, требуя от руководителя слишком много усилий на руководство собой. Параметр β соответствует степени отрицательного влияния малой квалификации.

[37] Указанные неравенства – частный случай неравенства Минковского, см., например, [40].

также и равновесной, так как функционал расширяющий (см. утверждение 3 и рис. 3 справа), т. е. *для* (*II*) *при* α>1 *уравнительное стимулирование абсолютно оптимально*. При α<1 функционал (II) сужающий (см. утверждение 3), уравнительное стимулирование приводит к бюрократической цепочке (см. рис. 3 справа), что неприемлемо. В случае α<1, β<1 сужающий функционал – вогнутый, в случае α<1, β>1 – ни выпуклый, ни вогнутый (см. [15]). В первом случае уравнительное стимулирование с исключением приведет к равновесной структуре с больш*и*ми затратами, во втором случае необходимо дополнительное исследование.

Очевидно, что уравнительное стимулирование в случае функционалов затрат (I), (III), (IV) приведет к бюрократическим цепочкам (при выборе одного заместителя достигаются нулевые затраты). Исследуем уравнительное стимулирование с исключением.

У т в е р ж д е н и е 4. *Для уравнительного стимулирования с исключением и функционалов затрат* (*I*)*,* (*III*) *максимум прибыли вершины, управляющей группой g, равен* $P_0 - Z(g\backslash\{a\}, \{a\})$*, где a – исполнитель минимальной сложности, входящий в g.*[38]

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению уравнительного стимулирования с исключением руководство одной группой будет невыгодным в силу нулевого стимулирования. Для максимизации прибыли в остальных случаях достаточно минимизировать функционал затрат по всем разбиениям g на две или более подгруппы. В функционале (I) затраты состоят из сложностей всех подгрупп, кроме самой сложной. Очевидно, что при выделении в подгруппу исполнителя минимальной сложности значение (I) минимально и равно $C(\{a\})^{\alpha\beta}$. Значение функционала (III) минимально при максимальной сложности одной из подгрупп. Такая сложность достигается опять же, если от группы g “отделить” исполнителя минимальной сложности (хотя бы одного исполнителя отделить нужно, чтобы было 2 подгруппы). •

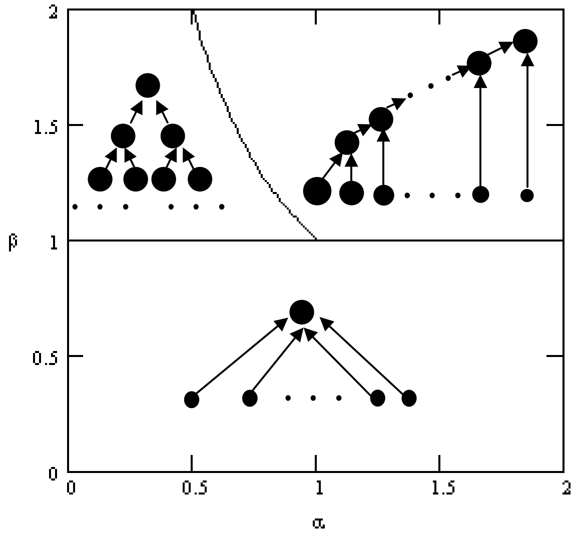
Из утверждения следует, что в процессе самоорганизации высшая вершина, управляющая группой $f = \{a_1, \ldots, a_n\}$, примет решение управлять “самым простым” исполнителем, а остальных исполнителей поручит своему заместителю, который поступит так же. В результате в равновесной структуре исполнители будут организованы последовательно, начиная от “самого сложного” и заканчивая “самым простым”. Такая структура изображена на рис. 4 справа. Здесь размер нижних кружков схематично изображает сложность исполнителя.

Функционал (I) при β<1 – вогнутый, т. е. минимизирует затраты веерная структура, при β>1 – выпуклый, т. е. минимизирует затраты 2-организация, при β>1 и αβ>1 минимизирует затраты последовательная организация, в которой исполнители организуются “от большего к меньшему” (см. [15]). Таким образом, *при* β>1 *и* αβ>1 *в результате самоорганизации образуется структура* G (рис. 4 справа), *которая минимизирует затраты* (рис. 4 слева). Обозначим сложности исполнителей через $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n$. Тогда суммарные затраты

---

[38] Несложно показать, что функционал (I) при α<1 сужающий, а функционал (III) “сужающий” с нестрогим неравенством при любых параметрах. Но для дальнейшего изложения удобнее утверждение 4.

$Z(G)=c_2^{\alpha\beta}+c_3^{\alpha\beta}+\ldots+c_n^{\alpha\beta}$. Но, выбирая константу уравнительного стимулирования P_0, метацентр вынужден компенсировать максимальные затраты управляющей вершины $c_2^{\alpha\beta}$. Тогда суммарные выплаты составят $P(G)=(n-1)c_2^{\alpha\beta}\geq Z(G)$. То есть уравнительное стимулирование с исключением может быть хуже абсолютно оптимального, но при отсутствии информации о значениях $c_1,\ldots,c_n$ и α,β (из области $\beta>1$ и $\alpha\beta>1$) представляется вполне разумным[39]. При $\beta>1$ и $\alpha\beta<1$ равновесная структура может уже не совпадать со структурой, минимизирующей затраты, однако обе принадлежат классу 2-организаций, поэтому уравнительное стимулирование с исключением может быть разумным. При $\beta<1$ от такого варианта лучше отказаться, так как он может привести к больш*и*м затратам.



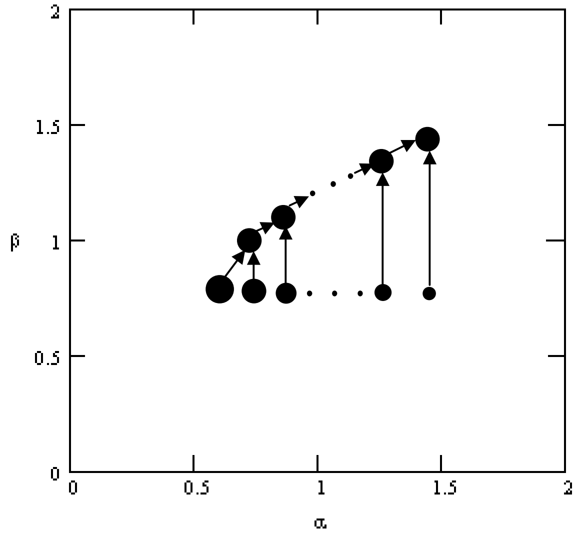


Рис. 4. Иерархии, минимизирующие затраты (слева), и равновесные (справа) для (I)

Для функционала (III) при $\beta>1$ минимизирует затраты последовательная организация, в которой исполнители, начиная со второго, расположены в порядке возрастания сложности (см. [15]). То есть равновесная структура (рис. 4 справа) не минимизирует затраты. Однако уравнительное стимулирование с исключением опять же может быть разумным. При $\beta<1$ функционал (III) ни выпуклый, ни вогнутый (см. [15]), и необходимо дополнительное исследование.

Утверждение 5. *Функционал (IV) – сужающий. Для уравнительного стимулирования с исключением максимум прибыли вершины, управляющей группой g, при* $\alpha>1$ *равен* $P_0-Z(g\backslash\{a\},\{a\})$, *где a – исполнитель минимальной сложности, входящий в g, а при* $\alpha<1$ *равен* $P_0-Z(g_1,g_2)$, *где* g_1 *и* g_2 *– разбиение g на подгруппы, минимизирующие* $|C(g_1)-C(g_2)|$.

Доказательство. Неравенство для сужающего функционала $Z(g_1,\ldots,g_k)>$ $>Z(g_1\cup g_2,g_3,\ldots,g_k)$ в обозначениях $x=C(g_1)$, $y=C(g_2)$, $z=C(g)$ для (IV) перепишется следующим

[39] "Запас" стимулирования делает управляющую вершину устойчивой к колебаниям сложности подчиненного ей исполнителя, т. е. "лишние" расходы метацентра обеспечивают растущий "запас прочности" по мере повышения уровня. Это соответствует концепции устойчивого развития, которая описана в [41].

образом: $2z^{\alpha} - x^{\alpha} - y^{\alpha} > z^{\alpha} - (x+y)^{\alpha}$, т. е. $z^{\alpha} + (x+y)^{\alpha} > x^{\alpha} + y^{\alpha}$, что выполнено, так как любое слагаемое слева больше любого справа. То есть, по утверждению 2, для уравнительного стимулирования с исключением максимум прибыли достигается при разбиении g на две подгруппы g_1 и g_2, причем таком, при котором минимизируются затраты $Z(g_1,g_2)=2z^{\alpha} - x^{\alpha} - y^{\alpha}$. Таким образом, максимум прибыли достигается при максимуме $C(g_1)^{\alpha} + C(g_2)^{\alpha}$ и ограничениях $C(g_1)+C(g_2)= C(g)$=const, $C(g_1)$, $C(g_2)>0$. Простейшими методами математического анализа показывается, что в случае $\alpha>1$ максимум достигается при максимально возможной сложности одной из подгрупп (следовательно, минимальной сложности другой подгруппы), т. е. при $g_1= g\backslash\{a\}$, $g_2=\{a\}$, а в случае $\alpha<1$ максимум достигается при разбиении g на подгруппы как можно более близкой сложности, т. е. на подгруппы с минимальным $|C(g_1) - C(g_2)|$. •

Результатом самоорганизации для уравнительного стимулирования с исключением при $\alpha>1$ будет последовательная организация (как и для (I), и для (III)), а для $\alpha<1$ – 2-организация в которой высшая вершина делит суммарную сложность исполнителей приблизительно пополам, затем то же проделывают выбранные заместители и т.п. При $n=2^i$ и исполнителях с одинаковой сложностью это приведет к симметричному 2-дереву (см. рис. 5 справа при $\alpha<1$, размер кружков соответствует сложности групп). При $\beta>1$ функционал (IV) – выпуклый, при $\beta<1$ – ни выпуклый, ни вогнутый (см. [15]). То есть для $\beta>1$ можно рекомендовать уравнительное стимулирование с исключением, для $\beta<1$ требуется дополнительное исследование.

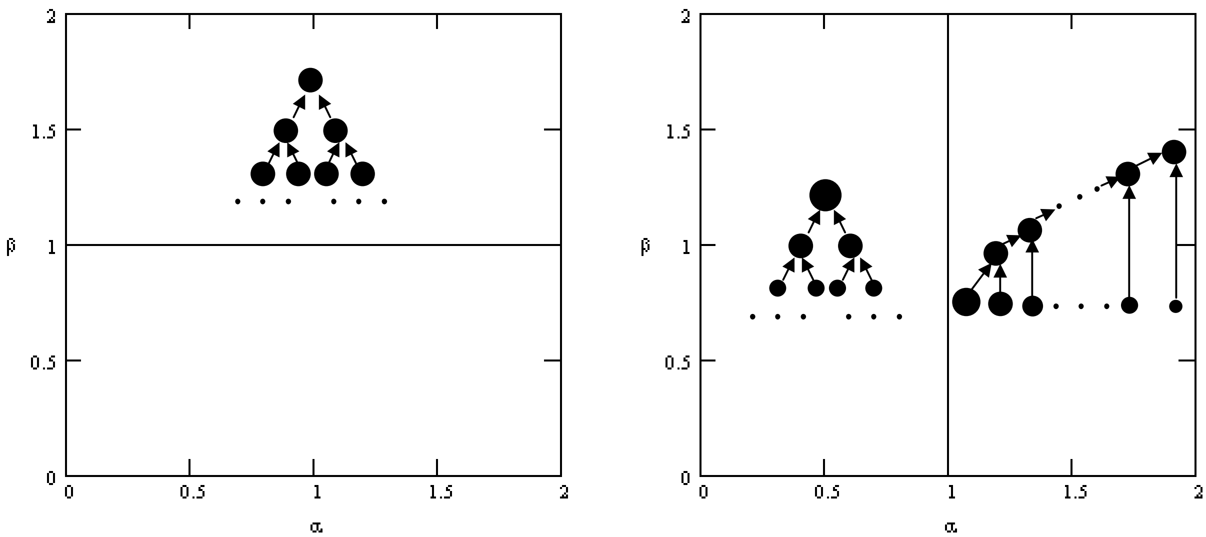


Рис. 5. Иерархии, минимизирующие затраты (слева), и равновесные (справа) для (IV)

9. Симметричные *r*-деревья

Для (V) уравнительное стимулирование приведет к бюрократическим цепочкам (нулевые затраты при выборе одного заместителя). Исследуем стимулирование с исключением.

У т в е р ж д е н и е 6. *Для уравнительного стимулирования с исключением и функционала затрат* (V) *максимум прибыли вершины, управляющей группой g, равен* $P_0 - Z(g_1,g_2)$, *где g_1 и g_2 – разбиение g на подгруппы, минимизирующие* $|C(g_1)-C(g_2)|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При объединении группы минимальной сложности с любой другой минимум в знаменателе (V) увеличивается, т. е. затраты не возрастают. Поэтому для уравнительного стимулирования с исключением максимум прибыли достигается при двух заместителях, сложность которых максимально близка друг к другу. •

То есть в условиях утверждения 6 равновесным будет 2-дерево, аналогичное равновесному 2-дереву для (IV) при $\alpha<1$ (см. рис. 5 справа, сложность двух подчиненных кружков символически изображена вдвое меньшей). Для дальнейшего исследования необходимо найти дерево, минимизирующее суммарные затраты для (V). Проблема состоит в том, что функционал (V) ни выпуклый, ни вогнутый[40]. Аналитически решить эту задачу для (V) позволяет созданный в [16] аппарат непрерывного анализа, в котором число исполнителей континуально.

Итак, предположим, требуется найти дерево с минимальными на $D(f)$ затратами, $f=\{a_1,\ldots,a_n\}$, функционал Z зависит от сложностей групп (типа (I) - (V)), сложности исполнителей $C(a_1)=c_1,\ldots,C(a_n)= c_n$. *Поставим соответствующую континуальную задачу*.

Необходимо найти дерево организации континуума исполнителей $N=[0;L]$, где $L= c_1+\ldots+ c_n$. Считаем, что высшая вершина управляет всем отрезком исполнителей, подчиняя его части длиной $x_1,\ldots,x_k>0$ заместителям $v_1,\ldots,v_k$, $k \geq 2$,[41] $x_1+\ldots+x_k=L$. Каждый заместитель управляет своим отрезком, снова разбивая его на части между своими заместителями. И так далее. Дерево бесконечно растет "в глубину". В нем каждой вершине соответствует отрезок, длина которого равна сложности подчиненной группы. Если вершине v починены заместители, которым соответствуют отрезки с длинами $x_1,\ldots,x_k$, то затраты вершины v определяются структурным функционалом $Z(x_1,\ldots,x_k)$, зависящим от сложностей. Затраты дерева равны суммарным затратам его вершин. *Требуется найти дерево с минимумом затрат*.

Функционал затрат назовем *однородным*, если для любого $y>0$ $Z(yx_1,\ldots,yx_k)=$ $=\varphi(y)Z(x_1,\ldots,x_k)$. Выполнено $\varphi(y)=y^\gamma$ (см. [16]). Заметим, что функционалы (I) - (V) однородны. В [16] показано, что для *однородного функционала существует минимизирующее затраты однородное дерево D*, т. е. дерево, в котором каждый отрезок делится в одной и той же пропорции $y_1,\ldots,y_k>0$, $y_1+\ldots+y_k=1$. Тогда высшая вершина организуется из отрезков с длинами $y_1L,\ldots,y_kL$ с затратами $L^\gamma Z(y_1,\ldots,y_k)$. Суммарные затраты заместителей высшей вершины на организацию отрезков $y_1L,\ldots,y_kL$ составят $L^\gamma Z(y_1,\ldots,y_k)(y_1^\gamma+\ldots+y_k^\gamma)$. Для заместителей следующего уровня последняя скобка возведется в квадрат, следующего уровня – в куб, и т.д. С учетом $y_1+\ldots+y_k=1$ при $\gamma>1$ получаем бесконечно убывающую геометрическую про-

[40] Для этого случая в [13, 15] предложены алгоритмы поиска дерева, минимизирующего затраты.
[41] Это условие исключает бюрократические цепочки, которые можно удалить без увеличения затрат.

грессию с коэффициентом $y_1^\gamma + \ldots + y_k^\gamma < 1$ (доказательство неравенства см, например, в [40]). В итоге затраты однородного дерева

(6) $$Z(D) = L^\gamma Z(y_1, \ldots, y_k) / (1 - \sum_{i=\overline{1,k}} y_i^\gamma).$$

Так как одно из таких деревьев минимизирует затраты, осталось найти минимум (6) по всем $k \geq 2$ и пропорциям $y_1, \ldots, y_k$.

У т в е р ж д е н и е 7. *Для функционала* (*V*) *при* $\alpha-\beta>1$ *минимизирует затраты симметричное* r_**-дерево*[42], *где* r_* *– одно из двух целочисленных значений, ближайших к* $k_*=[(\alpha-1)/\beta]^{1/(\alpha-\beta-1)}$ (*если* $k_*<2$ *– значение* 2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функционала (V) имеем $\gamma=\alpha-\beta$. Подставим (V) в (6):

(7) $$L^\gamma (y_1 + \ldots + y_k)^\alpha / [\min(y_1^\beta, \ldots, y_k^\beta)(1 - \sum_{i=\overline{1,k}} y_i^\gamma)].$$

В числителе в скобках стоит единица: $y_1+\ldots+y_k=1$. Для минимизации выражения осталось найти максимум знаменателя. Очевидно, что максимум $\min(y_1^\beta, \ldots, y_k^\beta)$ достигается при $y_1=\ldots=y_k=1/k$. Простейшими методами математического анализа показывается, что и максимум $(1 - \sum_{i=\overline{1,k}} y_i^\gamma)$ с учетом $\gamma>1$ достигается при $y_1=\ldots=y_k=1/k$.

Итак, для (V) минимизирует затраты симметричное k-дерево. Осталось найти значение k. Игнорируя константу L^γ, запишем (7) для $y_1=\ldots=y_k=1/k$ в виде функции $\xi(k)$: $\xi(k)=k^\beta/(1-k/k^\gamma)= k^{\beta+\gamma-1}/(k^{\gamma-1}-1)= k^{\alpha-1}/(k^{\alpha-\beta-1}-1)$. Игнорируя положительный множитель, выпишем производную: $\xi'(k)=(\alpha-1)\, k^{\alpha-2}(k^{\alpha-\beta-1}-1)-(\alpha-\beta-1)\, k^{\alpha-\beta-2}\, k^{\alpha-1}= k^{\alpha-2}\,[(\alpha-1)(k^{\alpha-\beta-1}-1)-(\alpha-\beta-1)\cdot$ $\cdot k^{\alpha-\beta-1}]= k^{\alpha-2}\,[\beta\, k^{\alpha-\beta-1}-\alpha+1]$. Знак производной зависит только от квадратной скобки. Ноль производной достигается в точке $k_*=[(\alpha-1)/\beta]^{1/(\alpha-\beta-1)}$. Причем в силу $\alpha-\beta-1>0$ слева от k_* производная отрицательна (затраты дерева убывают), справа положительна (затраты дерева возрастают), т. е. k_* – искомая точка минимума. Если k_* не целое, то минимизирует затраты одно из двух ближайших целочисленных значений[43]. •

Возвращаясь к дискретной задаче с конечным числом исполнителей, заметим, что при $n=r_*^i$ для некоторого $i>0$ и $c_1=\ldots=c_n=L/n$ верхние i уровней бесконечного симметричного r_*-дерева представляют собой как раз дискретное дерево, надстроенное над исполнителями (которые соответствуют уровню $i+1$). Причем затраты этой части непрерывного дерева в точности равны затратам дискретного дерева. Следовательно, при $n=r_*^i$ и одинаковых[44] исполнителях симметричное r_*-дерево будет минимизировать затраты и в дискретном случае[45].

На рис. 6 изображена прямая $\beta=\alpha-1$, пространство под которой разбито на области с

[42] То есть дерево, в котором каждой вершине подчинены r_* отрезков равной длины.
[43] Какое именно значение легко проверяется подстановкой в $\xi(k)$.
[44] Под одинаковыми будем понимать исполнителей равной сложности.
[45] Иначе затраты непрерывного дерева можно было бы уменьшить, перестроив верхние i ярусов в соответствии с лучшим дискретным деревом.

постоянным r_*.[46] Справа вверху минимизирует затраты симметричное 2-дерево[47]. Левее и ниже минимизируют затраты симметричные 3-деревья, 4-деревья и так далее, по мере приближения к точке (1;0) r_* неограниченно возрастает (для r_*<10 области обозначены цифрами). На рис. 6 схематично изображены симметричные 2- и 3-дерево, в которых каждая группа организуется из подгрупп равной сложности (сложность группы "делится" соответственно на 2 и 3 части). Деревья для бо́льших r_* можно изобразить аналогично.

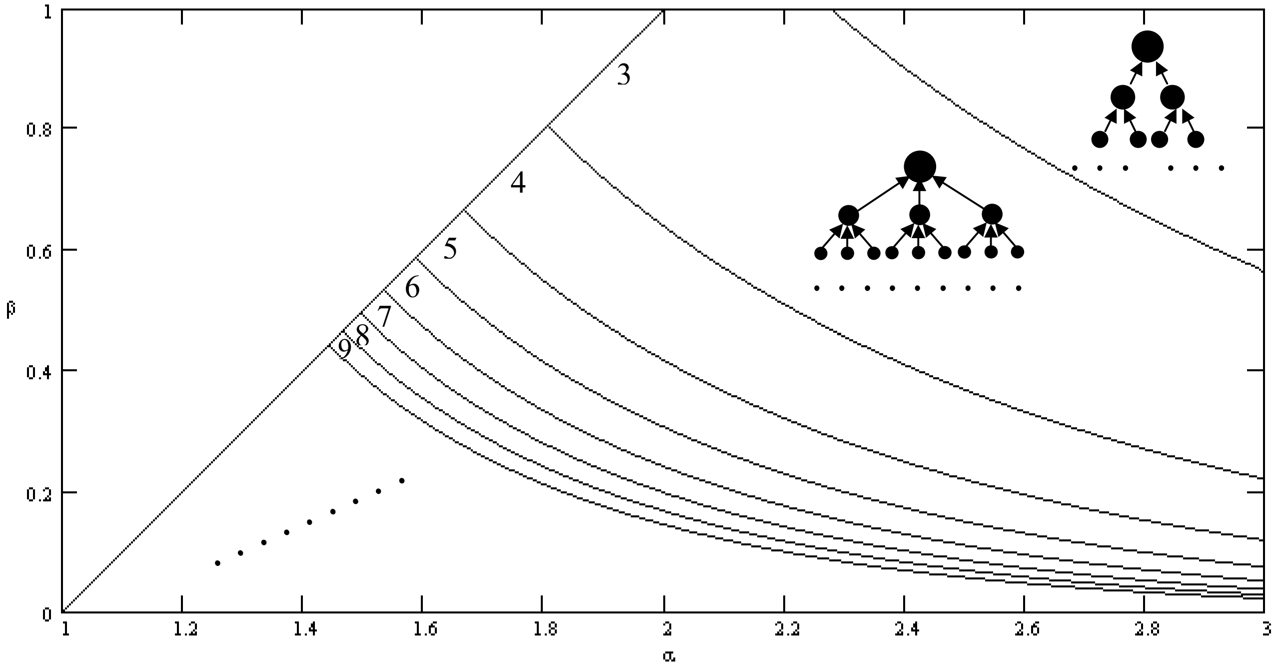


Рис.6. Симметричные r_*-деревья, минимизирующие затраты для (V)

При $n=2^i$ и одинаковых исполнителях уравнительное стимулирование с исключением приведет к равновесному симметричному 2-дереву (см. утверждение 6). Но даже в области минимизации затрат 2-деревом (см. рис.6 справа вверху) это стимулирование не будет оптимальным, так как затраты управляющих вершин неодинаковы (равны $C(g)^{\alpha-\beta} r_*^{\beta}$ при управлении группой g). Введем следующее стимулирование:

(8)
$$P_{r_*}(g_1,\dots,g_k) = \begin{cases} C(g)^{\alpha-\beta} r_*^{\beta}, \text{при } k \geq r_*, \text{где } g = g_1 \cup \ldots \cup g_k, \\ 0, \text{при } k < r_*. \end{cases}$$

То есть стимулирование выплачивается, если управляющая вершина выбрала не менее r_* заместителей. При этом вершина сама выберет ровно r_* заместителей и распределит сложность между ними по возможности одинаково для минимизации своих затрат (при таком разбиении максимален знаменатель в (V)).

При $n=r_*^i$ и одинаковых исполнителях стимулирование (8) породит самоорганизацию, которая приведет к симметричному r_*-дереву, причем затраты всех управляющих вершин

[46] При приближении к критической прямой β=α–1 существует предел k_*, равный $e^{1/\beta}$. То есть области постоянства r_* "подходят" к критической прямой "вплотную". При росте α кривые на рис.6 экспоненциально убывают.
[47] Оно остается оптимальным и при дальнейшем увеличении α, β вдоль любой прямой β=b(α–1), 0<b<1.

будут в точности скомпенсированы стимулированием. Так как достигнут минимум затрат (см. утверждение 7), *симметричное r_*-дерево и стимулирование* (*8*) *абсолютно оптимальны*.

Если по информации метацентра параметры α, β лежат в области A, вложенной в некоторую область постоянства r_* (см. рис. 6), то, вычисляя

(9) $$\sup_{(\alpha,\beta)\in A} P_{r_*}(g_1,\ldots,g_k),$$

получим стимулирование, при котором симметричное r_*-дерево равновесно для всех возможных α, β. Однако стимулирование (9) может быть избыточным. Для поиска оптимального стимулирования в конкретной области A необходимо дополнительное исследование. Например, если в A выполнено β=const, то *стимулирование* (9) *и симметричное r_*-дерево оптимальны в смысле МГР* (*2*).[48]

Интересен вопрос устойчивости найденного оптимального симметричного r_*-дерева при стимулировании (9) в случае изменения функционала затрат. Например, если в области A с постоянным r_* и β=const значение α не максимально, то имеется запас стимулирования, делающий небольшие колебания сложности незаметными для метацентра (структура и расходы на стимулирование не меняются). Причем величина запаса растет по мере увеличения уровня вершины[49] (согласно концепции устойчивого развития [41], такая структура называется абсолютно динамически устойчивой). Далее предположим, что увеличилась сложность r_* исполнителей, подчиненных одному начальнику низшего уровня, причем его затраты превысили стимулирование. Тогда этот начальник уходит из структуры, передавая подчиненных исполнителей (передавая возмущение) начальнику следующего уровня. Последнему подчинено r_*^2 исполнителей и он, минимизируя свои затраты, создаст r_* групп равной сложности. Тогда в каждой группе окажется по одному "усложнившемуся" исполнителю, и начальники низшего уровня уже могут справиться с менее значительным ростом затрат. То есть *начальник более высокого уровня, стремясь к собственным целям, автоматически выравнивает колебания затрат начальников низших уровней, обеспечивая тем самым устойчивость не за счет увеличения расходов метацентра, а за счет приспособляемости структуры!*

Приспособляемость структуры объясняется тем, что стимулирование (8) качественно отличается от стимулирования (5) теоремы 1, которое фактически жестко подавляет активность вершин, заставляя их руководить конкретным набором групп. Стимулирование (8) налагает единственное жесткое требование работы с r_* или более заместителями (то есть метацентр "не платит" лишь "малопроизводительным" управленцам, которые передают "основ-

---

[48] Это легко доказать, если заметить, что в случае β=const верхняя грань в (9) и верхняя грань суммарных затрат симметричного r_*-дерева достигаются при одном и том же максимальном значении α. Для этого значения (9) будет абсолютно оптимально (и, следовательно, улучшить МГР (2) нельзя), а для меньших α (9) с избытком компенсирует затраты симметричного r_*-дерева, которое будет, таким образом, равновесно.

[49] Если разница между максимальным и реальным α равна δ, то стимулирование вершины, управляющей группой g, в $C(g)^{\delta}$ раз больше, чем затраты. Чем выше уровень, тем выше $C(g)$ и больше запас стимулирования.

ную работу” небольшому числу заместителей), оставляя вершине возможность произвольно распределять функции между ними, что позволяет “гасить” колебания затрат, перераспределяя исполнителей. Для обеспечения устойчивости “жесткого” стимулирования (5) потребуются либо значительно б*о*льшие расходы, либо постоянное изменение стимулирования, что, как правило, невозможно, так как метацентр не владеет информацией о каждом колебании затрат.

10. Заключение

В работе построена математическая модель оптимального стимулирования элементов многоуровневых иерархических структур. Модель ограничена структурными функционалами и графами организации, что позволило в ряде случаев исследовать возникающую игру. При полной информированности проблема поиска оптимального стимулирования сведена к известной задаче оптимизации [15] (см. теорему 1). Теорема имеет, на наш взгляд, важное методологическое значение, расширяя аналогичный результат для веерных организаций [28] на случай произвольных (в рамках рассматриваемой модели) многоуровневых структур. Уменьшение информированности в общем случае приводит к увеличению расходов на стимулирование (например, к бюрократическим цепочкам начальников), однако для отдельных классов функционалов затрат в условиях неполной информации удалось построить абсолютно оптимальное стимулирование с теми же расходами, что и при полной информированности (например, уравнительное стимулирование при расширяющем функционале). Кроме того, в условиях неполной информированности для отдельных классов функционала затрат на примерах описана методика поиска стимулирования, оптимального в смысле максимального гарантированного результата (2).

Приведенные примеры функционалов затрат (I) - (V) показывают достаточную “широту” введенных классов[50]. Функционалы (I) - (V) имеют содержательно прозрачную качественную интерпретацию, что позволяет надеяться на описание реальных организационных систем подобными функционалами. В частности, интересен в этом смысле функционал (V), так как при любом r можно подобрать параметры, при которых минимизирует затраты симметричное r-дерево (см. рис. 6). Для (I) - (V) проанализирована оптимальность различных стимулирований при неполной информации. В рассмотренных примерах оптимальная равновесная структура образуется в результате самоорганизации, что позволяет метацентру избежать проблем с самостоятельным построением структуры[51].

Кроме строгого математического исследования, в работе качественно обсуждены вопросы повышения информированности (идентификации) и вопросы устойчивости оптималь-

---

[50] Введены классы расширяющих, сужающих, выпуклых, вогнутых, однородных функционалов.

[51] Процесс самоорганизации описывает некоторую динамику структуры. В работе анализируется лишь результат этого процесса – равновесная структура, хотя интересным представляется применение игрового подхода и к динамическому моделированию структуры (оптимизационный подход рассмотрен, например, в [14, 15, 42]).

ной структуры к колебаниям функционала затрат. Примеры показывают возможность формального исследования устойчивости в рамках построенной модели. Такое исследование представляется весьма перспективным, так как оно способно выявить преимущества “мягких” систем стимулирования перед “жесткими”. Последние, ограничивая активность элементов до минимума, требуют для обеспечения устойчивости гораздо больших дополнительных расходов, чем при “мягком” стимулировании, позволяющем элементам “погасить” локальные колебания внешней среды (функционала затрат) с помощью самостоятельного перестроения иерархии, не требующего вмешательства метацентра (изменения стимулирования).

Подводя итог, отметим, что двухуровневые (веерные) системы, изученные в настоящий момент достаточно полно, представляют собой предельный случай многоуровневых систем, соответствующий ситуациям, в которых все функции управления реализуются одним или несколькими равноправными центрами (матричная структура) и более сложная структура неэффективна (в рассмотренной модели это соответствует расширяющему функционалу затрат). В более сложных ситуациях двухуровневая структура оказывается неэффективной. Таким образом, в целом работа показывает возможность и целесообразность математического моделирования активных многоуровневых систем.

Список литературы

1. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
2. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999.
3. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 148 с.
4. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. – 327 с.
5. *Кукушкин Н.С., Морозов В.В.* Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984. – 104 с.
6. *Grossman S., Hart O.* An analysis of the principal-agent problem // Econometrica. 1983. Vol. 51(1). P. 7–45.
7. *Grossman S., Hart O.* Implicit contracts under asymmetric information // Quarterly J. of Economics. 1982. №1. P. 110–124.
8. *Hart O.D., Holmstrom B.* Theory of contracts // Advances in economic theory. 5-th World Congress. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1987. P. 71–155.
9. *Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.
10. *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
11. *Новиков Д.А.* Сетевые структуры и организационные системы. М.:ИПУ РАН, 2003. –102с.
12. *Воронин А. А., Мишин С.П.* Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы // АиТ. 2002. №5. С. 120–132.
13. *Воронин А. А., Мишин С.П.* Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева // Вестн. Волг. ун-та. 2001. Сер. 1: Математика. Физика. С. 78–98.
14. *Воронин А. А., Мишин С.П.* Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы // АиТ. 2002. №8. С. 136–150.
15. *Воронин А.А., Мишин С.П.* Оптимальные иерархические структуры. М.: ИПУ РАН, 2003. – 214 с.
16. *Губко М.В.* Структура оптимальной организации континуума исполнителей // Автоматика и телемеханика. 2002. №12. С. 116–130.
17. *Дементьев В.Т., Ерзин А.И., Ларин Р.М. и др.* Задачи оптимизации иерархических структур. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1996.
18. *Мишин С.П.* Динамическая задача синтеза оптимальной иерархической структуры // Управление большими системами. Выпуск 3. М.: ИПУ РАН, 2003. С. 55–75.
19. *Овсиевич Б.И.* Модели формирования организационных структур. Л.: Наука, 1979.
20. *Цвиркун А.Д.* Основы синтеза структуры сложных систем. М.: Наука, 1982.
21. *Aumann R., Myerson R.* Endogenous formation of links between players and coalitions: an applications of the shapley value / In The shapley value. Cambridge Univ.Press,1998, pp.175–191.

22. *Belleflamme P., Bloch F.* Market sharing agreements and stable collusive networks. University of London and GREQAM, 2002.
23. *Dutta B.,Mutuswami S.* Stable networks // Journal of economic theory. 1997. No.76. P.322–344.
24. *Jackson M.O., van den Nouweland A.* Strongly stable networks. Caltech and the University of Oregon, 2000.
25. *Jackson M.O., Watts A.* The existence of pairwise stable networks // Seoul journal of economics. 2001. Vol. 14. No. 3. P. 299–321.
26. *Jackson M.*O., *Wolinsky A.* A strategic model of social and economic networks // Journal of economic theory. 1996. No. 71. P. 44–74.
27. *Месарович М., Мако Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.:Мир, 1973.
28. *Новиков Д.А.* Стимулирование в организационных системах. М.: СИНТЕГ, 2003. – 312 с.
29. *Губко М.В., Мишин С.П.* Оптимальная структура системы управления технологическими связями / Материалы международной научной конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 27–29 ноября 2002. С. 50–54.
30. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Рефлексивные игры. М.: СИНТЕГ, 2003. – 160 с.
31. *Васильев Д.К., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А., Цветков А.В.* Типовые решения в управлении проектами. М.: ИПУ РАН, 2003. – 74 с.
32. *Гермейер Ю.Б., Новиков Д.А.* Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998. – 68 с.
33. *Лотоцкий В.А.* Идентификация структур и параметров систем управления // Измерения. Контроль. Автоматизация. 1991. № 3-4. С. 30 - 38.
34. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. – 688 с.
35. *Davies G., Smith M., Twigger W.* Leading people: a model of choice and fate for leadership development // Leadership & organization development. 1991. Vol. 12. No. 1. P. 7–11.
36. *Jago A.G., Vroom V.H.* Perceptions of leadership style: superior and subordinate descriptions of decision-making behavior / In Leadership Frontiers, ed. Hunt J.G, Larson L.L. Carbondale: Southern Illinois university press, 1975, pp. 103–120.
37. *Manz C.C., Sims H.P.* Leading workers to lead themselves: the external leadership of self-managing work teams. / Administrat. Sci. Quart., 1987, pp. 106–129.
38. *Oldman G.R., Hackman J.R.* Relationships between organization structure and employee reactions: comparing alternative frameworks / Administrat. Sci. Quart., 1981, pp. 66–83.
39. *Peters T.* Thriving on chaos. N. Y.: Knopf, 1987.
40. *Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G.* Inequalities. London: Cambridge University Press, 1934.
41. *Воронин А.А.* Устойчивое развитие – миф или реальность? // Математическое образование. 2000. №1(12). С. 59–67.
42. *Мишин С.П.* Стоимость реорганизации структуры системы // Тр. кафедры математ. анализа и теории функций Волг. ун-та. 2002. С. 178–198.